المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (28) 2019
ص ص [111-139]

تحليل بيز لمعلمات نموذج tFA متعدد المتغيرات مع المحاكاة

احمد سامي احمد*

د.هيفاء عبد الجواد سعيد**
haeifa965@gmail.com

المستخلص

يستخدم الباحثون في كثير من الدراسات الاقتصادية والطبية والتلوث البيئي ... الخ انموذجاً خطياً طبيعياً؛ لتمثيل بيانات دراستهم، لكن ذلك الاختيار يكون غير دقيق بسبب أَنَّ بيانات تلك الدراسات لا تخلو من مشاهدات شاذة لها تأثير كبير في تقدير الأنموذج سواء تمت معالجة تلك المشاهدات في عينة الدراسة أَم حذفها، مما يؤدي الى تشويه الحقائق لمتخذ القرار، نتيجة لذلك وجدت نماذج خطية غير طبيعية لمعالجة تلك المسالة. يكون حد الخطأ فيها ينتمي إلى عائلة التوزيعات الاحتمالية التي تقاوم تأثير القيم الشاذة، فعلى سبيل المثال توزيع t متعدد المتغيرات والتوزيع الطبيعي المختلط. ينتمي أُنموذج التحليل العاملي إلى عائلة النماذج الخطية، وبسبب أَنَّ البيانات متعددة المتغيرات لا تخلو من المشاهدات الشاذة ، فقد تركز البحث بدراسة أُنموذج t–FA (t–Factor Analysis) وتحليله بأسلوب (بيز) عندما يكون العامل المشترك (Common Factor) متغيراً عشوائياً، وغير عشوائي (Non stochastic and Random) مفترضين أَنَّ جميع معلمات الأنموذجين غير معلومة يكون لبعض منها توزيعات أُولية تنتمي إلى العوائل المرافقة (Conjugate Families)إنَّ عدد العوامل المستخلصة في نماذج التحليل العاملي لا يمكن معرفته مسبقاً. وعلى هذا الأساس يعامل عدد العوامل المستخلصة في أُسلوب بيز على أنه متغير عشوائي، وقد استنتجنا معيار الاحتمال اللاحق لعدد العوامل في الانموذج، اذ يتم اختيار عدد العوامل الواجب إدخالها في الانموذج المقابلة لأعظم احتمال لاحق. طبقت النتائج التي توصلنا اليها على بيانات تجريبية تم توليدها بأسلوب المحاكاة للأنموذج بحجمي عينتين (n=50,100) عند قيم مختلفة لدرجة حرية توزيع حد الخطأ، وأَشكال مختلفة لمصفوفة تحميلات العوامل ومصفوفة تباين حد الخطأ واستخدمنا لغة ((Matlab(7.9) في التوليد وعملية التقدير.

الكلمات المفتاحية: بيز ، نموذج tFA ،المحاكاة

* طالب ماجستير / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل .
** استاذ مساعد / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل .

تاريخ استلام البحث 2019/2/26 ——— تأريخ القبول 2019/4/14

Bayesian Analysis for Parameters of Multivariate tFA model with Simulation

Abstract

In many kinds of pollution, such as economic and environmental pollution, the researchers use the normal linear model to present their data studies. That selection may be inaccurate because the data of those studies do not vacate from outlier observations, which have great effect on the estimation problem even if they are processed or removed from the sample study. These processes lead to facts defacement to the decision maker. For that reason, the non-normal linear models has been found out to combat that matter. That error term in these models belongs to the family of probability distributions which resist outliers, for example, the multivariate t and mixture normal distributions.

The factor analysis model belongs to the family of linear models and because the multivariate data sets do not vacate outliers .For this reason this paper is concerned with studying the t factor analysis model. The model analyzed by Bayesian technique in which the common factors are treated as fixed and random variables . We supposed that all parameters of both two models were unknown and their prior distributions belong to conjugate families.

The number of extracted factors in factor analysis models cannot be determined a prior .On this foundation, in Bayesian analysis, these factors are treated as random variables. We obtained a posterior probability criterion to choose the number of extracted factors for the two models. We choose the number of factors in which they must be entered, and the model which they have maximum posterior probability.

All results that we concluded were applied to empirical data sets which are generated by simulation in two different sample sizes (n=50,100) at different values of the degrees of freedom for the distribution of the error term. Also, we selected different forms of factor loading matrix and variance matrix of error term. Matlab (7.9) language is used in data generation and analysis.

1. المقدمة

في مجموعة البيانات تظهر أَحيانا قيمة واحدة أَو اكثر تكون بعيدة عن مجموعة القيم الاخرى، وهذه القيم تبدو غير منطقية اذا ما قورنت بسائر مجموعة البيانات، اذ قد تكون صغيرة جداً او كبيرة جداً بالنسبة لبقية البيانات. وهذه القيم هي بشكل عام غير مرغوب فيها؛ لأَنها تسبب صعوبة في محاولة تمثيل المجتمع اذ من الممكن أَن تلوث المقدرات او الاختبارات للمعلمات في أُنموذجٍ ما عن المجتمع، وبالتالي نبتعد عن التقدير الحصين لها (Robust Estimate) ، وهذه القيم تدعى بالقيم الشاذة أَو المتطرفة (Outliers) ويمكن تعريفها بأَنها تلك المشاهدات التي لم تتولد بالطريقة العامة التي ولدت الأَغلبية العظمى من مشاهدات البيانات، وتكون نتيجة لأَسباب عدة منها:- إنَّ البيانات تعود الى توزيعات غير متماثلة، أَي يكون فيها التواء عالٍ نحو اليمين او اليسار، ولصياغة أُنموذج لهذه التوزيعات قدم (Green,1976) تصنيفاً لعوائل توزيعات إِحصائية، منها ما تكون عرضة للقيم الشاذة (Outlier– Prone)، وتوزيعات تكون مقاومة للقيم الشاذة (Outlier –Resistant). والتوزيعات تكون عرضة للقيم الشاذة لها نهايات تؤول إِلى الصفر ببطء، وهذه التوزيعات تكون عرضة للقيم الشاذة بصورة مطلقة، والتوزيعات التي تؤول الى الصفر بشكل أَسرع من سابقتها، وتكون مقاومة للقيم الشاذة ، في حين توزيعات (كاما) تكون مقاومة للقيم الشاذة (Green,1976) . وعندما تاتي البيانات من نوعين من التوزيعات أَحدهما التوزيع الأَسي (Basic Distribution) وبدالة كثافة $f_0(x)$ الذي يولد مشاهدات جيدة، والآخر توزيع التلويث (Contaminating Distribution) الذي يولد قيماً شاذة بدالة كثافة احتمال $f_1(x)$ وبنسبة خلط (p).

توجد توزيعات احتمالية أُخرى مثل توزيع t، وتوزيع t–Bassel تقاوم تاثير المشاهدات الشاذة، وتركز اهتمام الباحثين على استخدام هذا التوزيع، اذ يتاثر تقدير معلمات النماذج الطبيعية بوجود مشاهدات شاذة في عينة الدراسة؛ لأَنَّ تلك المقدرات حساسة جداً بوجود المشاهدات الشاذة، ولمعالجة حساسية المقدرات اقترح عدد من العلماء استبدال التوزيع الطبيعي بتوزيع t، إِذ إِن التوزيع الاخير يساعد في الحصول على مقدرات تقاوم تاثير القيم الشاذة في العينة. وعلى هذا الاساس يتركز اهتمامنا في هذا البحث بتقديم أُنموذج t متعدد المتغيرات للتحليل العاملي الذي ينتج من استبدال

التوزيع الاحتمالي لمتجه الخطأ (ε_i) المعرف في المعادلة (1)، من التوزيع الطبيعي الى توزيع t متعدد المتغيرات .(انظر (2007) Li.Liu. and Zhang).

يهدف البحث الى استخدم أُسلوب (بيز) في تقدير عدد العوامل العامة المعنوية الداخلة في أُنموذج التحليل العاملي، فضلاً عن تقدير معلمات الأُنموذج عندما يكون العامل العام $(f_{\circ})$ لجميع قيم $j = 1,2,\dots,n$ متغيراً غير عشوائي، وفي حالة كونه متغيراً عشوائياً.

