المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (28) 2019
ص ص [1-28]

تقدير معلمتي توزيع لوماكس باستخدام القيم المسجلة العليا تحت دالتي خسارة متزنة

ايناس غانم عبد القادر * د. ريا سالم محمد **
Azzam.nnll@yahoo.com rayasalim73@gmail.com

المستخلص

تم في هذا البحث تقدير معلمتي توزيع لوماكس، بالإضافة إلى تقدير دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي خسارة متزنة، وهما دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتزنة، إذ تعتمد هاتان الدالتان على مقدرات بيزية و مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمتي التوزيع . فقد استخدم نوع واحد من الإحصاءات المرتبة المعممة، وهي القيم المسجلة العليا وتمت المقارنة بين مقدرات معلمة الشكل (θ) باستخدام مخاطرة بيز اللاحقة، وذلك باستخدام برنامج بلغة Matlab لغرض توليد البيانات وحساب المقدرات . وتبين أَنَّ المقدرات تحت دالتي الخسارة المتزنة أَفضل من المقدرات تحت دالتي الخسارة الاعتيادية .

الكلمات المفتاحية : توزيع لوماكس ، معدل الفشل، الخسارة المتزنة، الخسارة الاعتيادية

Estimating Two Parameters of Lomax Distribution by Using the Upper Recorded Values under Two Balanced Loss Functions

Abstract

In this paper, two lomax distribution parameters are estimated along with the estimation of the reliability function under two balanced loss functions: the balanced squared error function and balanced linex loss function. These two functions depend on both Bayesian and maximum likelihood estimators using one type of generalized order statistics, which is the upper recorded value.

The simulation approach using matlab language program is adopted in order to generate the data and compute the estimators.

The comparison between shape parameter (θ) estimation methods is done by using posterior Bayesian risk function. The findings show that the estimators under two balanced loss functions are more efficient than the estimators under the two ordinary loss functions .

* طالبة ماجستير / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل
** استاذ مساعد / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2018/9/23 ——— تأريخ القبول 2018 /10/17

1 . المقدمة

إن مفهوم الإحصاءات المرتبة المعممة التي قدمها العالم الألماني Udo Kamps عام 1995وجد اهتماماً كبيراً في السنوات الأخيرةً، لكونه أُنموذجاً موحداً يحتوي على عدة نماذج من المتغيرات العشوائية المرتبة التي تنتج من التجارب العملية المختلفة، التي من أَشهرها واكثرها استخداماً: الإحصاءات المرتبة العادية، والقيم المسجلة بنوعيها العليا والدنيا ، والقيم المسجلة من الرتبة K بنوعيها العليا والدنيا ، والعينات المراقبة بأنواعها ، والإحصاءات المرتبة التتابعية، وقيم بفيفر المسجلة . تم في هذا البحث تقدير معلمتي توزيع لوماكس الذي يستخدم في مجال الطب الحياتي ونماذج الحياة ودراسات الدخل ونظرية المعولية . يمكن أَن يعرف بواسطة معلمة القياس(Scaleparameter)، ولتكن (β) ومعلمة الشكل (Shape parameter) ولتكن (θ) انظر (Moghadam et al ,2012)

2. الإحصاءات المرتبة المعممة

تسمى المتغيرات العشوائية $U(j, n, \tilde{m}, k)$ إذ j=1,2,…,n بالإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة بالصيغة الآتية :

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\dots,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1, \dots, u_n) = C_{n-1} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1-u_i)^{m_i} \right] (1-u_n)^{k-1}$$

إذ إن

$$n \in N , n \geq 2 , k \geq 1$$

$$\tilde{m} = (m_1 , \dots , m_{n-1}) \in R^{n-1}$$

$$0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq 1$$

$$C_{n-1} = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i = k \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i$$

$$\gamma_i = k + n - j + \sum_{i=j}^{n-1} m_i > 0$$

لجميع قيم $j \in \{1,2, \dots , n-1\}$.

يمكن الحصول على الدالة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة لعدد n من المتغيرات العشوائية $X(j, n, \tilde{m}, k)$، إذ $j \in \{1,2, \dots , n\}$ التي تتبع أي توزيع احتمالي بدالة كثافته الاحتمالية هي f (x)، ودالة توزيعه التراكمية هي F (x) وتأخذ الصيغة الآتية : انظر kamps (1995a)

$$f^{x(1,n,\tilde{m},k),\dots,x(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,\dots,x_n) = C_{n-1}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-F(x_i)\right)^{m_i} f(x_i)\right]\left[\left(1-F(x_n)\right)^{k-1} f(x_n)\right] \quad \dots(1)$$

إذ ان $F^{-1}(0) < x_1 \le \cdots \le x_n < F^{-1}(1)$

يحتوي أُنموذج الإحصاءات المرتبة المعممة على العديد من نماذج المتغيرات العشوائية المرتبة ، وباختيار مناسب للمعلمات $(\tilde{m},k)$ نحصل على تلك النماذج كحالات خاصة .

3. القيم المسجلة العليا

إذا كانت $x_1, x_2, \dots\dots$ سلسلة لانهائية من متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع، وكانت f(x) و F(x) هما دالة كثافة الاحتمال، ودالة التوزيع التراكمية على التوالي للمتغير العشوائي x ، فإن المشاهدة x_j قيمة مسجلة عليا إذا كانت قيمتها أكبر من كل المشاهدات الأَولية ، أي إن $x_j > x_{j-1}$ حيث $j > 1$.

بفرض أن $x_{U_{(1)}}, x_{U_{(2)}}, \dots, x_{U_{(n)}}$ هي أَول n قيمة مسجلة عليا من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية هي f (x) ودالة توزيعه التراكمية F (x) يمكن الحصول على القيم المسجلة العليا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة، وذلك بوضع $m_i = m = -1$ لجميع قيم i=1,2,…,n−1 و k=1 و $\gamma_i = 1$ في المعادلة (1) فنحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لجميع قيم $x_{U_{(1)}}, x_{U_{(2)}}, \dots, x_{U_{(n)}}$ بالشكل الآتي : انظر (Chandler ,1952)

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \left[\prod_{i=1}^{n-1}\left(\bar{F}(x_i)\right)^{-1} f(x_i)\right]\left[\bar{F}(x_n)\right]^0 f(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)}\, f(x_n)$$

$$= f(x_n)\prod_{i=1}^{n-1} h(x_i) \quad \dots(2)$$

إذ إن $-\infty < x_1 < \cdots < x_n < \infty$

$$h(x) = \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)}$$

$$\bar{F}(x_i) = 1 - F(x_i) \quad \dots(3)$$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات المختلفة التي سبق الحصول عليها لمعلمتي التوزيع ولدالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع لوماكس اعتماداً على القيم المسجلة العليا .

انظر (Soliman, Abd Ellah and Sultan ,2006)

4. مقاييس المعولية

1.4 دالة المعولية

التي تسمى أحياناً بدالة احتمال البقاء، وتعرف على أنها القيمة الاحتمالية، لأن يبقى العنصر أو النظام يعمل بدون أعطال حتى الزمن t ويرمز لها بالرمز R(t)

$$R(t) = \Pr[T > t] = \int_t^{\infty} f(v)dv = 1 - F(t) \qquad , t > 0 \qquad \dots (4)$$

إذ T هو عمر العنصر ، $f(t)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي T ، $F(t)$ هي دالة التوزيع التراكمية . انظر (خالدة الحمداني , 2002)

2.4 دالة معدل الفشل

تسمى دالة معدل الفشل أحيانا بدالة معدل التعطل، التي لها دور مهم في وصف فشل أو تعطل الوحدة أو النظام تحت الاختبار ويرمز لها بالرمز h(t) وتعرف على الآتي :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad , t > 0 \qquad \dots (5)$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

5. دوال الخسارة

سوف نتناول دالتي خسارة إحدهما متماثلة وهي دالة خسارة مربع الخطأ، والاخرى غير متماثلة وهي دالة الخسارة الخطية الاسية وعلى الآتي : انظر (Basu and Ebrahimi ,1991)

1.5 دالة خسارة مربع الخطأ

وهي من أشهر أشكال دوال الخسارة المتماثلة فعند تقدير المعلمة θ بالمقدر $\hat{\theta}_{sq}$ فإن دالة خسارة مربع الخطأ تكون بالصيغة الآتية :

$$L\left(\hat{\theta}_{sq}, \theta\right) = k\left(\hat{\theta}_{sq} - \theta\right)^2 \qquad \dots (6)$$

إذ إن k هو ثابت حقيقي موجب غالباً يؤخذ مساوياً للواحد, ومخاطرة بيز أو القيمة المتوقعة اللاحقة لهذه الدالة:

$$\text{Risk}\left(\hat{\theta}_{sq}\right) = E\left[\left(L(\hat{\theta}_{sq}, \theta)\middle|\underline{x}\right)\right] = E\left((\hat{\theta}_{sq} - \theta)^2\middle|\underline{x}\right) \qquad \dots (7)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (6) نسبةً إلى $\hat{\theta}$ وبمساواة المشتقة بالصفر نحصل على مقدر بيز للمعلمة θ اعتماداً على دالة خسارة مربع الخطأ هو قيمة $\hat{\theta}_{sq}$ التي تجعل مخاطرة بيز في المعادلة (7) أقل ما يمكن :

$$\frac{\partial E_{\theta}\left(L\left(\hat{\theta}_{sq}, \theta\right)\right)}{\partial \hat{\theta}_{sq}} = 2\left[\hat{\theta}_{sq} - E\left(\theta\middle|\underline{x}\right)\right]$$

ايجاد المشتقة الثانية، لأثبات أنها نهاية صغرى محلية

$$\frac{\partial\left(L(\hat{\theta}_{sq},\theta)\right)}{\partial\hat{\theta}_{sq}{}^{2}} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial E_{\theta}\left(L(\hat{\theta}_{sq},\theta)\right)}{\partial\hat{\theta}_{sq}} = 0$$

$$\hat{\theta}_{sq} = E(\theta\,|\underline{x}) \qquad \dots(8)$$

أي إن مقدر بيز للمعلمة (θ) اعتماداً على دالة خسارة مربع الخطأ هو " القيمة المتوقعة لهذه المعلمة بالنسبة للتوزيع اللاحق لها"

2.5 دالة الخسارة الخطية الأسية (Linex)

وهي من أَشهر دوال الخسارة غير المتماثلة، فعند تقدير المعلمة θ بالمقدر $\hat{\theta}_L$ فإن دالة الخسارة الخطية الاسية Linex تكون بالصيغة الآتية:

$$L(\hat{\theta}_L,\theta) = a\left(e^{c(\hat{\theta}_L-\theta)} - c(\hat{\theta}_L-\theta) - 1\right) \qquad \dots(9)$$

إذ إن $a > 0$ هي معلمة القياس لدالة الخسارة و $c \neq 0$ هي معلمة الشكل ، و مخاطرة بيز اللاحقة لهذه الدالة على الآتي: انظر (Ahmadi, et al. , 2005)

$$\begin{aligned}\text{Risk}(\hat{\theta}_L) &= E\left[\left(\left(L(\hat{\theta}_L,\theta)\right)\middle|\underline{x}\right)\right]\\ &= ae^{c\hat{\theta}_L}E(e^{-c\theta}|\underline{x}) - c\left(\hat{\theta}_L - E(\theta|\underline{x})\right) - 1\end{aligned} \qquad \dots(10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{\theta}\left(L(\hat{\theta}_L,\theta)\right)}{\partial\hat{\theta}_L} &= a\left(ce^{c(\hat{\theta}_L)}E_{\theta}(e^{-c\theta}|\,\underline{x}) - c\right)\\ &= ac\left[e^{c\hat{\theta}_L}\,E_{\theta}(e^{-c\theta}|\,\underline{x}) - 1\right]\end{aligned}$$

ايجاد المشتقة الثانية لأثبات انها نهاية صغرى محلية

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(L(\hat{\theta}_L,\theta)\right)}{\partial\hat{\theta}_L{}^{2}} &= ac\left[c\,e^{c\hat{\theta}_L}\,e^{-c\theta}\right]\\ &= ac^2\left[\,e^{c\hat{\theta}_L}\,e^{-c\theta}\right] > 0\end{aligned}$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (10) نسبةً إلى $\hat{\theta}_L$ وبمساواة المشتقة بالصفر، وإجراء بعض التبسيطات، وأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين لنحصل على مقدر بيز تحت هذه الدالة.

$$\hat{\theta}_L = -\frac{1}{c}\ln\left[E_{\theta}(e^{-c\theta}\,|\,\underline{x})\right] \qquad \dots(11)$$

6. دوال الخسارة المتزنة

يمكن كتابة دالة الخسارة المتزنة بالصيغة الآتية:

$$L^{q}_{\rho,\omega,\zeta}(\gamma(\theta),\delta) = wq(\theta)\rho(\zeta,\delta) + (1-w)q(\theta)\rho(\gamma(\theta),\delta) \qquad \dots(12)$$

إذ δ هو تقدير المعلمة $\gamma(\theta)$ ، ζ هو تقدير للمعلمة $\gamma(\theta)$ بإحدى طرائق التقدير (وفي هذا البحث سوف نستخدم مقدر الإمكان الأعظم) , $w \in [0,1)$ ، $\rho(\gamma(\theta),\delta)$ هي دالة خسارة اختيارية لتقدير $\gamma(\theta)$ بالمقدر δ و $q(.)$ دالة وزن موجبة ومناسبة ، انظر(Zellner ,1994) وفي هذا البحث تم استخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة، ودالة الخسارة الخطية الأسية المتزنة ويمكن توضيح كل منهما بما يأتي :

1.6 دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة

نحصل على مقدر المعلمة θ تحت دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة BSEL باختيار :

$\delta = \hat{\theta}_{Bsq}$ و $\zeta = \hat{\theta}_{ML}$ و $\gamma(\theta) = \theta$ و $\rho(\gamma(\theta),\delta) = (\hat{\theta}_{Bsq} - \theta)^2$ و $q(\theta) = 1$

في المعادلة (12) كما يلي :

$$L_{Bsq}(\theta,\hat{\theta}_{Bsq}) = w(\hat{\theta}_{Bsq} - \hat{\theta}_{ML})^2 + (1-w)(\hat{\theta}_{Bsq} - \theta)^2 \qquad \dots(13)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (13) بالنسبة لـ $\hat{\theta}_{Bsq}$ ثم بمساواة المشتقة بالصفر، نحصل على مقدر بيز للمعلمة θ باستخدام دالة الخسارة $L_{Bsq}(\theta,\hat{\theta}_{Bsq})$ بما يأتي :

$$\frac{\partial EL_{Bsq}(\theta,\hat{\theta}_{Bsq})}{\partial\hat{\theta}_{Bsq}} = 2w(\hat{\theta}_{Bsq} - \hat{\theta}_{ML}) + 2(1-w)E(\hat{\theta}_{Bsq} - \theta)$$

ولإثبات انها نهاية صغرى محلية نوجد المشتقة الثانية :

$$\frac{\partial(\theta,\hat{\theta}_{Bsq})}{\partial\hat{\theta}_{Bsq}{}^2} = 2w + 2(1-w)$$
$$= 2 > 0$$

وعليه يمكن ايجاد مقدر المعلمة تحت دالة خسارة مربع الخطأ

$$\frac{\partial EL_{Bsq}(\theta,\hat{\theta}_{Bsq})}{\partial\hat{\theta}_{Bsq}} = 0$$

$$w(\hat{\theta}_{Bsq} - \hat{\theta}_{ML}) + (1-w)E(\hat{\theta}_{Bsq} - \theta) = 0$$

$$\hat{\theta}_{Bsq} = w\hat{\theta}_{ML} + (1-w)E[(\theta|\underline{x})] \qquad \dots(14)$$

مع ملاحظة أنه بوضع $w = 0$ تؤول هذه الدالة إلى دالة خسارة مربع الخطأ الذي سبق وصفه بالمعادلة (8) .

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد مقدر دالة المعولية تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة نفرض أنَّ:

$\delta = \hat{R}(t)_{Bsq}$ و $\zeta = R(t)_{ML}$ و $\gamma(\theta) = R(t)$ و $\rho(\gamma(R),\delta) = (\hat{R}(t)_{Bsq} - R(t))^2$ و $q(R(t)) = 1$ في المعادلة (12) بما يأتي :

$$L_{Bsq}(R(t),\hat{R}(t)_{Bsq}) = w(\hat{R}(t)_{Bsq} - \hat{R}_{ML})^2 + (1-w)(\hat{R}(t)_{Bsq} - R(t))^2 \qquad \dots(15)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (15) بالنسبة لـ $\widehat{R}(t)_{Bsq}$ بمساواة المشتقة بالصفر، وإجراء بعض التبسيطات نحصل على مقدر بيز لـ $R(t)$ باستخدام دالة الخسارة $L_{Bsq}\left(R(t),\widehat{R}(t)_{Bsq}\right)$ بما يأتي :

$$\widehat{R}(t)_{Bsq} = wR(t)_{ML} + (1-w)E\left[\left(R(t)\middle|\underline{x}\right)\right] \quad \dots (16)$$

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد مقدر دالة معدل الفشل تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة نفرض أنَّ : $\delta = \hat{h}(t)_{Bsq}$ و $\zeta = \hat{h}(t)_{ML}$ و $\gamma(\theta) = h(t)$ و

$\rho(\gamma(h(t)\,),\delta) = (\hat{h}(t)_{Bsq} - h(t)\,)^2$ و $q(h(t)) = 1$ في المعادلة (12) كما يلي:

$$L_{Bsq}\left(h(t)\,,\hat{h}(t)_{Bsq}\right) = w\left(\hat{h}(t)_{Bsq} - \hat{h}(t)_{ML}\right)^2 + (1-w)\left(\hat{h}(t)_{Bsq} - h(t)\,\right)^2 \quad \dots (17)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (17) بالنسبة لـ $\hat{h}(t)_{Bsq}$ بمساواة المشتقة بالصفر، واجراء بعض التبسيطات نحصل على مقدر بيز لـ $h(t)$ باستخدام دالة الخسارة $L_{Bsq}\left(h(t)\,,\hat{h}(t)_{Bsq}\right)$ بما يأتي :

$$\hat{h}(t)_{Bsq} = w\hat{h}(t)_{ML} + (1-w)E\left[\left(h(t)\,\middle|\underline{x}\right)\right] \quad \dots (18)$$