2. أُنموذج التحليل العاملي The Factor Analysis Model

تكمن أَهمية التحليل العاملي بوصفه أُنموذجاً رياضياً لتحليل العلاقات بين عدد كبير من المتغيرات وتفسيرها في عدد من العوامل التي تعكس واقع البيانات الخاضعة للتحليل، والكشف عن بعض العلاقات التي تبدو متميزة في بادىء الأَمر، ثم يتضح بأَنها ليست لها أَهمية تذكر والعكس صحيح(Loehlin,2004) ،لذلك يمكن تفسير الانموذج العاملي لـ (p) من المتغيرات على أَنه عبارة عن دالة خطية لـ (p) من متوسطات المتغيرات لـ (q) من العوامل العامة (Factor Scores) أَو المشتركة (Common) و (p) من العوامل الوحيدة (Unique Factor) لكل متغير، إِذ إِن $(q < p)$، لذا فإِن الانموذج العاملي يمكن صياغته على النحو الآتي:

$$\underline{x}_j = \underline{\mu} + \Lambda \cdot \underline{f}_j + \varepsilon_j \qquad ; j = 1,2,\dots,n \qquad \dots(1)$$

إِذ إِن :

$\underline{x}_i$:متجه ذو سعة $(p \times 1)$ لـ (p) من المتغيرات.

$\underline{\mu}$:متجه ذو سعة $(p \times 1)$ لـ (p) من أَوساط المتغيرات.

Λ : مصفوفة ذات سعة $(p \times q)$ من تحميلات العوامل .

$\underline{f}_j$:متجه ذو سعة $(q \times 1)$ لـ (q) من العوامل العامة أَو الشائعة.

$\underline{\varepsilon_j}$:متجه ذو سعة $(p\times1)$ لـ (p) من العوامل الوحيدة، ويسمى أَيضاً بمتجه الأَخطاء العشوائية
v : درجة الحرية ، ψ : مصفوفة معلمة القياس ذات $(p \times p)$ اكيدة الايجابية.(Tenko and Marcoulides 2008).

وهكذا كل استجابة للمتغيرات تتكون من قسمين، الأَول: تسببه العوامل العامة التي هي عبارة عن تركيبة خطية من العوامل (q). أَما القسم الثاني فإِنه يأتي عن طريق العامل الوحيد الذي يحتوي على التأثيرات الأُخرى جميعاً والموجودة في العوامل الأُخرى التي عددها $(p-q)$ (احمد ،2011).

يمكن تعريف نوعين من نماذج التحليل العاملي، ويعتمد كل نوع على طبيعة $\left(f_j; j=1,2,...,n\right)$ المعرف في المعادلة المذكورة آنفاً و كما يأتي:

1− أُنموذج التحليل العاملي ذو العوامل غير العشوائية في هذا النوع يعامل $\left(f_j; j=1,2,...,n\right)$ على أَنه متغير غير عشوائي (Non stochastic variable)، وفي هذه الحالة يسمى $\left(f_j\right)$ بالمعلمة العرضية (Incidental Parameter) ويتم في هذه الحالة تقدير المعلمات في الأُنموذج $(1-1)$ المتمثلة بـ $\left(\mu, \Lambda, f_j, \psi\right)$ بإحدى طرائق التقدير المألوفة، وعند معاملة $\left(f_j\right)$ بوصفه متغيراً غير عشوائي يكون $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j = 0\right)$ و $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j f_j{}' = \Phi\right)$ وتحت شرط التعامد (Orthogonality) تكون $\left(\Phi = I_q\right)$.

2− أُنموذج التحليل العاملي ذو العوامل العشوائية يعامل $\left(f_j; j=1,2,...,n\right)$ المعرف في المعالة (1-1) على أَنه متغير عشوائي عزمه الأَول والثاني حول الصفر مساوٍ لمتجه صفري، وتباينه هو المصفوفة (Φ) ذات سعة $(q\times q)$، وتحت شرط التعامد عادة تكون $\left(\Phi = I_q\right)$. وفي هذا النوع من النماذج يتم تقدير المعلمات (μ, Λ, ψ) بإحدى طرائق التقدير.

3. معيار تعظيم الاحتمال اللاحق لاختيار عدد العوامل

عند استخدام أُسلوب (بيز) في تحليل أُنموذج التحليل العاملي، ولغرض تحديد عدد العوامل يتم استخدام معيار تعظيم الاحتمال اللاحق لعدد العوامل الذي يستند على حساب الاحتمال اللاحق لعدد العوامل (q) ، ثم نقوم باختيار عدد العوامل للأنموذج الذي يعظم قيمة الاحتمال اللاحق (Press,2003) ، ويمكن حسابه وفق المعادلة الآتية:

$$p(Q = q \backslash X) = K(X).p(X \backslash Q = q).p(Q = q) \qquad \dots (2)$$

إذ إنَّ :

$P(Q = q)$: الاحتمال الاولي لعدد العوامل.

$p(X \backslash Q = q)$: دالة الترجيح للبيانات المشاهدة.

$K(X)$: ثابت المساواة أَو التطبيع (Normalizing Constant).

بما أَنَّ عدد العوامل العامة (q) المستخدمة في أُنموذج التحليل العاملي غير معلوم، لذا فإِنه في أُسلوب (بيز) يفترض أَن يكون عدد العوامل متغيراً عشوائياً الذي يرمز له بـ (Q)، ويتم إيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق لعدد العوامل $p(Q = q \backslash X)$ الذي سبق تعريفه في المعادلة العامة المذكورة في اعلاه عند ذلك نقوم باختيار عدد العوامل لأنموذج التحليل العاملي المرجح اللاحق لعدد العوامل (Posterior Odds For The Number of Factors)، وبذلك نكون قد استطعنا توظيف أُسلوب (بيز) في تحديد عدد العوامل، وغالباً ما تتم المقارنة بعد أَخذ اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق؛ وذلك لغرض السهولة والدقة في النتائج(انظر الى (Press, and Shigemasu, 1999)).

4. التوزيع الاحتمالي اللاحق لعدد العوامل العامة (Q)

اولا: عندما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي.

افترضنا في أُنموذج (tFA) أَن التوزيع الاحتمالي لمتجه الخطأ (ε_j) هو توزيع t المتعدد المتغيرات، ويعبر عن هذا التوزيع باستخدام التوزيعات المركبة (Compound Distribution) (اللهيبي،2010)، الذي يعرف بالآتي:

$$p(\varepsilon_j)=\int_0^{\infty} p\left(\varepsilon_j \setminus \sigma^2\right)p(\sigma^2)d\sigma^2 \qquad ...(3)$$

إذ إنَّ التوزيع الاحتمالي لـ (ε_j) المشروط بمعلمة القياس (σ^2) يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد والمعلمة (σ^2) لها توزيع معكوس كاما، ويوصفان بالشكل الآتي على التوالي (اللهيبي،2010):

$$\varepsilon_j \setminus \sigma^2 \sim N_p(0,\sigma^2\psi) \quad ,\sigma^2>0$$
$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{v}{2},\frac{v}{2}\right)$$

وفي ظل وجود (q) من العوامل الداخلة في أُنموذج (tFA) يكون التوزيع الاحتمالي للمشاهدة (X_j) المشروط بـ $(\mu,\Lambda,\psi,f_j,\sigma^2,q)$معطىً بالتعبير الوصفي الآتي:

$$X_j \mid \mu,\Lambda,\psi,f_j,\sigma^2,q \sim N_p(\mu+\Lambda f_j,\sigma^2\psi)$$

فإذا توفرت (n) من متجهات مشاهدات العينة المستقلة فيما بينها، فإن دالة الترجيح الشرطية لـ $X_j \mid \mu,\Lambda,\psi,f_j,\sigma^2,q$ تكتب وفق المعادلة الاتية:

$$p\left(X \mid \mu,\Lambda,F,\psi,q,\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{-np}{2}}|\psi|^{\frac{-n}{2}}\exp\left\{-\frac{tr\,\psi^{-1}}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\mu-\Lambda f_j\right)\left(x_j-\mu-\Lambda f_j\right)'\right\} \quad ...(4)$$

التوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات (μ,Λ,F,ψ)المشروط بـ (Q,σ^2) يكون على الشكل الآتي(Press,2003) :

$$p\left(\mu,\Lambda,F,\psi \mid Q=q,\sigma^2\right)=p(\mu).p(\Lambda \mid \psi,Q,\sigma^2).p(\psi \mid Q,\sigma^2).p(F) \qquad ...(5)$$

إذ إن : $p(\mu)$ و $p(F)$ يمثلان التوزيع السابق بالمعلومات الخبرية القليلة لكل من (μ) و (F) ويعرفان بالآتي:

$$p(F)\propto \text{ Constant Matrix }، \quad p(\mu)\propto \text{ Constant Vector} \qquad ....(6)$$

أما التوزيع السابق لـ (Λ) المشروط بـ $(\psi,Q=q,\sigma^2)$ فهو ينتمي إلى العائلة المرافقة (Conjugate Family) وهو (Matrix Normal Distribution) وهذه الدالة تعرف بالآتي:

$$p\left(\Lambda \mid \psi, Q=q, \sigma^{2}\right)=\frac{|H|^{\frac{p}{2}}}{\left(2 \pi \sigma^{2}\right)^{\frac{pq}{2}}|\psi|^{\frac{q}{2}}} . \exp \left\{\frac{-1}{2 \sigma^{2}} tr(\Lambda-\Lambda_{0}) H(\Lambda-\Lambda_{0})^{\prime}\right\} \quad \ldots(7)$$

إذ إن (H) مصفوفة متماثلة اكيدة الايجابية ذات سعة $(q \times q)$، و (ψ) مصفوفة متماثلة أَكيدة الايجابية ذات سعة $(p \times p)$ و (Λ_{0}) مصفوفة ذات سعة $(p \times q)$، وإِنَّ :

$$p\left(\psi \mid Q=q, \sigma^{2}\right)=\frac{C_{0}(m, p).|B|^{\frac{m-p-1}{2}}}{\left(\sigma^{2}\right)^{\frac{mp}{2}} .|\psi|^{\frac{m}{2}}} . \exp \left\{\frac{-1}{2 \sigma^{2}} tr\, \psi^{-1} B\right\} \quad \ldots(8)$$

إِذ إِنَّ $C_{0}(m, p)$ يمثل ثابت التناسب، ويعطى على الشكل الآتي:

$$C_{0}^{-1}(m, p)=2^{\frac{m-p-1}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod \Big) \frac{m-p-1}{2}$$

وبضرب دالة الترجيح الشرطية المعرفة في المعادلة (4) مع المعلومات المسبقة عن معلمات أُنموذج (tFA) المتمثلة بالمعادلات (7) و (8) على الترتيب نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $(X, \mu, \Lambda, F, \psi)$ المشروطة بـ $\left(\sigma^{2}, q\right)$وتكون على النحو الآتي:

$$p\left(X, \mu, \Lambda, F, \psi \mid Q=q, \sigma^{2}\right)=\frac{C_{0}(m, p).|B|^{\frac{m-p-1}{2}}}{(2 \pi)^{\frac{(n+q) p}{2}} .\left(\sigma^{2}\right)^{\frac{(m+p) p}{2}}}|\psi|^{\frac{m+n+q}{2}}$$

$$\exp \left\{\frac{-1}{2 \sigma^{2}} tr\, \psi^{-1}\left[B+(\Lambda-\Lambda_{0}) H(\Lambda-\Lambda_{0})^{\prime}+\sum_{j=1}^{n}\left(\left(x_{j}-\mu\right)-\Lambda f_{j}\right)\left(\left(x_{j}-\mu\right)-\Lambda f_{j}\right)^{\prime}\right]\right\} \quad \ldots(9)$$

باستخدام بعض العمليات الجبرية على المعادلة (9) نحصل على :

$$p\left(X, \mu, \Lambda, F, \psi \mid Q=q, \sigma^{2}\right)=\frac{C_{0}(m, p).|B|^{\frac{m-p-1}{2}} .|H|^{\frac{p}{2}}}{\left(2 \pi \sigma^{2}\right)^{\frac{(n+q) p}{2}}|\psi|^{\frac{m+n+q}{2}}}$$

$$\exp \left\{\frac{-1}{2 \sigma^{2}} tr\, \psi^{-1}\left[R_{F}+n(\mu-\bar{x})(\mu-\bar{x})^{\prime}-(\Lambda-\Lambda_{F}) G_{F}(\Lambda-\Lambda_{F})^{\prime}\right]\right\} \quad \ldots(10)$$

إِذ إِنّ :

$$G_F = H + FF' \quad ; \quad \Lambda_F = \left(XF' + \Lambda_0 H\right)\left(H + FF'\right)^{-1}$$
$$R_F = A + B + \Lambda_0 H \Lambda_0' - \left(XF' + \Lambda_0 H\right) G_F^{-1} \left(XF' + \Lambda_0 H\right)'$$
$$A = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)'$$

باستخدام الشكل العام لمعادلة التوزيع اللاحق لعدد العوامل العامة التي سبق تعريفها في المعادلة (2) وبعد افتراض الاحتمال السابق الغامض لعدد العوامل (Vague or Indifferent Prior Probability)، والذي يعرف بالشكل الآتي: (Press,2003)

$$p(q) = 1/p \qquad , \quad q \le p$$

يتم ايجاد دالة الترجيح لمصفوفة متجهات مشاهدات العينة (X)المشروطة بعدد العوامل (q)من تكامل دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $(X, \mu, \Lambda, F, \psi)$ المشروطة ب (σ^2, q)مضروبة في $p(\sigma^2)$ نسبة الى $(\mu, \psi, \Lambda, F, \sigma^2)$وعلى الآتي:

$$p(X \mid Q = q) = \int\limits_{\sigma^2}\int\limits_{F}\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\psi}\int\limits_{\mu} p\left(X, \mu, \Lambda, F, \psi \mid Q = q, \sigma^2\right).p\left(\sigma^2\right) d\mu.d\psi.d\Lambda.dF.d\sigma^2 \qquad ...(11)$$

وبعد التعويض بمكونات المعادلة في أَعلاه واجراء العمليات الجبرية نحصل على : (احمد ،2011)

$$p(X \mid Q = q) = \frac{C_0(m,p).2^{\frac{q-p-1}{2}}..(\pi)^{\frac{nq}{2}}.\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n+q-2p-2}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n-p-q-2}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{(q+n-1)p}{2}}.(n)^{\frac{p}{2}}.(\pi)^{\frac{p(n-0.5p+0.5)}{2}}.\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-p-2}{2}\right)}$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{v+2n+q+pq+m-p-3}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v+2n+q+pq+m-p-3}{2}}}.\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}.|H|^{\frac{p}{2}}.\left|H+nI_q\right|^{\frac{m+n-2p-2}{2}}}{|W|^{\frac{m+n-p-2}{2}}.|N|^{\frac{m-p-2}{2}}.\left|I_n - X'WX\right|^{\frac{q}{2}}} \qquad ...(12)$$

وبتعويض كل من التوزيع السابق لعدد العوامل ودالة الترجيح للبيانات المشاهدة المشروطة بـ (q) في المعادلة العامة (2) نحصل على التوزيع اللاحق لعدد العوامل $(Q = q)$، وبعد إِجراء عمليات جبرية على المصفوفات نحصل على :

$$p(Q=q\mid X)=K(X)\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n+q-2p-2}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n-p-q-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-p-2}{2}\right)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{v+2n+q+pq+m-p-3}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m-p-i}{2}\right).(2\pi e)^{\frac{nq}{2}}}.\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}.|H|^{\frac{p}{2}}.|H+nI_q|^{\frac{m+n-2p-2}{2}}}{|W|^{\frac{m+n-p-2}{2}}.|N|^{\frac{m-p-2}{2}}.|I_n-X'WX|^{\frac{q}{2}}}.p_r(Q=q) \qquad ...(13)$$

إذ إنَّ :

$$W_{(p\times p)}=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})'+B+\Lambda_0 H\Lambda_0^{-1}$$

$$N_{(q\times q)}=H-H\Lambda_0'W^{-1}\Lambda_0 H-\left(H\Lambda_0'W^{-1}X\right)P^{-1}\left(X'W^{-1}\Lambda_0 H\right)$$

$$P_{(n\times n)}=I_n-X'W^{-1}X$$

$$p(X)=\frac{2^{\frac{q-p-1}{2}}.(\pi)^{\frac{nq}{2}}.(n)^{\frac{-p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(q+n-1)p}{2}}.\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v+2n+q+pq+m-p-3}{2}}.(\pi)^{\frac{p(n-0.5p+0.5)}{2}}}$$

ثانياً: عندما يكون (f_j) عاملاً عشوائياً

إنَّ التوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات (μ,Λ,ψ)المشروط بـ (Q,σ^2) يعطى على الشكل الآتي:

$$p(\mu,\Lambda,\psi\mid Q=q,\sigma^2)=p(\mu).p(\Lambda\mid\psi,Q,\sigma^2).p(\psi\mid Q,\sigma^2) \qquad ...(14)$$

علما بأَنّ مكونات الطرف الأيمن في المعادلة (14) سبق تعريفها في المعادلات (6) و (7) و(8) على الترتيب، وبعد التعويض عن تلك المكونات نحصل على:

$$p(\mu,\Lambda,\psi\mid Q=q,\sigma^2)=\frac{C_0(m,p).|B|^{\frac{m-p-1}{2}}.|H|^{\frac{p}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{pq}{2}}.(\sigma^2)^{\frac{(m+p)p}{2}}|\psi|^{\frac{m+q}{2}}}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}tr\,\psi^{-1}\left[B+(\Lambda-\Lambda_0)H(\Lambda-\Lambda_0)'\right]\right\} \qquad ...(15)$$