2.6 دالة الخسارة الخطية الأسية المتزنة

نحصل على دالة الخسارة الخطية الأسية المتزنة بمعلمة الشكل c حيث $(\mathbf{c \neq 0})$ باختيار $\delta = \hat{\theta}_{BL}$ و $\zeta = \hat{\theta}_{ML}$ و $\gamma(\theta) = \theta$ و

$\rho(\gamma(\theta),\delta) = e^{c(\hat{\theta}_{BL}-\theta)} - c\left(\hat{\theta}_{BL} - \theta\right) - 1$ و $q(\theta) = 1$ في المعادلة (12)

$$L_{BL}\left(\theta,\hat{\theta}_{BL}\right) = w\left[e^{c(\hat{\theta}_{BL}-\hat{\theta}_{ML})} - c\left(\hat{\theta}_{BL} - \hat{\theta}_{ML}\right) - 1\,\right] + (1-w)\left[e^{c(\hat{\theta}_{BL}-\theta)} - c\left(\hat{\theta}_{BL} - \theta\right) - 1\,\right] \quad \dots (19)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (19) بالنسبة لـ $\hat{\theta}_{BL}$ بمساواة المشتقة بالصفر :

$$\frac{\partial EL_{BL}\left(\theta,\hat{\theta}_{BL}\right)}{\partial\hat{\theta}_{BL}} = w\left[e^{c\hat{\theta}_{BL}}e^{-c\hat{\theta}_{ML}} - 1\right] + (1-w)E[e^{c\hat{\theta}_{BL}}e^{-c\theta} - 1]$$

ولإثبات أنها نهاية صغرى محلية نوجد المشتقة الثانية :

$$\frac{\partial L_{BL}\left(\theta,\hat{\theta}_{BL}\right)}{\partial\hat{\theta}_{BL}^{\;2}} = c^2w\left[c\,e^{\hat{\theta}_{BL}}\,e^{-c\hat{\theta}_{ML}}\right] + c^2(1-w)\left[c\,e^{c\hat{\theta}_{BL}}e^{-c\theta}\right] > 0$$

لذا فإن مقدر بيز لـ θ بالاعتماد على دالة خسارة $L_{BL}\left(\theta,\hat{\theta}_{L}\right)$ بما يأتي :

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c}\ln\left[\,we^{-c\hat{\theta}_{ML}} + (1-w)E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)\right] \quad \dots (20)$$

مع ملاحظة أنه بوضع $w = 0$ يؤول هذا المقدر إلى المقدر تحت دالة الخسارة الخطية الآسية الذي سبق وصفه بالمعادلة (11) . انظر (Ahmadi et al. , 2009)

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد مقدر دالة المعولية تحت دالة خسارة Linex المتزنة نفرض أَنَّ

$\delta = \widehat{R}(t)_{L}$ و $\zeta = \widehat{R}(t)_{ML}$ و $\gamma(R(t)) = R(t)$ و

$\rho(\gamma(\theta), \delta) = e^{c(\widehat{R}(t)_{BL} - R(t))} - c(\widehat{R}(t)_{BL} - R(t)) - 1$ و $q(R(t)) = 1$ في المعادلة (12) :

$$L_{BL}(R(t), \widehat{R}(t)_{BL}) = w[e^{c(\widehat{R}(t)_{BL} - \widehat{R}(t)_{ML})} - c(\widehat{R}(t)_{BL} - \widehat{R}(t)_{ML}) - 1] + (1 - w)[e^{c(\widehat{R}(t)_{BL} - R(t))} - c(\widehat{R}(t)_{BL} - R(t)) - 1] \quad \dots (21)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (21) بالنسبة لـ $\widehat{R}(t)_{BL}$ بمساواة المشتقة بالصفر، واجراء بعض التبسيطات نحصل على مقدر بيز لـ $R(t)$ بالاعتماد على دالة خسارة $L_{BL}(R(t), \widehat{R}(t)_{BL})$ بما يأتي :

$$\widehat{R}(t)_{BL} = -\frac{1}{c} \ln[we^{-c\widehat{R}(t)_{ML}} + (1 - w)E(e^{-cR(t)}|\underline{x})] \quad \dots (22)$$

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد مقدر دالة معدل الفشل تحت دالة خسارة Linex المتزنة نفرض أَنَّ

$\delta = \hat{h}(t)_{BL}$ و $\zeta = \hat{h}(t)_{ML}$ و $\gamma(h(t)) = h(t)$ و

$\rho(\gamma(h(t)), \delta) = e^{c(\hat{h}(t)_{BL} - h(t))} - c(\hat{h}(t)_{BL} - h(t)) - 1$ و $q(h(t)) = 1$ في المعادلة (12) .

$$L_{BL}(h(t), \hat{h}(t)_{BL}) = w[e^{c(\hat{h}(t)_{BL} - \hat{h}(t)_{ML})} - c(\hat{h}(t)_{BL} - \hat{h}(t)_{ML}) - 1] + (1 - w)[e^{c(\hat{h}(t)_{BL} - h(t))} - c(\hat{h}(t)_{BL} - h(t)) - 1] \quad \dots (23)$$

وبإدخال التوقع واشتقاق المعادلة (23) بالنسبة لـ $\hat{h}(t)_{BL}$ بمساواة المشتقة بالصفر، وإجراء بعض التبسيطات، نحصل على مقدر بيز لـ $h(t)$ بالاعتماد على دالة خسارة $L_{BL}(h(t), h(t)_{BL})$ بما يأتي :

$$\hat{h}(t)_{BL} = -\frac{1}{c} \ln[we^{-c\hat{h}(t)_{ML}} + (1 - w)E(e^{-ch(t)}|\underline{x})] \quad \dots (24)$$

7. توزيع لوماكس

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس هي : انظر (Moghadam et al ,2012)

$$f(x, \theta, \beta) = \frac{\theta}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} \quad , \quad x, \theta, \beta > 0 \quad \dots (25)$$

إذ إن θ معلمة الشكل و β معلمة القياس

أَما متوسط توزيع لوماكس فيكون :

$$E(x) = \frac{\beta}{\theta - 1} \; ; \; \theta > 1$$

و التباين هو :

$$var(x) = \frac{\theta\beta}{(\theta - 1)^2 \, (\theta - 2)} \; ; \; \theta > 2$$

أما الدالة التراكمية لتوزيع لوماكس فتكون بالشكل الآتي :

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\theta} \qquad \dots (26)$$

أَما دالة المعولية (دالة البقاء) عند الزمن (t) فتعرف وفق الصيغة الآتية:

$$R(t) = P(T > t) = \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{-\theta} \qquad \dots (27)$$

ودالة معدل الفشل عند الزمن (t) تكون على الآتي:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\theta}{\beta}\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{-1} \qquad \dots (28)$$

8. تقدير معلمتي توزيع لوماكس بالاعتماد على القيم المسجلة العليا:

يمكن الحصول على القيم المسجلة العليا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة، وذلك بوضع $m_i = m = -1$ لجميع قيم $i=1,2,\dots,n-1$ و $k=1$ و $\gamma_i = 1$ ومنها نحصل على $C_{n-1} = 1$ في المعادلة (1)، فنحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لجميع قيم $x_{U_{(1)}}, x_{U_{(2)}}, \dots, x_{U_{(n)}}$ بالشكل الآتي: انظر (Ateya , 2012)

$$f\left(x_{U_{(1)}}, x_{U_{(2)}}, \dots, x_{U_{(n)}}\right) = f(x_n)\prod_{i=1}^{n-1} h(x_i) \qquad \dots (29)$$

حيث أن $-\infty < x_{U_{(1)}} < \cdots < x_{U_{(n)}} < \infty$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات المختلفة التي سبق الحصول عليها لمعلمتي التوزيع ولدالتي المعولية، ومعدل الفشل لتوزيع لوماكس اعتماداً على القيم المسجلة العليا .

1.8 مقدر الامكان الاعظم

بتوفير n من مشاهدات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع لوماكس , تكون دالة الإمكان على الآتي :

$$L(\theta, \beta | \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n-1} h(x_i) f(x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\overline{F}(x_i)} f(x_n)$$

إذ إن x تمثل قيمة مشاهدات العينة $x_1, x_2, \dots, x_n$

إذ ان $\overline{F}(x_i) = 1 - F(x_i)$

وبالتعويض عن $f(x_i)$ و $f(x_n)$ و $F(x_i)$ في المعادلات (25) و (26) على التوالي

$$= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\theta}{\beta}\right) \frac{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-(1+\theta)}}{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-\theta}}\right] \left(\frac{\theta}{\beta}\right) \left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)^{-(1+\theta)}$$

$$L(\theta, \beta|\underline{x}) = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-1} \left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)^{-\theta} \qquad \dots (30)$$

بإمكاننا كتابة المعادلة (30) بصورة مختصرة بما يأتي :

$$L(\theta, \beta|\underline{x}) = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^n e^{\ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)^{-\theta}} e^{\ln \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^n e^{-\theta \ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)} e^{-\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)}$$

$$L(\theta, \beta|\underline{x}) = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^n e^{-\theta u - v} \qquad \dots (31)$$

إذ أن

$$u = \ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right) \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right) \qquad \dots (32)$$

نحصل على مقدر الإمكان الأعظم بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (31) وبإجراء التفاضل الجزئي بالنسبة لـ θ ثم بالنسبة لـ β وبعد مساواة المشتقتين بالصفر نحل المعادلتين أنياً للحصول على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمتين $\hat{\theta}_{MLr}, \hat{\beta}_{MLr}$.