إنَّ دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ (F,X) المشروطة بـ $(\mu,\Lambda,\psi,Q=q,\sigma^2)$ تعرف بما يأتي :

$$p\left(X,F \mid \mu,\Lambda,\psi,Q=q,\sigma^2\right)=p\left(X \mid \mu,\Lambda,\psi,F,Q=q,\sigma^2\right).p\left(F \mid \sigma^2\right) \qquad ...(16)$$

إذ إنَّ :

$$p\left(F \mid \sigma^2\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{nq}{2}}.}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} f_j{}' f_j\right\}$$

دالة الترجيح المشتركة غير الخطية لـ (X) والعوامل العامة تعطى على الشكل الآتي:

$$p\left(X,F \mid Q=q\right)=\int\limits_{\sigma^2}\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\psi}\int\limits_{\mu} p\left(X,F \mid \mu,\Lambda,Q,\sigma^2\right).p\left(\mu,\Lambda,\psi \mid Q,\sigma^2\right).f\left(\sigma^2\right)d\mu.d\psi.d\Lambda.d\sigma^2 \qquad ...(17)$$

وبالتعويض عن مكونات المعادلة في اعلاه وإِجراء التكاملات نحصل على :

$$p\left(X,F|Q=q\right)=\frac{C_0\left(m.p\right).2^{\frac{q-p-1}{2}}.\left(\pi\right)^{\frac{p\left(n-0.5p+0.5\right)}{}},\prod_{I=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right).}{\left(2\pi\right)^{\frac{n(q+p)+p(q-1)}{2}},\left(n\right)^{\frac{-p}{2}}\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{p(n-q-1)-q(q-1)}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{v+p(n+q-1)-q(q-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right).}.\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}.|H|^{\frac{p}{2}}.\left|1+\frac{nq}{v}\right|^{\frac{v+p(n+q-1)-q(q-1)}{2}}}{|nI_n+H|^{\frac{p}{2}}.|R_F|^{\frac{n+q-p-2}{2}}} \qquad ...(18)$$

ويعرف التوزيع اللاحق لعدد العوامل $(Q=q)$ بالمعادلة الآتية:

$$p\left(Q=q \mid X,F\right)=K\left(X\right).p\left(X,F \mid Q=q\right).p\left(Q=q\right) \qquad ...(19)$$

وبالتعويض عن مكونات معادلة التوزيع اللاحق لعدد العوامل العامة، وإِجراء العمليات الرياضية نحصل على : (احمد،2011)

$$p\left(Q=q \mid X,F\right)=K(x)\,\frac{.\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n+q-2p-2}{2}\right).\Gamma\left(\frac{v+p(n+q-1)-q(q-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right).\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m-p-i}{2}\right).(2\pi)^{\frac{n(-}{2}}.}$$

$$.\frac{\left|B\right|^{\frac{m-p-1}{2}}.\left|H\right|^{\frac{p}{2}}.\left|1+\frac{nq}{v}\right|^{\frac{v+p(n+q-1)-q(q-1)}{2}}}{\left|nI_n+H\right|^{\frac{p}{2}}.\left|R_F\right|^{\frac{n+q-p-2}{2}}} \qquad ...(20)$$

إذ إنَّ :

$$K\left(X\right)=\frac{\left(\pi\right)^{\frac{p(p-1)}{4}}.2^{\frac{q-p-1}{2}}.\left(\pi\right)^{\frac{-p(n-0.5p+0.5)}{2}}}{\left(2\pi\right)^{\frac{np+p(q-1)}{2}}.\left(n\right)^{\frac{-p}{2}}.\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{p(n+q-1)-q(q-1)}{2}}}$$

5. مقدر (بيز) لمعلمات أُنموذج tFA

اولا: عندما يكون $\left(f_j\right)$ عاملاً غير عشوائي

لتقدير معلمات أُنموذج التحليل العاملي يستوجب الأَمر إيجاد التوزيعات اللاحقة الهامشية غير المشروطة بـ $\left(\sigma^2\right)$ للمعلمات المطلوب تقديرها:

[دالة الترجيح المشروطة بـ $\left(\mu,\Lambda,\psi,F,\sigma^2\right)$ تعطى على الصيغة الآتية:

$$p\left(X \mid \mu,\Lambda,F,\psi,\sigma^2\right)=(2\pi\sigma^2)^{\frac{-np}{2}}.\exp\left\{-\frac{tr\,\psi^{-1}}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\mu-\Lambda f_j\right)\left(x_j-\mu-\Lambda f_j\right)'\right\} \quad ...(21)$$

والتوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات $\left(\mu,\Lambda,F,\psi\right)$ المشروط بـ $\left(\sigma^2\right)$ يعطى على الشكل الآتي:

$$p\left(\mu,\Lambda,F,\psi \mid \sigma^2\right)\propto p\left(\mu\right).p\left(\Lambda \mid \psi,\sigma^2\right).p\left(\psi|\sigma^2\right).p\left(F\right) \qquad ...(22)$$

إذ

إنَّ $p\left(\mu\right)$ و $p\left(F\right)$ سبق تعريفهما بالمعادلة (6) ، والتوزيعات السابقة لـ $\left(\Lambda \mid \psi,\sigma^2\right)$ و $\left(\psi|\sigma^2\right)$ سبق تعريفهما في المعادلتين (7) و (8) على الترتيب، ونحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات $\left(\mu,\Lambda,F,\psi\right)$ المشروط بـ $\left(\sigma^2\right)$ بعد دمج معلومات العينة مع المعلومات المسبقة حول المعلمات $\left(\mu,\Lambda,F,\psi\right)$ وعلى الآتي:

$$p(\mu,\Lambda,F,\psi \mid X,\sigma^2) \propto p(X \mid \mu,\Lambda,F,\psi,\sigma^2).p(\mu,\Lambda,F,\psi \mid \sigma^2)$$
$$\propto |\psi|^{\frac{-m+n+p}{2}}.(\sigma^2)^{\frac{-n(p+q)+m+pq}{2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{tr\,\psi^{-1}}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu-\Lambda f_j)(x_j-\mu-\Lambda f_j)' + (\Lambda-\Lambda_0)H(\Lambda-\Lambda_0)+B\right\} \quad ...(23)$$

نفرض أنَّ:
$$\mathrm{Q}=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu-\Lambda f_j)(x_j-\mu-\Lambda f_j)' + (\Lambda-\Lambda_0)H(\Lambda-\Lambda_0)+B$$

وبإجراء بعض التبسيطات على (Q)،(انظر الملحق (1−ج))نحصل على :

$$p(\mu,\Lambda,F,\psi \mid X,\sigma^2) \propto |\psi|^{\frac{-m+n+p}{2}}.(\sigma^2)^{\frac{-n(p+q)+m+pq}{2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu-\bar{x})'\psi^{-1}(\mu-\bar{x})\right\}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}tr\,\psi^{-1}\left[R_F+(\Lambda-\Lambda_0)G_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right]\right\} \quad ...(24)$$

علماً بأنَّ (G_F و Λ_F و R_F) سبق تعريفهم في المعادلة (10).