$$\ln L(\theta, \beta|\underline{x}) = n \ln \theta - n \ln \beta - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right) - \theta \ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \beta|\underline{x})}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)$$

$$\hat{\theta}_{MLr} = \frac{n}{\ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)} \qquad \dots (33)$$

ويمكن ايجاد قيمة $\hat{\beta}_{MLr}$ عددياً حسب المعادلة الآتية :

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \beta|\underline{x})}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{-x_i \beta^{-2}}{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)} + \theta \frac{x_n \beta^{-2}}{\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}$$

$$\beta_{MLr}=\frac{\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)}+\frac{\theta}{\beta^2}\frac{x_n}{\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}}{n} \qquad \dots(34)$$

ومقدر الإمكان الأعظم لدالتي المعولية R(t) ومعدل الفشل h(t)، إذ t>0 بالاعتماد على القيم المسجلة العليا :

$$\hat{R}(t)_{MLr}=\left(1+\frac{t}{\hat{\beta}_{MLr}}\right)^{-\hat{\theta}_{MLr}} \qquad \dots(35)$$

$$\hat{h}(t)_{MLr}=\frac{\hat{\theta}_{MLr}}{\hat{\beta}_{MLr}}\left(1+\frac{t}{\hat{\beta}_{MLr}}\right)^{-1} \qquad \dots(36)$$

2.8 التقدير بأسلوب بيز :

سوف يتم استخدام أُسلوب بيز، حينما يكون لدينا توزيع اولي ذو المعلومات للحالات الآتية :

اولا : في حالة أن معلمة القياس β معلومة

نفرض أَنَّ التوزيع الاولي المرافق للمعلمة θ يتبع توزيع Gamma (a,b)

$$f(\theta)=\frac{b^a}{\Gamma a}\,\theta^{a-1}\,e^{-b\theta} \qquad \dots(37)$$

وبما أن دالة الامكان لتوزيع لوماكس تكون وفق الصيغة الآتية:

$$L(\theta|\underline{x},\beta)\propto\ \theta^n\,e^{-\theta u}$$

حينئذٍ فإن التوزيع اللاحق للمعلمة θ هو على الآتي :

$$f(\theta|\underline{x},\beta)\propto\ f(\theta)L(\theta|\underline{x},\beta)$$
$$=\theta^{a+n-1}\,e^{-\theta(b+u)}$$

إذن التوزيع اللاحق للمعلمة θ يتبع توزيع Gamma (a+n,b+u)

ويمكن كتابة التوزيع اللاحق للمعلمة θ بالصيغة النهائية على الآتي :

$$f(\theta|\underline{x},\beta)=\frac{(b+u)^{a+n}}{\Gamma a+n}\,\theta^{a+n-1}\,e^{-\theta(b+u)} \quad ,\quad \theta>0 \quad a,b>0 \qquad \dots(38)$$

1.2.8 التقدير بالاعتماد على دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة :

مقدر بيز للدالة $\lambda\equiv\lambda(.)$ اعتماداً على دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة المعطاة بالمعادلة (14) يمكن أن تكتب بالصيغة الآتية :

$$\hat{\lambda}_{Bsq}=w\,\hat{\lambda}_{ML}+(1-w)E(\lambda|\underline{x}) \qquad \dots(39)$$

إذ $\hat{\lambda}_{ML}$ هو مقدر الإمكان الأَعظم للدالة λ ، لذا فإننا نحصل على مقدرات بيز لمعلمة الشكل θ ولدالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع لوماكس، اعتماداً على دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة

بوضع $\lambda(.) \equiv \theta, R(t), h(t)$ على التوالي في المعادلة (39)، ويمكن ايجاد التوقع الشرطي للمعلمة θ على الآتي:

$$E(\theta|\underline{x}) = \int_0^\infty \theta\, f(\theta|\underline{x}, \beta)\, d\theta$$

نعوض عن $f(\theta|\underline{x}, \beta)$ في المعادلة (38)

$$E(\theta|\underline{x}) = \frac{n+a}{b+u} \qquad \ldots (40)$$

إذ إنَّ u معرفة بالمعادلة (32)

بالرجوع إلى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (33) و (40) نحصل على مقدر θ تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{\theta}_{BSqr} = w\hat{\theta}_{MLr} + (1-w)E(\theta|\underline{x})$$

$$\hat{\theta}_{BSqr} = w\left[\frac{n}{\ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}\right] + (1-w)\left(\frac{n+a}{b+u}\right) \qquad \ldots (41)$$

يمكن إيجاد توقع دالة المعولية تحت دالة خسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا حيث $t > 0$ كالاتي

$$E(R(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty R(t)\, f(\theta|\underline{x}, \beta)\, d\theta$$

وبالتعويض عن $R(t)$ و $f(\theta|\underline{x}, \beta)$ في المعادلة (27) و(38) على التوالي

$$E(R(t)|\underline{x}) = \left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{b+u}\right]^{-(a+n)} \qquad \ldots (42)$$

بالرجوع الى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (35) و (42) نحصل على مقدر $R(t)$، إذ $t>0$ تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{R}(t)_{BSqr} = w\hat{R}(t)_{MLr} + (1-w)E(R(t)|\underline{x})$$

$$\hat{R}(t)_{BSqr} = w\left[\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{-\hat{\theta}_{MLr}}\right] + (1-w)\left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{b+u}\right]^{-(a+n)} \qquad \ldots (43)$$

وإنَّ توقع دالة معدل الفشل تحت دالة خسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، إذ $t>0$

$$E\left(h(t)\middle|\underline{x}\right) = \int_0^\infty h(t)\, f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right) d\theta$$

وبالتعويض عن $h(t)$ و $f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)$ في المعادلة (28) و(38) على التوالي

$$E\left(h(t)\middle|\underline{x}\right) = \frac{n+a}{(\beta+t)(b+u)} \quad \dots (44)$$

بالرجوع إلى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (36) و (44) نحصل على مقدر $h(t)$، إذ t>0 تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{h}(t)_{BSqr} = w\hat{h}(t)_{MLr} + (1-w)E\left(h(t)\middle|\underline{x}\right)$$

$$\hat{h}(t)_{BSqr} = w\left[\frac{\hat{\theta}_{MLr}}{\beta(1+\frac{t}{\beta})}\right] + (1-w)\left[\frac{n+a}{(\beta+t)(b+u)}\right] \quad \dots (45)$$

2.2.8 التقدير بالاعتماد على دالة خسارة الخطية الاسية المتزنة :

ان مقدر بيز للدالة $\lambda \equiv \lambda(.)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الاسية المتزنة المعطاة بالمعادلة (19) يمكن أن تكتب بالصيغة التالية :

$$\hat{\lambda}_{BL} = -\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{\lambda}_{ML}} + (1-w)E\left(e^{-c\lambda}\middle|\underline{x}\right)\right] \quad \dots (46)$$

لذا فإن مقدرات بيز لمعلمة الشكل θ ولدالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع لوماكس يمكن الحصول عليها اعتماداً على دالة الخسارة الخطية الآسية المتزنة بوضع $\lambda(.) \equiv \theta, R(t), h(t)$ على التوالي في المعادلة (46) ويمكن ايجاد التوقع الشرطي للمعلمة θ على الآتي :

$$E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right) = \int_0^\infty e^{-c\theta}\, f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right) d\theta$$

وبالتعويض عن $f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)$ في المعادلة (38)

$$E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right) = \left(1+\frac{c}{b+u}\right)^{-(n+a)} \quad \dots (50)$$

بالرجوع إلى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (33) و (50) نحصل على مقدر θ تحت دالة الخسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{\theta}_{BLr} = -\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{\theta}_{MLr}} + (1-w)E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{\theta}_{BLr} = -\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\frac{n}{\ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}\right]} + (1-w)\left(1+\frac{c}{b+u}\right)^{-(n+a)}\right] \quad \dots (51)$$

وإنَ توقع دالة المعولية تحت دالة خسارة linex بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، إذ t>0

$$E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)=\int_0^\infty e^{-cR(t)}\,f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)d\theta$$

وبالتعويض عن $R(t)$ و $f(\theta|x,\beta)$ في المعادلة (27) و(38) على التوالي

$$E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)=\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-c)^r}{r!}\left[1+\frac{r\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{b+u}\right]^{-(a+n)}\right]\quad\dots(52)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (35) و (52) نحصل على مقدر $R(t)$، إذ $t>0$ تحت دالة خسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{R}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{R}(t)_{MLr}}+(1-w)E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{R}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{-\hat{\theta}_{MLr}}\right]}+(1-w)\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-c)^r}{r!}\left[1+\frac{r\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{b+u}\right]^{-(a+n)}\right]\right]\quad\dots(53)$$

وإنَّ توقع دالة معدل الفشل تحت دالة خسارة linex بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، إذ $t>0$

$$E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)=\int_0^\infty e^{-ch(t)}\,f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)d\theta$$

وبالتعويض عن $h(t)$ و $f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)$ في المعادلة (28) و(38) على التوالي

$$E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)=\left[1+\frac{c}{(\beta+t)(b+u)}\right]^{-(a+n)}\quad\dots(54)$$