المعادلة (23)تمثل التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات (μ,Λ,F,ψ) المشروط بـ (σ^2)،وهي عباره عن نواة التوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات – توزيع معكوس ويشرت ويمكن ان نعبر عنه وصفياً بالآتي:

$$\mu,\Lambda,F,\psi \mid X,\sigma^2 \sim N_p\left(\bar{x},\frac{\sigma^2\psi}{n}\right)-IW\left[(m+n+q-1),\left(R_j+(\Lambda-\Lambda_F)G_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right)\right] \quad ...(25)$$

ولإيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة العوامل العامة ومصفوفة التحميلات المشروط بـ (σ^2) نكامل المعادلة (24) نسبة الى متجه المتوسط (μ)، ومصفوفة تباين حد الخطأ (ψ)نحصل على نواة توزيع (Matrix t-Distribution) .والمعرفة بالشكل الآتي:

$$p(\Lambda,F \mid,\sigma^2) \propto \left|\frac{1}{\sigma^2}\left[R_j+(\Lambda-\Lambda_F)G_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right]\right|^{\frac{m+n+q-p-2}{2}} \quad ...(26)$$

وبتكامل المعادلة (26) نسبة إلى مصفوفة تحميلات العوامل (Λ) و (σ^2)، (انظر الى خصائص توزيع (Matrix t-Distribution)).(Box and Tiao, 1973) ، نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق لمصفوفة العوامل العامة غير المشروطة بـ (σ^2) وعلى الآتي:

$$p(F \mid X) \propto \int_0^\infty \left(\frac{\left(\sigma^2\right)^{\frac{(n+q-2)}{2}}}{\left|R_F\right|^{\frac{n+q-p-1}{2}} \left|FF' + H\right|^{\frac{p}{2}}} \right) . f\left(\sigma^2\right) d\sigma^2 \qquad ...(27)$$

وبإجراء التكامل على المعادلة (27) بالنسبة الى (σ^2) ، ثم استخدام خصائص المحددات على مقام المعادلة الناتجة نحصل على نواة التوزيع اللاحق الهامشي لـ (F) وهو:

$$p(F \mid X) \propto \frac{\left|FF' + H\right|^{\frac{m+n-2p-2}{2}}}{\left| M + \left(F - \hat{F}\right) p \left(F - \hat{F}\right)' \right|^{\frac{m-p-2}{2}}} \qquad ...(28)$$

إذ إنَّ :

$$\underset{(q\times q)}{M} = H - H\Lambda_0{}' W^{-1} \Lambda_0 H + \left(H\Lambda_0{}' W^{-1} X \right) p^{-1} \left(X' W^{-1} \Lambda_0 H \right)$$

علماً بأَنَّ (W) و (P) و $\left(\hat{F}\right)$ تعرف بالآتي:

$$\underset{(n\times n)}{P} = I_n - X' W^{-1} X$$

$$\underset{(q\times n)}{\hat{F}} = \left(H\Lambda_0{}' W^{-1} X \right) . P^{-1}$$

$$\underset{(p\times p)}{W} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)' + B + \Lambda_0 H \Lambda_0$$

وباستخدام التقريب الذي عرفه (Press,2003) عندما تكون (n) كبيرة كحالة خاصة فإِنَّ:

$$\frac{FF'}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j f_j'}{n} \approx I_q \Rightarrow FF' \approx n I_q$$

وهكذا باستخدام حجم عينة كبيرة نجد أَنَّ: $\left|H+FF'\right| \approx \left|H+nI_q\right|$

وبما أَنَّ الحد المذكور في أَعلاه لا يحتوي على (F)، عليه يمكن ان يلغى مع ثابت التناسب ، عندئذ المعادلة (28) تصبح على الشكل الآتي:

$$p(F \mid X) \propto \left|M+\left(F-\hat{F}\right)p\left(F-\hat{F}\right)'\right|^{\frac{-m-p-2}{2}} \qquad \ldots(29)$$

المعادلة (29) تمثل نواة التوزيع (Matrix t-Distribution) وبتوقع مساوٍ الى $\left(\hat{F}\right)$، عليه فإِنَّ مقدر (بيز) لمصفوفة العوامل العامة (F) هو :

$$\hat{F}=\left(H\Lambda_0{}'W^{-1}X\right).\left(I_n-X'W^{-1}X\right)^{-1} \qquad \ldots(30)$$

ويتم إِيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) غير الشرطي بالرجوع الى المعادلة (23)، وإِجراء بعض التبسيطات على الشكل التربيعي (Q)، عندئذ نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك لـ (μ,Λ,F,ψ) المشروط بـ (σ^2)، وعلى الآتي:

$$p\left(\mu,\Lambda,F,\psi|X,\sigma^2\right) \propto |\psi|^{\frac{-m+n+q}{2}}.\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}tr\psi^{-1}\left[R_j+(\Lambda F-X)(\Lambda F-X)'\right]\right\}.$$
$$\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu-\bar{x}\right)\left(\mu-\bar{x}\right)'\right\} \qquad \ldots(31)$$

علما بأَنَّ المعادلة (R_F)سبق تعريفها في المعادلة (10).

وللحصول على التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي المشترك لـ (Λ,F) يكون على الآتي:

$$p\left(\Lambda,F \mid X\right) \propto \int_{\sigma^2}\int_{\psi}\int_{\mu} p\left(\mu,\Lambda,F,\psi \mid X,\sigma^2\right)f\left(\sigma^2\right)d\mu.d\psi.d\sigma^2$$

وبعد التعويض عن مكونات المعادلة المذكورة في أَعلاه واجراء التكامل نحصل على :

$$p\left(\Lambda, F \mid X\right) \propto \frac{\left|P_{\Lambda}\right|^{-\frac{m+n+q-p-2}{2}}}{\left|\left(\Lambda' P_{\Lambda}^{-1}\Lambda\right)^{-1} + \left(F - F_0\right)Z^{-1}\left(F - F_0\right)'\right|^{\frac{m+n+q-p-2}{2}}}$$

وبعد إِجراء التكامل على المعادلة المذكورة في أعلاه نسبة الى (F) نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) الذي يعرف على الآتي:

$$p\left(\Lambda \mid X\right) \propto \left|P_{\Lambda}\right|^{-\frac{m+n+q-p-2}{2}} . \left|\left(\Lambda' P_{\Lambda}^{-1}\Lambda\right)^{\frac{m+n+q-p-2}{2}}\right| . \left|Z\right|^{\frac{-n}{2}} \quad \dots (32)$$

علما بأَنَّ :

$$Z = I_n + X' P_{\Lambda}^{-1} X - X' P_{\Lambda}^{-1} \Lambda \left(\Lambda' P_{\Lambda}^{-1}\Lambda\right)^{-1} \Lambda' P_{\Lambda}^{-1} X$$
$$F_0 = \left(\Lambda' P_{\Lambda}^{-1}\Lambda\right)^{-1} \Lambda' P_{\Lambda}^{-1} X$$
$$P_{\Lambda} = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right) + n\left(\mu - \bar{x}\right)\left(\mu - \bar{x}\right)' - XX' + B + \Lambda H \Lambda' - \Lambda H \Lambda_0{}' - \Lambda_0 H \Lambda' + \Lambda_0 H \Lambda_0{}'$$

بما أَنَّ التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) ليس من التوزيعات الاحتمالية الشائعة، لذا فإننا سوف نستخدم التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك على مصفوفة العوامل العامة (F) وعلى الآتي:

$$p\left(\Lambda \mid F, X\right) = \frac{p\left(\Lambda, F \mid X\right)}{p\left(F \mid X\right)} \quad \dots (33)$$

وبالتعويض مع دمج الحدود التي لا تحتوي على مصفوفة التحميلات (Λ) مع ثابت التناسب وبافتراض أَنَّ $\left(F = \hat{F}\right)$ نحصل على :

$$p\left(\Lambda \mid \hat{F}, X\right) \propto \left|R_F + \left(\Lambda - \Lambda_{\hat{F}}\right) G_{\hat{F}} \left(\Lambda - \Lambda_{\hat{F}}\right)\right|^{\frac{-m+n+q-p-2}{2}} \quad \dots (34)$$

$$G_{\hat{F}} = \hat{F}\hat{F}' + H$$

إذ إنّ :

$$\Lambda_{\hat{F}} = \Lambda_0 + \left(X - \Lambda_0 \hat{F}\right)\hat{F}'\left(\hat{F}\hat{F}' + H\right)^{-1}$$

$$R_{\hat{F}} = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)' + B + \Lambda_0 H \Lambda_0' - \left(X\hat{F}' + \Lambda_0 H\right)G_{\hat{F}}^{-1}\left(X\hat{F}' + \Lambda_0 H\right)'$$

المعادلة (34) تمثل نواة توزيع (Matrix t-Distribution) بتوقع مساوٍ إلى $\left(\Lambda_{\hat{F}}\right)$ لذا فإنَّ مقدر (بيز) الشرطي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) المشروطة بمصفوفة العوامل العامة هو:

$$\hat{\Lambda}_{\underset{(p\times q)}{B}} = \Lambda_0 + \left(X - \Lambda_0 \hat{F}\right)\hat{F}'\left(\hat{F}\hat{F}' + H\right)^{-1} \qquad \dots(35)$$

يتكون مقدر (بيز) لمصفوفة تحميلات العوامل العامة، والمعرف في المعادلة المذكورة في أَعلاه من جزأين ، الأُول :– يعتمد على مصفوفة معلمة الموقع للتوزيع السابق لمصفوفة التحميلات مضافاً إليه حداً آخر يمكن وصفه كحد للخطأ $\hat{e}_0 = X - \Lambda_0 \hat{F}$ ، رشح الخطأ بمصفوفة ربحية الترشيح (Filter Gain)، ويسمى أَيضاً بمصفوفة مرشحات كالمن (Kalman Filter).

أَما مقدر (بيز) لمتجه المتوسط (μ)، فيتم إيجاده بعد الرجوع إلى المعادلة (31) وإجراء عملية التكامل عليها نسبة إلى المعلمات $(\sigma^2 \text{ و} \Lambda \text{ و} F)$ على الترتيب وعلى الآتي:

$$p(\mu \mid X,\psi) \propto \int_F \int_\Lambda \int_{\sigma^2} p\left(\mu,\Lambda,F,\psi \mid X,\sigma^2\right) f\left(\sigma^2\right) d\sigma^2 . d\Lambda . dF \qquad \dots(36)$$

بعد التكامل نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق الشرطي لمتجه المتوسط $(\underline{\mu})$ المشروط بـ (ψ)، ويعبر عنه وصفيا" بالشكل الآتي:

$$\mu \mid X,\psi \sim N_p\left(\bar{x}, \frac{\psi}{n}\right)$$

ومقدر (بيز) المشروط بـ $\left(\psi=\hat{\psi}\right)$ هو:

$$\mu_B=\bar{x}=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_i}{n} \qquad ...(37)$$

ويتم الحصول على مقدر (بيز) لـ (ψ) من التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ (ψ)المشروط بـ (Λ,F) عندما $(\Lambda,F)=\left(\hat{\Lambda}_B,\hat{F}_B\right)$ وعلى الآتي:

$$p\left(\psi\mid X,\hat{F}_B,\hat{\Lambda}_B\right)\propto\frac{p(\psi,\Lambda,F\mid X)}{p(\Lambda,F\mid X)} \qquad ...(38)$$

وبعد تعويض مكونات المعادلة المذكورة في أَعلاه مع دمج الحدود التي لا تحتوي على (ψ) مع ثابت التناسب نحصل على نواة توزيع معكوس ويشرت الذي يعرف بالآتي:

$$p(\psi\mid X,F,\Lambda)\propto|\psi|^{\frac{m+n+q-1}{2}}\ .\exp\left\{\frac{-1}{2}tr\,\psi^{-1}\left[R_F+\left(\Lambda-\Lambda_{\hat{F}}\right)G_{\hat{F}}\left(\Lambda-\Lambda_{\hat{F}}\right)'\right]\right\}$$

أَما مقدر بيز الشرطي لـ (ψ) فهو:

$$\hat{\psi}_B=\frac{R_F+\left(\hat{\Lambda}-\Lambda_F\right)G_F\left(\hat{\Lambda}-\Lambda_F\right)'}{m+n+q-2p-3} \qquad ...(39)$$

ثانيا: عندما يكون $\left(f_j\right)$ عاملاً عشوائياً:

إنَّ التوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات (μ,Λ,ψ) المشروط بـ $\left(\sigma^2\right)$ يكون على الآتي:

$$\begin{aligned}p\left(\mu,\Lambda,\psi\mid\sigma^2\right)&\propto p(\mu).p\left(\Lambda|\psi,\sigma^2\right).p\left(\psi|\sigma^2\right)\\&\propto|\psi|^{\frac{m+q}{2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}tr\,\psi^{-1}\left[B+(\Lambda-\Lambda_0)H(\Lambda-\Lambda_0)'\right]\right\} \qquad ...(40)\end{aligned}$$

وتحلل دالة الكثافة المشتركة للمشاهدة (X_j) و (f_j) الى :

$$p(x_j, f_j \mid \mu, \Lambda, \psi, \sigma^2) = p(x_j \mid f_j, \mu, \Lambda, \psi, \sigma^2).f(f_j|\sigma^2) \qquad \ldots(41)$$

التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات (μ, Λ, ψ) المشروط بـ (σ^2) يعطى على الشكل الآتي:

$$p(\mu, \Lambda, \psi \mid X, F, \sigma^2) \propto p(\mu).p(X, F \mid \mu, \Lambda, \psi, \sigma^2).p(\mu, \Lambda, \psi|\sigma^2)$$

$$\propto |\psi|^{\frac{-m+n+q}{2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} f_j' f_j\right\}.$$

$$\exp\left\{\frac{-tr\,\psi^{-1}}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu - \Lambda f_j)(x_j - \mu - \Lambda f_j)' + (\Lambda - \Lambda_0)H(\Lambda - \Lambda_0) + B\right\} \qquad \ldots(42)$$

يتم ايجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لـ (Λ) على الآتي:

$$p(\Lambda \mid X, F) \propto \int_{\sigma^2}\int_{\Lambda}\int_{\mu} p(\mu, \Lambda, \psi \mid X, F, \sigma^2) f(\sigma^2) d\mu.d\psi.d\sigma^2$$

وبعد التكامل نحصل على :

$$\propto \left| R_F + (\Lambda - \Lambda_F) G_F (\Lambda - \Lambda_F)' \right|^{\frac{m+n+q-p-2}{2}} \qquad \ldots(43)$$

علما بأنَّ $(G_F \text{ و } \Lambda_F \text{ و} R_F)$ معرفة في المعادلة (10).

المعادلة (43)تمثل التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) غير المشروط بـ (σ^2)، وهو يمثل نواة توزيع (Matrix t-Distribution) ، وإنّ مقدر (بيز) لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) يساوي القيمة المتوقعة للتوزيع المذكور في أَعلاه وهو :

$$\underset{(p\times q)}{\hat{\Lambda}_B} = \Lambda_0 + e_0.F'(FF' + H)^{-1} \qquad \ldots(44)$$

إذ إن (e_0) يمثل حد الخطأ، ويكون مساوياً لـ $(X - \Lambda F)$ ، رشح الخطأ بمصفوفة ربحية الترشيح (Filter Gain)، وتسمى أَيضاً بمصفوفة مرشحات كالمن (Kalman Filter).

ولإيجاد مقدر (بيز) لـ (ψ) بالعودة إلى المعادلة (42)، واجراء عملية التكامل نسبة الى $(\mu$ و Λ و $\sigma^2)$ ،نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي للمعلمة (ψ)لمشروط بـ (F) وعلى الآتي:

$$p(\psi \mid \mathrm{X,F}) = \int_{\sigma^2}\int_{\Lambda}\int_{\mu} p(\mu, \Lambda, \psi \mid X, F, \sigma^2) f(\sigma^2) d\mu . d\Lambda .. d\sigma^2$$

وبعد التعويض عن مكونات المعادلة المذكورة في أَعلاه، وإِجراء عملية التكامل، نحصل على:

$$p(\psi \mid X, F) \propto |\psi|^{\frac{m+q}{2}} . \left[\frac{tr\,\psi^{-1} R_F + v}{2}\right]^{\frac{v}{2}} \qquad \ldots(45)$$

وبما أَنَّ التوزيع اللاحق الهامشي لـ (ψ) المشروط بـ (F) من التوزيعات الاحتمالية غير الشائعة، لذا فإننا سوف نستخدم المنوال (Mode) للتوزيع اللاحق على أنه مقدّر بيز لـ (ψ) وعلى الآتي:

$$Ln \int f(x) dx \geq \int Lnf(x)$$

$$Lnp(\psi \mid X, F) = \int_{\forall \sigma^2} Lnp(\psi \mid X, F, \sigma^2) . f(\sigma^2) d\sigma^2 \qquad \ldots(46)$$

بما أَنَّ :

$$p(\psi \mid X, F, \sigma^2) = \frac{|R_F|^{\frac{m+q}{2}} . (\sigma^2)^{\frac{-m+q-p-1}{2}}}{(2)^{\frac{(m+q)}{2}} . \sqrt{\frac{m+q}{2}}} . |\psi|^{-\frac{m+q-p-1}{2}} . \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} tr\,\psi^{-1} R_F\right\}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي $p(\psi \mid X, F, \sigma^2)$ نحصل على :

$$Lnp(\psi \mid X, F, \sigma^2) = LnK - \frac{m+q-p-1}{2} Ln(\sigma^2) - \frac{m+q-p-1}{2} . Ln|\psi| - \frac{1}{2\sigma^2} tr\,\psi^{-1} R_F \quad \ldots(47)$$