بالرجوع الى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (36) و (54) نحصل على مقدر $h(t)$، إذ $t>0$ تحت دالة خسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{h}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{h}(t)_{MLr}}+(1-w)E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{h}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\frac{\hat{\theta}_{MLr}}{\beta\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}\right]}+(1-w)\left[1+\frac{c}{(\beta+t)(b+u)}\right]^{-(a+n)}\right]\quad\dots(55)$$

ثانياً: في حالة معلمتي الشكل والقياس θ و β غير معلومة :

إنّ تحديد التوزيع المشترك السابق للمعلمتين θ و β تكون حساباته معقدة، وعليه سوف نستخدم طريقة Soland's (1969) لحل هذه المسالة ، فقد عدتَ عائلة دوال الكثافة الاحتمالية المشتركة الاولية بوضع دالة كثافة احتمالية مستمرة لـ θ وتوزيع متقطع لـ β . نفرض أَنَّ معلمة القياس لـ β محددة بعدد من القيم وهي $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ وباحتمالات سابقة $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_k$ على الترتيب بحيث أَنَّ $\mathbf{1}\le\psi_j\le\mathbf{0}$ وان $\sum_{j=1}^{k}\psi_j=\mathbf{1}$ وهذا يعني أنَّ

بالإضافة إلى ذلك افرض أَنَّ التوزيع الأَولي المرافق للمعلمة θ $\left[P=(\beta=\beta_j)=\psi_j\right]$ والمشروط بالمعلمة $\beta=\beta_j$ هو توزيع (a_j,b_j) Gamma وبدالة كثافة احتمالية : انظر (Soland's ,1969)

$$f(\theta|\beta=\beta_j)=\frac{{b_j}^{a_j}}{\Gamma a_j}\,\theta^{a_j-1}\,e^{-\theta b_j} \qquad \dots(56)$$

وحسب نظرية بيز فإن التوزيع اللاحق للمعلمة θ هو :

$$f(\theta|\underline{x},\beta)=\frac{f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)}{\int f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)\,d\theta}$$

$$f(\theta|\underline{x},\beta)\propto f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)$$

إذ أن

$$f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)=\frac{{b_j}^{a_j}}{\Gamma a_j}\,\theta^{a_j+n-1}\,e^{-\theta(b_j+u_j)}$$

$$f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)$$

وإنَّ

$$\int_0^\infty f(\theta|\beta)\,L(\theta|\beta)\,d\theta=\frac{{b_j}^{a_j}}{\Gamma a_j}\;\frac{\Gamma a_j+n}{(b_j+u_j)^{a_j+n}}$$

وعليه فإن التوزيع اللاحق للمعلمة θ يكون على الآتي :

$$f(\theta|\underline{x},\beta)=\frac{(b_j+u_j)^{a_j+n}}{\Gamma a_j+n}\,\theta^{a_j+n-1}\,e^{-\theta(b_j+u_j)}\quad,\quad \theta>0,a_j\,,b_j>0 \qquad \dots(57)$$

إذ إن u_j معرفة بالمعادلة (32)

حينئذٍ يمكن حساب التوزيع المشترك السابق للمعلمتين θ و β على الآتي :

$$f(\theta,\beta|\underline{x})\propto f(\theta,\beta)L(\theta,\beta|\underline{x})$$

وإن

$$f(\theta,\beta)=f(\beta)f(\theta|\beta)$$

$$f(\theta,\beta|\underline{x})=f(\beta)f(\theta|\beta)\,L(\theta,\beta|\underline{x})$$

$$f(\theta,\beta|\underline{x})=\psi_j\,\frac{{b_j}^{a_j}}{\Gamma a_j}\,\theta^{a_j-1}\,e^{-\theta b_j}\,(\frac{\theta}{\beta})^n\,e^{-\theta u_j}\,e^{-v_j} \qquad \dots(58)$$

نكامل المعادلة (58) بالنسبة لـ θ نحصل على التوزيع اللاحق لـ β :

$$f_j=f(\beta=\beta_j|\underline{x})=A\int f(\theta,\beta|\underline{x})d\theta$$

$$f_j = f(\beta = \beta_j|\underline{x}) = A\frac{\psi_j e^{-v_j} {b_j}^{a_j} \Gamma a_j + n}{{\beta_j}^n\ \Gamma a_j\ (b_j + u_j)^{a_j+n}} \qquad \dots (59)$$

وإنَّ A هو الثابت الطبيعي الذي يعطى على الآتي :

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\psi_j e^{-v_j} {b_j}^{a_j} \Gamma a_j + n}{{\beta_j}^n\ \Gamma a_j\ (b_j + u_j)^{a_j+n}}$$

إذ إن v_j معرفة بالمعادلة (32)

3.2.8 مقدر بيز بالاعتماد على دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة :

اعتماداً على دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة يعطى مقدر بيز للدالة $\lambda \equiv \lambda(.)$ بالمعادلة (39) ، وعليه فإنَّ مقدرات بيز لمعلمتي التوزيع θ و β ولدالتي المعولية ومعدل التعطل لتوزيع لوماكس نحصل عليها بوضع $\lambda(.) \equiv \theta, \beta, R(t), h(t)$ على التوالي ويمكن ايجاد التوقع الشرطي للمعلمة θ :

$$E(\theta|\underline{x}) = \int_0^\infty \sum_{\forall\beta} f(\theta, \beta|\underline{x})\ d\theta$$

$$E(\theta|\underline{x}) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k} P_j\, \theta\, f(\theta|\underline{x}, \beta)\, d\theta$$

نعوض عن $f(\theta|x, \beta)$ في المعادلة (57)

$$E(\theta|\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} P_j\ \frac{a_j + n}{b_j + u} \qquad \dots (60)$$

بالرجوع الى المعادلة (39)، وتعويض المعادلات (33) و (60) نحصل على مقدر θ تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا :

$$\hat{\theta}_{BSqr} = w\hat{\theta}_{MLr} + (1 - w)E(\theta|\underline{x})$$

$$\hat{\theta}_{BSqr} = w\left[\frac{n}{\ln\left(1 + \frac{x_n}{\beta}\right)}\right] + (1 - w)\sum_{j=1}^{k} P_j\ \frac{a_j + n}{b_j + u_j} \qquad \dots (61)$$

وإنّ توقع β تحت دالة خسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$E(\beta|\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\ f(\beta|\underline{x})$$

نعوض عن $f(\beta|x)$ في المعادلة (59)

$$E(\beta|\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} P_j\, \beta_j \qquad \dots (62)$$

بالرجوع الى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (34) و (62) نحصل على مقدر β تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$\hat{\beta}_{BSqr} = w\hat{\beta}_{MLr} + (1-w)E(\beta|\underline{x})$$

$$\hat{\beta}_{BSqr} = w\left[\frac{\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)} + \frac{\theta}{\beta^2}\frac{x_n}{\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}}{n}\right] + (1-w)\sum_{j=1}^{k} P_j\, \beta_j \qquad \dots (63)$$

وإِنَّ توقع دالة المعولية تحت دالة خسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، إذ t>0

$$E(R(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k} P_j\; R(t)\, f(\theta|\underline{x},\beta)\, d\theta$$

وبالتعويض $R(t)$ و $f(\theta|x,\beta)$ في المعادلات (27) و (57) على التوالي

$$E(R(t)|\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} P_j \left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{(b_j+u)}\right]^{-(a_j+n)} \qquad \dots (64)$$

بالرجوع الى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (35) و (64) نحصل على مقدر $R(t)$، إذ t>0 تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا :

$$\hat{R}(t)_{BSqr} = w\hat{R}(t)_{MLr} + (1-w)E(R(t)|\underline{x})$$

$$\hat{R}(t)_{BSqr} = w\left[(1+\frac{t}{\beta})^{-\hat{\theta}_{MLr}}\right] + (1-w)\sum_{j=1}^{k} P_j \left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}{(b_j+u_j)}\right]^{-(a_j+n)} \qquad \dots (65)$$

وإِنَّ توقع دالة معدل الفشل تحت دالة خسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا، إذ t>0

$$E(h(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k} P_j\; h(t)\, f(\theta|\underline{x},\beta)\, d\theta$$

وبالتعويض $h(t)$ و $f(\theta|x,\beta)$ في المعادلات (28) و (57) على التوالي

$$E\left(h(t)\middle|\underline{x}\right)=\sum_{j=1}^{k}P_j\,\frac{a_j+n}{(\beta+t)(b_j+u)} \qquad \dots(66)$$

بالرجوع الى المعادلة (39) وتعويض المعادلات (36) و (66) نحصل على مقدر $h(t)$، إذ $t>0$ تحت دالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا :

$$\hat{h}(t)_{BSqr}=w\hat{h}(t)_{MLr}+(1-w)E\left(h(t)\middle|\underline{x}\right)$$

$$\hat{h}(t)_{BSqr}=w\left[\frac{\hat{\theta}_{MLr}}{\beta(1+\frac{t}{\beta})}\right]+(1-w)\sum_{j=1}^{k}P_j\,\frac{a_j+n}{(\beta+t)(b_j+u_j)} \qquad \dots(67)$$

4.2.8 مقدر بيز بالاعتماد على دالة الخسارة الخطية الاسية المتزنة :