وبالتعويض في المعادلة (43) نحصل على :

$$Ln(\psi \mid X,F)=\int_{\forall\sigma^2}\left[Ln(K)-\frac{m+q-p-1}{2}Ln(\sigma^2)-\frac{m+q-p-1}{2}.Ln|\psi|-\frac{1}{2\sigma^2}tr\,\psi^{-1}R_F\right]f(\sigma^2)d\sigma^2$$

$$=Ln(K)-\frac{m+q-p-1}{2}\int_{\forall\sigma^2}Ln(\sigma^2)-\frac{m+q-p-1}{2}..f(\sigma^2)d\sigma^2-\frac{m+q-p-1}{2}.Ln|\psi|\int_{\forall\sigma^2}f(\sigma^2)d\sigma^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}tr\,\psi^{-1}R_F\int_{\forall\sigma^2}f(\sigma^2)d\sigma^2$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة المذكورة في أَعلاه نسبة الى (ψ) نحصل على:

$$\frac{\partial Lnp(\psi \mid X,F)}{\partial\psi}=-\frac{m+q-p-1}{2}.\frac{\partial}{\partial\psi}Ln|\psi|-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}.trI_p\psi^{-1}R_F \qquad ...(48)$$

وباستخدام قاعدة المشتقة الجزئية لأَثر حاصل ضرب مصفوفات متوافقة الابعاد والمتمثلة بالحد الاخير من المعادلة المذكورة في أَعلاه ((Petersen and Pedersen,(2008):

$$\frac{\partial}{\partial C}tr(AC^{-1}B)=-(C^{-1}BAC^{-1})^T=-(C^{-T}A^TB^TC^{-T})$$

وبالتشبيه نحصل على : $A=I_p \quad ; \quad X^{-1}=\psi^{-1} \quad ; \quad B=R_F$

لذا فإنَّ : $\frac{\partial}{\partial C}tr(I_p\psi^{-1}R_F)=-(\psi^{-T}I_p^TR_F^T\psi^{-T})$

وكما هو معلوم أَنَّ (ψ) هي مصفوفة متماثلة، لذا فإِنَّ المعكوس لهذه المصفوفة يساوي مبدل المعكوس لها، وبالتعويض في المعادلة (48) نحصل على :

$$\frac{\partial Lnp(\psi \mid X,F)}{\partial\psi}=-\frac{m+q-p-1}{2}.\psi^{-1}+\frac{1}{2}\left[\psi^{-1}R_F{}'\psi^{-1}\right]$$

وبمساواة المشتقة المذكورة في أَعلاه بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial Lnp(\psi \mid X,F)}{\partial\psi}=\left[-\frac{m+q-p-1}{2}.I_p+\frac{1}{2}\psi^{-1}R_F{}'\right]\psi^{-1}=0$$

وبحل المعادلة المذكورة في أَعلاه نسبة الى (ψ) نحصل على مقدر بيز لـ (ψ) وكالآتي:

$$\hat{\Psi}_B = \frac{R_F}{n+q-p-1}$$

إذ إنَّ (R_F)سبق تعريفها في المعادلة (10).

أَما مقدر (بيز) لمتجه المتوسط (μ) فنحصل عليه بالرجوع إلى التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات (μ,Λ,ψ) المشروط بـ (F,σ^2)، وبعد إجراء بعض التبسيطات عليه، يعرف بما يأتي:

$$p(\mu,\Lambda,\psi \mid X,F,\sigma^2) \propto |\psi|^{\frac{-m+n+q}{2}} .\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} f_j' f_j\right\}.$$
$$\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu-\bar{x}\right)'\psi^{-1}\left(\mu-\bar{x}\right)\right\}.\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2} tr\,\psi^{-1}\left[R_F+(\Lambda-\Lambda_F)G_F(\Lambda-\Lambda_F)\right]\right\} \quad ...(50)$$

فإِنَّ التوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لـ (μ) المشروط بـ (F,ψ,σ^2) يعبر عنه وصفيا بالآتي:

$$\mu \mid X,F,\psi,\sigma^2 \sim N_p\left(\bar{x},\frac{\sigma^2\psi}{n}\right)$$

بعد تكامل المعادلة (50) نسبة الى (σ^2)، نحصل على مقدر بيز لـ (μ) وعلى الآتي:

$$\underline{\hat{\mu}}_B = \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} \quad ...(51)$$

6. الجانب التجريبي:

لتوليد البيانات من خلال المحاكاة لنموذج التحليل العاملي، والمعرف في المعادلة العامة (1) لابد من تحديد عدد المتغيرات في المتجه العشوائي (X_j). فقد افترضنا بأَنَّ ذلك المتجه يحتوي على عشرة متغيرات $(p=10)$ ، تم توليد عينتين؛ وذلك باستخدام المحاكاة لنموذج التحليل العاملي بالحجم $(n=100, n=50)$ وباستخدام لغة (Matlab 7.9) ، وبما أَنَّ التوزيع الاحتمالي اللاحق المرجح لعدد

العوامل يعتمد على درجة الحرية (v)، وحد الخطأ (ε_j)،ومصفوفة تحميلات العوامل (Λ)، وعلى هذا الأَساس فقد تم تحديد قيم مختلفة لـ (ψ) التي تمثل مصفوفة التباين، والتباين المشترك لحد الخطأ وقيم لـ (v) و (Λ) في توليد البيانات العشوائية لنماذج التحليل العاملي.

1.6 البيانات التجريبية لنموذج (tFA)

1- قمنا بتوليد عينة عشوائية ذات حجم (n) من $t_{10}(0,v,\psi)$ فقد افترضنا قيمتين لـ (v) هي $(v=10,8)$، وافترضنا ثلاثة أَشكال للمصفوفة (ψ) وهي على الآتي:

$$\psi = 0.5I_{10} \qquad ; \qquad \psi = 0.9I_{10}$$
$$\psi = Diag(0.9\,,0.9\,,0.9\,,\ 0.9\,,0.9,0.75,0.75\,,0.75\,,0.75\,,0.75)$$

لذلك سوف نحصل على ست عينات لحد الخطأ بحجم $(n=50)$، وست عينات بحجم $(n=100)$.

2-نفترض أَنَّ عدد العوامل العامة الداخلة في الانموذج هو خمسة عوامل عامة، لذلك سوف نولد عينتين تجريبيتين بحجم $(100,50)$ من $t_5(0,8,I_5)$، وعينتين من $t_5(0,10,I_5)$ بحجم $(n=50,100)$.

3-نفترض بأن (Λ) تأخذ الاشكال الثلاثة الآتية:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

الشكل الثاني (Λ_2)نغير كل قيمة (0.5) في المصفوفة المذكورة في أَعلاه بـ (0.7)والشكل الثالث (Λ_3) نغير (0.5) بـ (0.9).

4-متجه المتوسط (μ) نفترضه بالشكل الآتي:

$$\mu' = [0.301 \quad 0.379 \quad 0.479 \quad 0.501 \quad 0.793 \quad 0.852 \quad 0.898 \quad 0.951 \quad 0.987 \quad 1.032]$$

وبتعويض مكونات أُنموذج tFA بعد ضرب متجه المتوسط $\left(\underset{p\times 1}{\mu}\right)$ ضرباً تقاطعياً (Kronecker Product) مع متجه الواحدات $\left(\underset{1\times n}{1}\right)$ نحصل على مصفوفة من المتوسطات $(1\otimes\mu)_{p\times n}$، عندئذ نحصل على مصفوفة البيانات X بالأحجام n=50 و n=100 ولجميع الحالات المذكورة في أَعلاه.

لتحديد مصفوفة معلمة الموقع (Λ_0) للتوزيع السابق لمصفوفة تحميلات العوامل العامة (Λ) تم تقسيم العينة التجريبية الى جزأين متساويين ، نستخدم الجزء الأَول منهما لتحديد (Λ_0)ذات سعة $(p\times q)$، وقد تم تحليل بيانات العينة الأُولى بإحدى طرائق التحليل العاملي، إذ استخدمنا طريقة المركبات الرئيسة، ومثلت (Λ_0) مصفوفة التحميلات للعوامل العامة التي تم تدويرها بطريقة (Varimax)، والمعلمة الثانية للتوزيع السابق لـ (Λ) هي المصفوفة (H) انظر المعادلة (7) فقد افترضنا بأن $(H = 10I_q)$،وفيما يتعلق بالتوزيع السابق لـ (ψ)، والمعرف في المعادلة (8) فإننا نعرف درجة الحرية (m=4) و $(B = 0.2I_q)$

2.6 التوزيع اللاحق لعدد العوامل العامة، وتقدير معلمات أُنموذج (tFA).

استخدم الجزء الثاني من العينة التجريبية في حساب معيار الاحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة وفي تقدير معلمات أُنموذج (tFA) ، وقد استخدمت المعادلة (13) عندما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي، وبعد أَخذ اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق ، تم اختيار عدد العوامل العامة الأَمثل الذي سوف يدخل في التحليل، الذي يقابل أَكبر لوغاريتم طبيعي للاحتمال اللاحق في كل عينة أنظر الجدول (1).