يعطى مقدر بيز للدالة $\lambda\equiv\lambda(.)$ اعتماداً على دالة الخسارة الخطية الاسية المتزنة المعطاة بالمعادلة (46)، ونحصل على مقدرات بيز لمعلمتي التوزيع θ و β ولدالتي المعولية ومعدل التعطل لتوزيع لوماكس بوضع $\lambda(.)\equiv\theta,\beta,R(t),h(t)$ على التوالي ويمكن ايجاد مقدر تحت دالة خسارة المتزنة، وذلك بايجاد التوقع الشرطي للمعلمة θ

$$E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}P_j\,e^{-c\theta}\,f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)d\theta$$

وبالتعويض $f(\theta|x,\beta)$ في المعادلة (57)

$$E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)=\sum_{j=1}^{k}P_j\left[1+\frac{c}{b_j+u}\right]^{-(a_j+n)} \qquad \dots(68)$$

بالرجوع الى المعادلة (46)، وتعويض المعادلات (33) و (68) نحصل على مقدر θ تحت دالة الخسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا .

$$\hat{\theta}_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{\theta}_{MLr}}+(1-w)E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{\theta}_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\frac{n}{\ln\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}\right]}+(1-w)\left[\sum_{j=1}^{k}P_j\left[1+\frac{c}{b_j+u_j}\right]^{-(a_j+n)}\right]\right] \qquad \dots(69)$$

وإن توقع المعلمة β تحت دالة خسارة linex بالاعتماد على القيم المسجلة العليا

$$E\left(e^{-c\beta}\middle|\underline{x}\right)=\sum_{j=1}^{k}P_j\,e^{-c\beta}\,f\left(\beta\middle|\underline{x}\right)$$

وبالتعويض عن $f\left(\beta\middle|\underline{x}\right)$ في المعادلة (59)

$$E\left(e^{-c\beta}\middle|\underline{x}\right)=\sum_{j=1}^{k}P_j\,e^{-c\beta} \qquad \dots(70)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (34) و (70) نحصل على مقدر β تحت دالة الخسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا .

$$\hat{\beta}_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{\beta}_{MLr}}+(1-w)E\left(e^{-c\beta}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{\beta}_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\frac{\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)}+\frac{\theta}{\beta^2}\frac{x_n}{\left(1+\frac{x_n}{\beta}\right)}}{n}\right]}+(1-w)\sum_{j=1}^{k}P_j\,e^{-c\beta}\right] \qquad \dots(71)$$

وإنَّ توقع دالة المعولية تحت دالة خسارة linex بالاعتماد على القيم المسجلة العليا إذ $t>0$

$$E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}P_j\;e^{-cR(t)}\,f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)d\theta$$

وبالتعويض $R(t)$ و $f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)$ في المعادلات (27) و (57) على التوالي

$$E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)=\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{\infty}P_j\frac{(-c\,)^r}{r!}\left[1+\frac{r\ln(1+\frac{t}{\beta_j})}{b_j+u_j}\right]^{-(a_j+n)}\right] \qquad \dots(72)$$

وبالرجوع الى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (35) و (72) نحصل على مقدر $R(t)$ إذ $t>0$ تحت دالة خسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا .

$$\hat{R}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{R}(t)_{MLr}}+(1-w)E\left(e^{-cR(t)}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{R}(t)_{BLr}=-\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{-\hat{\theta}_{ML}}r\right]}+(1-w)E\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{\infty}P_j\frac{(-c\,)^r}{r!}\left[1+\frac{r\ln\left(1+\frac{t}{\beta_j}\right)}{b_j+u_j}\right]^{-(a_j+n)}\right]\right] \qquad \dots(73)$$

وإنّ توقع دالة معدل الفشل تحت دالة خسارة linex بالاعتماد على القيم المسجلة العليا إذ $t>0$

$$E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}P_j\;e^{-ch(t)}\,f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)d\theta$$

وبالتعويض $h(t)$ و $f\left(\theta\middle|\underline{x},\beta\right)$ في المعادلات (28) و (57) على التوالي

$$E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)=\sum_{j=1}^{k}P_j\;\left[1+\frac{c}{(t+\beta_j)(b_j+u)}\right]^{-(a_j+n)} \qquad \dots(74)$$

وبالرجوع الى المعادلة (46) وتعويض المعادلات (36) و (74) نحصل على مقدر $h(t)$، إذ t>0 تحت دالة خسارة linex المتزنة بالاعتماد على القيم المسجلة العليا .

$$\hat{h}(t)_{BLr} = -\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\hat{h}(t)_{MLr}} + (1-w)E\left(e^{-ch(t)}\middle|\underline{x}\right)\right]$$

$$\hat{h}(t)_{BLr} = -\frac{1}{c}\ln\left[we^{-c\left[\frac{\hat{\theta}_{MLr}}{\beta\left(1+\frac{t}{\beta}\right)}\right]} + (1-w)\sum_{j=1}^{k}P_j\left[1+\frac{c}{(t+\beta_j)(b_j+u_j)}\right]^{-(a_j+n)}\right] \quad \dots (75)$$

9. دالة المخاطرة اللاحقة

إذا كانت $L(\hat{\theta},\theta)$ هي دالة الخسارة و $f(\theta|\underline{x})$ هو التوزيع اللاحق لـθ فإن توقع دالة الخسارة يدعى بدالة المخاطرة اللاحقة Posterior Risk function (PR) ويمكن ايجادها على الآتي :

$$PR = E\left[L(\theta^{\wedge},\theta)\middle|\underline{x}\right]$$
$$= \int_{\forall\theta} L(\hat{\theta},\theta) * f(\theta|\underline{x})\ d\theta$$

إذ إن PR هي المخاطرة اللاحقة وسيتم حساب دالة المخاطرة اللاحقة لدالتي الخسارة مربع الخطأ وLinex ودالتي الخسارة مربع الخطأ وLinex المتزنة بالاعتماد على واحدة من الحالات الخاصة للإحصاءات المرتبة المعممة وهي القيم المسجلة العليا وذلك عندما تكون معلمة القياس β معلومة لاستخدامها في هذا البحث وكالآتي : انظر (DeGroot,1970)

1.9 دالة المخاطرة اللاحقة لدالة خسارة مربع الخطأ

دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة مربع الخطأ تكون على الآتي :

$$PR_{Sq} = E\left(L\left(\hat{\theta}_{Sq},\theta\middle|\underline{x}\right)\right)$$
$$= E\left(\left(\hat{\theta}_{Sq}-\theta\right)^2\middle|\underline{x}\right)$$
$$= \int_{\forall\theta} k\left(\hat{\theta}_{Sq}-\theta\right)^2 * f(\theta|\underline{x})\ d\theta$$
$$= k\,Var(\theta|\underline{x})$$

إذ إن k هو ثابت حقيقي موجب غالباً يأخذ قيمة مساوية للواحد ، وإنَّ التوزيع اللاحق للمعلمة θ يتبع توزيع (Gamma (a+n,b+u كما في المعادلة (38) و$\hat{\theta}_{Sq}$ تمثل مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة مربع الخطأ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا كما في المعادلة (40)

$$PR_{Sq} = \frac{a+n}{(b+u)^2} \quad \dots (76)$$

2.9 دالة المخاطرة اللاحقة لدالة خسارة Linex

إن دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة Linex تكون على الآتي :

$$PR_L = E\left(L\left(\hat{\theta}_L, \theta \middle| \underline{x}\right)\right)$$
$$= \int_{\forall\theta} \left(\left(a\left(e^{c\left(\hat{\theta}_L-\theta\right)} - c\left(\hat{\theta}_L-\theta\right) - 1\right) \middle| \underline{x}\right)\right) * f\left(\theta|\underline{x}\right)\, d\theta$$
$$= a\left[e^{c\hat{\theta}_L} E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right) - c\hat{\theta}_L + cE\left(\theta\middle|\underline{x}\right) - 1 \right]$$

وبالتعويض عن قيمة $E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)$ في حالة القيم المسجلة العليا كما في المعادلة (50)، وعن $E\left(\theta\middle|\underline{x}\right)$ ،كما في المعادلة (40) وعن $\hat{\theta}_L$ ،كما في المعادلة (11) بدالة المخاطرة وتبسيطها لتكون بالصيغة الآتية:

$$PR_L = a\left[e^{c\left(-\frac{1}{c}\ln E\left(e^{-c\theta}|\underline{x}\right)\right)}\left(\left(1+\frac{c}{b+u}\right)^{-(n+a)}\right) - c\left(-\frac{1}{c}\ln E\left(e^{-c\theta}\middle|\underline{x}\right)\right) + c\left(\frac{a+n}{b+u}\right) - 1\right]$$

$$PR_L = \ln\left(1+\frac{c}{b+u}\right)^{-(a+n)} + c\left(\frac{a+n}{b+u}\right) \qquad \ldots (77)$$

3.9 دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة:

دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة مربع الخطأ المتزنة تكون على الآتي :

$$PR_{BSqr} = \int_{\forall\theta} \left(w\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \hat{\theta}_{MLr}\right)^2 + (1-w)\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \theta\right)^2\right) * f\left(\theta|\underline{x}\right)\, d\theta$$
$$= w\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \hat{\theta}_{MLr}\right)^2 + (1-w) \int_{\forall\theta} \left(\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \theta\right)^2\right) * f\left(\theta|\underline{x}\right) d\theta$$
$$= w\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \hat{\theta}_{MLr}\right)^2 + (1-w)\left[\int_{\forall\theta} \hat{\theta}_{Bsqr}{}^2 * P\left(\theta|\underline{x}\right)d\theta - 2\hat{\theta}_{Bsqr}\int_{\forall\theta} \theta * P\left(\theta|\underline{x}\right)d\theta + \int_{\forall\theta} \theta^2 * f\left(\theta|\underline{x}\right)d\theta + \right]$$
$$= w\left(\hat{\theta}_{Bsqr} - \hat{\theta}_{MLr}\right)^2 + (1-w)\left[\hat{\theta}_{Bsqr}{}^2 - 2\hat{\theta}_{Bsqr}E\left(\theta|\underline{x}\right) + var\left(\theta|\underline{x}\right) + \left(E\left(\theta|\underline{x}\right)\right)^2\right]$$

وبالتعويض عن $\hat{\theta}_{MLr}$ و $E\left(\theta\middle|\underline{x}\right)$ و $\hat{\theta}_{Bsqr}$ و $var\left(\theta\middle|\underline{x}\right)$ في المعادلات (33) و (40) و (41) و (76) على التوالي

$$PR_{BSqr} = w(1-w)\left(\frac{n}{\ln 1 + \frac{x_n}{\beta}}\right)^2 + 2w(w-1)\frac{n+a}{b+u}\frac{n}{\ln 1 + \frac{x_n}{\beta}} + w(1-w)\left(\frac{n+a}{b+u}\right)^2 + (1-w)\frac{n+a}{(b+u)^2} \quad \ldots (78)$$

$\hat{\theta}_{Bsqr}$ هو مقدر بيز للمعلمة θ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا تحت دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة, وإنَّ $\hat{\theta}_{Mlr}$ هو مقدر الإمكان الأَعظم للمعلمة θ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا.

4.9 دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة Linex المتزنة:

إن دالة المخاطرة اللاحقة لدالة الخسارة Linex المتزنة تكون على الآتي :

$$PR_{BLr} = \int_{\forall\theta} w\left[e^{c\left(\hat{\theta}_{BLr}-\hat{\theta}_{MLr}\right)} - c\left(\hat{\theta}_{BLr} - \hat{\theta}_{MLr}\right) - 1\right] + (1-w)\left[e^{c\left(\hat{\theta}_{BLr}-\theta\right)} - c\left(\hat{\theta}_{BLr} - \theta\right) - 1\right] * f\left(\theta|\underline{x}\right)\, d\theta$$

$$= w\left[e^{c(\hat{\theta}_{BLr}-\hat{\theta}_{MLr})} - c(\hat{\theta}_{BLr} - \hat{\theta}_{MLr}) - 1\right] + (1-w)\left[e^{c\hat{\theta}_{BLr}}E(e^{-c\theta}|\underline{x}) - c\hat{\theta}_{BLr} + cE(\theta|\underline{x}) - 1\right]$$

وبالتعويض عن $\hat{\theta}_{MLr}$ و $E(e^{-c\theta}|\underline{x})$ و $\hat{\theta}_{BLr}$ في المعادلات (33) و (50) و (51) على التوالي

$$= w\left[e^{c(\hat{\theta}_{BLr}-\hat{\theta}_{MLr})} - c(\hat{\theta}_{BLr} - \hat{\theta}_{MLr}) - 1\right] + (1-w)\left[e^{c\hat{\theta}_{BLr}}\left(\left(1+\frac{c}{b+u}\right)^{-(n+a)}\right) - c\hat{\theta}_{BLr} + c\frac{n+a}{b+u} - 1\right] \quad ...(79)$$

$\hat{\theta}_{BLr}$ هو مقدر بيز للمعلمة θ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا تحت دالة خسارة Linex المتزنة وان $\hat{\theta}_{MLr}$ هو مقدر الإمكان الأَعظم للمعلمة θ بالاعتماد على القيم المسجلة العليا.

10. الجانب التجريبي

تم في هذا البحث توليد بيانات تتبع توزيع لوماكس ذا المعلمتين بأُسلوب المحاكاة باستخدام طريقة المونت كارلو في لغة (Matlab,2013)، وذلك لمقارنة مقدرات معلمة الشكل θ لتوزيع لوماكس ودالتي المعولية ومعدل الفشل للقيم المسجلة العليا تحت دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة ودالة خسارة Linex المتزنة ولمقارنة مقدرات معلمة الشكل θ، تم استخدام معيار mse و مخاطرة بيز اللاحقة إذ إنّ معيار mse يحسب بالصيغة الآتية:

$$mse(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R}(\hat{\theta}_i - \theta)^2}{R} \quad ...(80)$$

إذ إن عدد المكررات R=1000

1.10 طريقة المونت كارلو

إنَّ التجارب العشوائية التي تتطلب استخدام أَعداد عشوائية (تولد عادة باستخدام الحاسوب) لها توزيع احتمالي معين يطلق عليها المحاكاة التصادفية الحاسوبية، أَو محاكاة المونت كارلو، يتم اللجوء إليها في الحالات التي يرغب فيها الباحث بالحصول على أَحجام مختلفة للعينات عند التقدير او عدم توفرها بشكل كاف، وإن أُسلوب المحاكاة يعطي معلومات مفيدة في دراسة مسائل مختلفة، فهي استثمار للوقت والمال والجهود المبذولة

ففي هذا البحث تم اللجوء إلى أُسلوب المحاكاة باستعمال التحويل المعكوس لدالة التوزيع التراكمية المعرفة بالصيغة (26)، وتوليد بيانات تتبع توزيع Lomax وكما يأتي : انظر (ذنون , 2010)

$$F(x) = 1 - \left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-\theta}$$

$$\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-\theta} = 1 - u$$

إذ إن u متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم المستمر

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على :

$$-\theta \ln\left(1+\frac{x}{\beta}\right) = \ln(1-u)$$

$$\ln\left(1+\frac{x}{\beta}\right) = -\frac{\ln(1-u)}{\theta} \qquad \left(1+\frac{x}{\beta}\right) = e^{-\frac{\ln(1-u)}{\theta}}$$

$$\frac{x}{\beta} = e^{-\frac{\ln(1-u)}{\theta}} - 1 \qquad x = \beta(e^{-\frac{\ln(1-u)}{\theta}} - 1)$$

2.10 النتائج التجريبية

تم عرض نتائج المحاكاة في جداول تضمنت المقارنة بين مقدرات معلمة الشكل θ ودالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي الخسارة المتزنة وغير المتزنة، وتم أَيضاً عرض الأَعداد العشوائية التي تم توليدها لتوزيع لوماكس بطريقة المونت كارلو، وذلك بإعداد برنامج بأستخدام لغة ماتلاب لذلك خصصنا في هذا البحث دراسة المحاكاة للمقارنة بين المقدرات ومعرفة الأَفضل وذلك بإعطاء قيم افتراضية مختلفة لمعلمة الشكل θ، وكذلك حجوم عينات مختلفة تم توليد عينات بحجم 25 و100=N وتأخذ القيم المسجلة العليا بحجمين وهي (n=3,5) و تم اختبار البيانات باستخدام برنامج (Easy Fit)، وتم اختيار القيم الأَولية لمعلمات توزيع Lomax فكلما زادت قيمة معلمة الشكل تغير شكل التوزيع الى توزيع آخر. أما بالنسبة لمعلمة القياس لا تؤثر قيمتها في شكل التوزيع , وكانت القيم الأَولية لمعلمات توزيع Lomax على الآتي : معلمة الشكل $(\theta = 2)$ ومعلمة القياس $(\beta = 3)$ والقيم الاولية لمعلمات التوزيع المسبق الذي يتوزع توزيع كاما $(\theta_0 = 2$ و $\beta_0 = 3)$ وقيمة الوزن w=0.5، وكذلك تم اختيار قيم سالبة وموجبة لمعلمة الشكل لدالة خسارة linex c=−2,0.5,2

1.2.10 المقارنة بين مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي الخسارة المتزنة وغير المتزنة حينما N=100

الجدول (1) يوضح مقارنة مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي خسارة مربع الخطأ ومربع الخطأ المتزنة :

n	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{sqr}$	$\hat{\theta}_{Bsqr}$	mse $\hat{\theta}_{ML}$	mse $\hat{\theta}_{sqr}$	mse $\hat{\theta}_{Bsqr}$	Risk $\hat{\theta}_{sqr}$	Risk $\hat{\theta}_{Bsqr}$	$\frac{\text{Risk } \hat{\theta}_{sqr}}{\text{Risk } \hat{\theta}_{Bsqr}}$
3	1.2111	0.9014	1.0562	0.6978	1.2158	**0.9245**	0.1643	**0.1144**	**1.4354**
5	2.0339	0.2668	1.6503	0.2015	0.5546	**0.2055**	0.2317	**0.2021**	**1.1463**

الجدول (2) يوضح مقارنة مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي خسارة linex و linex المتزنة :

n	C	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{L}$	$\hat{\theta}_{BL}$	mse $\hat{\theta}_{ML}$	mse $\hat{\theta}_{L}$	mse $\hat{\theta}_{BL}$	Risk $\hat{\theta}_{L}$	Risk $\hat{\theta}_{BL}$	$\frac{\text{Risk } \hat{\theta}_{L}}{\text{Risk } \hat{\theta}_{BL}}$