الجدول (1): يوضح اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد العوامل (Q)

لأنموذج (tFA) عندما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي

مجموعة البيانات	عدد العوامل (Q)			
	2	3	4	5
1	−118.358	−99.513*	−103.473	−111.972
2	−113.569	−109.641	−105.301*	−112.529
3	−105.093	−95.4450	−83.920*	−104.723
4	−130.701	−127.934	−123.001	−122.995*
5	−127.995	−112.203	−126.081	−107.123*
6	−113.562	−110.333	−102.235	−96.650*
7	−139.564	−113.740*	−130.881	−126.133
8	−136.221	−121.007*	−129.469	−132.384
9	−122.250	−120.187	−118.975*	−121.022
10	−156.481	−151.432	−121.507*	−127.649
11	−151.191	−148.126	−150.221	−141.019*
12	−139.322	−130.011	−124.162	−102.026*

:تمثل اعلى قيمة للوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق (المرجح) لعدد العوامل (Q)*

بعد تحديد عدد العوامل المناسب لأنموذج التحليل العاملي ، تم ايجاد مقدرات بيز لمعلمات الأُنموذج (ΛF و μ و ψ) من خلال استخدام المعادلات (30) و (35) و (37) و (39) على الترتيب (انظر (احمد ، 2011)).

من خلال ملاحظة مقدرات (بيز) للمصفوفة (Λ)، وكميات الشيوع ولجميع الحالات المذكورة في أَعلاه يتبين أَنَّ قيم كميات شيوع المتغير قد ارتفعت بزيادة قيم عناصر كل من مصفوفة تحميلات العوامل العامة ودرجة الحرية v المستخدمة في توليد مصفوفة البيانات، وثبوت تأثير كل من n و ψ ، أَي إنَّ قيم كميات الشيوع لمقدر (بيز) للمصفوفة (Λ) تتناسب تناسباً طردياً مع قيم مصفوفة تحميلات العوامل العامة $(\Lambda_1$ و Λ_2 و $\Lambda_3)$ ودرجة الحرية $(v=8,10)$. ويمكن ملاحظة أَنَّ قيم التشبعات (التحميلات) المعنوية للعوامل في مصفوفة (Λ) المقدرة بأسلوب (بيز) بدرجة حرية $(v=10)$، ولجميع

العينات أكبر من قيم تشبعات العوامل العامة المعنوية لمقدر بيز للمصفوفة (Λ) عندما $(v=8)$ بالطريقة نفسها تم تقدير عدد العوامل العامة لانموذج (tFA) العشوائي، واستخدمت المعادلة (20) في حساب الاحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة المهمة. والجدول (2) المذكور في ادناه يبين اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد العوامل المستخلصة عندما $(Q=2,3,4,5)$ ولجميع العينات.

الجدول (2): يوضح اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد العوامل (Q)

لأنموذج (tFA) عندما يكون (f_j) متغيراً عشوائياً

مجموعة البيانات	عدد العوامل (Q)			
	2	3	4	5
1	−240.516	−168.210*	−221.305	−198.508
2	−221.289	−170.272*	−188.872	−176.013
3	−213.409	−193.615	−190.212*	−191.044
4	−268.599	−266.391	−210.604*	−237.139
5	−256.447	−250.044	−200.039*	−244.022
6	−220.328	−218.456	−210.076	−207.191*
7	−227.508	−244.072*	−268.222	−260.681
8	−261.403	−256.259	−250.726*	−251.671
9	−229.114	−193.044	−187.409*	−211.184
10	−278.153	−230.227	−227.001*	−256.974
11	−273.102	−226.216	−260.624	−213.238*
12	−250.588	−233.130	−246.681	−227.877*

- :تمثل أعلى قيمة للوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق (المرجح) لعدد العوامل (Q).

بعد تحديد عدد العوامل المناسب، يمكننا حساب مقدرات (بيز) $(\mu\ و\ \psi)$ باستخدام المعادلات (49) و (51) على الترتيب ، أما مقدرات (بيز) لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) فنستخدم المعادلة (44) (انظر (احمد ، 2011)).

الاستنتاجات Conclusions

تم التوصل من هذه الدراسة الى مجموعة من الاستنتاجات يمكن اجمالها بما يأتي:

1. إنَّ التوزيع الاحتمالي اللاحق لمصفوفة العوامل (F)، ومتجه المتوسط (μ) ينتمي إلى التوزيعات الاحتمالية الشائعة، وهو توزيع (Matrix t−Distribution) و (Multivariate Normal Distribution) و (Beta)، ومصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء (ψ) يكون من التوزيعات الاحتمالية غير الشائعة.
2. يتكون مقدر (بيز) لمصفوفة تحميلات العوامل في أُنموذج tFA حينما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي والعشوائي متكون من جزأين، الاول : يعتمد على مصفوفة معلمة الموقع للتوزيع السابق لمصفوفة التحميلات مضافاً إليه حداً اخر يمكن وصفه خطأ تنبؤيا في حالة (f_j) MNFA يكون عشوائياً رشح الخطأ بمصفوفة ربحية الترشيح (Filter Gain)، ويسمى أَيضاً بمصفوفة مرشحات كالمن (Kalman Filter).
3. تبين من خلال الجانب التجريبي، أَنَّ عدد العوامل العامة المعنوية المختارة لنماذج التحليل العاملي حينما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي، وعاملاً عشوائيا يتأثر بحجم العينة، إذ يزداد عدد العوامل العامة المعنوية بزيادة حجم العينة.

التوصيات Recommendations

1. إجراء مقارنة بين النتائج المستحصل عليها لمعرفة مدى كفاءات مقدرات tFA، وذلك بعد معالجة الشواذ في البيانات المتعددة المتغيرات ، ثم إجراء التحليل العاملي على البيانات المعالجة باستخدام NFA وتحليل البيانات قبل المعالجة بانموذجي tFA و MNFA .
2. استخدام معاينة جبس (Gibbs Sampling) او إحدى طرائق التكامل العددي؛ لإيجاد مقدرات (بيز) التقريبية لمعلمات أُنموذج التحليل العاملي حينما يكون التوزيع الاحتمالي اللاحق لمعلمات التوزيع ليس من التوزيعات الاحتمالية الشائعة.

3. ايجاد مقدرات (بيز) لمعلمات انموذج التحليل العاملي باستخدام خوارزمية تعظيم التوقع الشرطي ومشتقاتها (Expectation Conditional Maximization) .
4. تطبيق النتائج النظرية على بيانات حقيقية وبالأخص فيما يتعلق بالتلوث البيئي.

المصادر References

1.احمد ، احمد سامي (2011):"**تحليل بيز لمعلمات نموذج التحليل العاملي بوجود القيم الشاذة مع المحاكاة**"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، قسم الاحصاء والمعلوماتية، جامعة الموصل.

2. الخياط ، باسل يونس ذنون (2010):"**مدخل الى المحاكاة التصادفية الحاسوبية ونمذجتها باستخدام Matlab**" دار ابن الاثير للطباعة والنشر ، جامعة الموصل.

3. اللهيبي ، معتز صلاح غانم (2010):"**تقدير الامكان الاعظم واسلوب بيز في تطبيق اختبار T^2 في عينة من الاطفال حديثي الولادة**"، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، قسم الاحصاء والمعلوماتية ، جامعة الموصل.

4. Box ,G.E. and Tiao , G.C.(1973):"**Bayesian Inference In Statistical Analysis**". Addison – Wesely Publishing Company ,London .U.K.

5. Green, R.F. (1976):"**Outlier-Prone and Outlier-Resistant Distribution**", Journal of the American Statistical Association, 71,502-505.

6. Li,Jia. Liu, Chuanhai and Zhang , Jianchun (2007):"**Robust Factor Analysis Using The Multivariate t-Distribution"**, Technical Report # 07-11, Department of Statistics , Purdue University.

7. Loehlin , Johnc (2004):"**Latent Variable Models**"4th Lawrence Erlbaum Associates , Publishers.

8. Petersen and Pedersen ,(2008):"**The Matrix cook**",((book)http://www2.imm.dtu.d;/pubdb/view/edoc_download.php/3274/pdf/imm3274.pdf).

16. Press ,S.James and Shigemasu, K.(1999):"**A note on Choosing the Number of Factors**",Comm. Statistics-Theory and Methode,28(7),1653-1670.

9. Press, S.James (2003):"**Subjective and Objective Bayesian Statistics**"2th .John Wiley and Sins, New Jersey ,U.S.A.

10. Tenko, RayKov and Marcoulides, George .A. (2008):"**An Introduction To Applied Multivariate Analysis**". Routledge Taaylor and Francis Group, New York and London.