3	−2	1.2111	1.1222	1.1727	0.6978	0.7920	0.7323	7.0446	**0.2330**	**30.2293**
	0.5	1.2076	0.8617	1.0251	0.7005	1.3032	0.9784	0.4399	**0.0144**	**30.4507**
	2	1.2127	0.7688	0.9343	0.6980	1.5209	1.01523	0.1941	**0.2455**	**4.8633**
5	−2	2.0339	1.5786	1.8682	0.2015	0.2188	0.1620	21.9115	**0.4358**	**50.2844**
	0.5	2.0690	1.2207	1.5932	0.2194	0.6222	0.2301	0.4975	**0.0397**	**12.5432**
	2	2.0372	1.0798	1.3432	0.2190	0.8565	0.4534	1.7554	**0.6176**	**2.8423**

2.2.10 المقارنة بين مقدرات دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي الخسارة المتزنة وغير المتزنة حينما N=100

الجدول (3) يوضح مقارنة مقدرات دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي خسارة مربع الخطأ و مربع الخطأ المتزنة

n	X	$\hat{R}(t)_{ML}$	$\hat{R}(t)_{sqr}$	$\hat{R}(t)_{Bsqr}$	$\hat{h}(t)_{ML}$	$\hat{h}(t)_{sqr}$	$\hat{h}(t)_{Bsqr}$
3	13.0547	0.0201	0.2438	**0.1319**	0.0839	0.0510	**0.0675**
	14.9732	0.0145	0.2084	**0.1114**	0.0665	0.0413	**0.0539**
	15.5781	0.0066	0.1567	**0.0816**	0.0457	0.0286	**0.0371**
5	7.2670	0.0030	0.1832	**0.0931**	0.1891	0.0925	**0.1408**
	7.2686	0.0024	0.1627	**0.0825**	0.1647	0.0822	**0.1235**
	9.9577	0.0017	0.1389	**0.0703**	0.1382	0.0704	**0.1043**
	10.8402	0.0010	0.1109	**0.0560**	0.1088	0.0570	**0.0826**
	28.0067	0.0002	0.0749	**0.0376**	0.0760	0.0395	**0.0577**

الجدول (4) يوضح مقارنة مقدرات دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي خسارة linex و linex المتزنة

N	C	X	$\hat{R}(t)_{ML}$	$\hat{R}(t)_{L}$	$\hat{R}(t)_{BL}$	$\hat{h}(t)_{ML}$	$\hat{h}(t)_{L}$	$\hat{h}(t)_{BL}$
3	−2	13.0547	0.0201	0.2497	**0.1482**	0.0839	0.0516	**0.0682**
		14.9732	0.0145	0.2162	**0.1258**	0.0665	0.0417	**0.0544**
		15.5781	0.0066	0.1659	**0.0929**	0.0457	0.0288	**0.0374**
	0.5	13.0982	0.0209	0.2382	**0.1265**	0.0844	0.0511	**0.0676**
		13.9164	0.0151	0.2037	**0.1071**	0.0671	0.0413	**0.0541**
		22.1176	0.0067	0.1522	**0.0781**	0.0468	0.0288	**0.0378**
	2	28.2068	0.0205	0.1957	**0.1003**	0.0828	0.0501	**0.0660**
		36.4699	0.0144	0.1692	**0.0857**	0.0648	0.0400	**0.0521**
		52.3619	0.0067	0.1306	**0.0647**	0.0445	0.0277	**0.0359**
		7.2670	0.0030	0.1969	**0.1097**	0.1891	0.0938	**0.1446**

5	−2	7.2686	0.0024	0.1753	**0.0966**	0.1647	0.0833	**0.1264**
		9.9577	0.0017	0.1501	**0.0817**	0.1382	0.0712	**0.1064**
		10.8402	0.0010	0.1201	**0.0643**	0.1088	0.0570	**0.0841**
		28.0067	0.0002	0.0812	**0.0425**	0.0760	0.0398	**0.0586**
	0.5	10.1384	0.0033	0.1817	**0.0905**	0.1866	0.0916	**0.1383**
		10.5157	0.0026	0.1620	**0.0806**	0.1630	0.0817	**0.1218**
		15.1981	0.0019	0.1394	**0.0694**	0.1376	0.0705	**0.1036**
		15.3346	0.0011	0.1116	**0.0555**	0.1084	0.0566	**0.0823**
		18.9877	0.0002	0.0724	**0.0360**	0.0727	0.0382	**0.0553**
	2	8.0825	0.0029	0.1706	**0.0795**	0.1881	0.0910	**0.1364**
		10.1848	0.0023	0.1520	**0.0713**	0.1647	0.0814	**0.1206**
		10.4642	0.0016	0.1300	**0.0615**	0.1385	0.0700	**0.1025**
		12.9341	0.0009	0.1038	**0.0496**	0.1088	0.0562	**0.0813**
		23.4010	0.0003	0.0693	**0.0335**	0.0743	0.0387	**0.0558**

3,2,10 المقارنة بين مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي الخسارة المتزنة وغير المتزنة حينما N=25

الجدول (5) يوضح مقارنة مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي خسارة مربع الخطأ ومربع الخطأ المتزنة :

n	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{sqr}$	$\hat{\theta}_{Bsqr}$	mse $\hat{\theta}_{ML}$	mse $\hat{\theta}_{sqr}$	mse $\hat{\theta}_{Bsqr}$	Risk $\hat{\theta}_{sqr}$	Risk $\hat{\theta}_{Bsqr}$	$\frac{\text{Risk } \hat{\theta}_{sqr}}{\text{Risk } \hat{\theta}_{Bsqr}}$
3	1.7407	1.0360	1.3884	0.3563	0.9494	**0.4808**	**0.2175**	0.2778	0.7829
5	2.9071	1.4484	2.1778	1.7124	0.3347	0.3408	**0.3041**	0.8348	0.3643

الجدول (6) يوضح مقارنة مقدرات معلمة الشكل θ تحت دالتي خسارة linex و linex المتزنة :

n	C	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{L}$	$\hat{\theta}_{BL}$	mse $\hat{\theta}_{ML}$	mse $\hat{\theta}_{L}$	mse $\hat{\theta}_{BL}$	Risk $\hat{\theta}_{L}$	Risk $\hat{\theta}_{BL}$	$\frac{\text{Risk } \hat{\theta}_{L}}{\text{Risk } \hat{\theta}_{BL}}$
3	−2	1.7407	1.3460	1.6032	0.3563	0.4685	0.3593	12.9241	**0.4297**	**30.0774**
	0.5	1.7368	0.9811	0.3102	0.4120	1.0516	0.5609	0.4608	**0.0370**	**12.4599**
	2	1.7343	0.8626	1.1037	0.3909	1.3017	0.8283	1.3959	**0.5593**	**2.4959**
5	−2	2.9071	1.8821	2.6565	1.7124	0.1015	1.1966	47.2737	**0.9575**	**49.3737**
	0.5	2.8492	1.3679	1.9441	1.5697	0.4247	0.1490	0.5296	**0.0997**	**5.3095**

	2	2.9295	1.2130	1.5232	1.7603	0.6349	0.2548	2.0798	**1.3359**	**1.5569**

4.2.10 المقارنة بين مقدرات دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي الخسارة المتزنة وغير المتزنة حينما N=25

الجدول (7) يوضح مقارنة مقدرات دالتي المعولية، ومعدل الفشل تحت دالتي خسارة مربع الخطأ، و مربع الخطأ المتزنة

N	X	$\hat{R}(t)_{ML}$	$\hat{R}(t)_{sqr}$	$\hat{R}(t)_{Bsqr}$	$\hat{h}(t)_{ML}$	$\hat{h}(t)_{sqr}$	$\hat{h}(t)_{Bsqr}$
3	9.9815	0.0179	0.3551	**0.1865**	0.2974	0.1150	**0.2062**
	11.3210	0.0111	0.2947	**0.1529**	0.2270	0.0930	**0.1600**
	60.2940	0.0033	0.2090	**0.1062**	0.1504	0.0639	**0.1072**
5	5.3853	0.0039	0.3287	**0.1663**	0.7330	0.2090	**0.4710**
	5.6164	0.0028	0.2840	**0.1434**	0.6137	0.1855	**0.3996**
	6.8212	0.0018	0.2374	**0.1196**	0.5005	0.1601	**0.3303**
	7.5689	0.0009	0.1838	**0.0924**	0.3874	0.1301	**0.2587**
	9.1822	0.0001	0.1141	**0.0571**	0.2593	0.0899	**0.1746**

الجدول (8) يوضح مقارنة مقدرات دالتي المعولية ومعدل الفشل تحت دالتي خسارة linex و linex المتزنة

n	C	X	$\hat{R}(t)_{ML}$	$\hat{R}(t)_{L}$	$\hat{R}(t)_{BL}$	$\hat{h}(t)_{ML}$	$\hat{h}(t)_{L}$	$\hat{h}(t)_{BL}$
3	−2	9.9815	0.0179	0.3478	**0.0097**	0.2974	0.1181	**0.2217**
		11.3210	0.0111	0.2954	**0.0139**	0.2270	0.0951	**0.1696**
		60.2940	0.0033	0.2164	**0.0214**	0.1504	0.0650	**0.1123**
	0.5	4.8847	0.0200	0.3466	**0.1764**	0.2974	0.1135	**0.2012**
		6.0249	0.0122	0.2872	**0.1447**	0.2317	0.0922	**0.1591**
		6.6457	0.035	0.2024	**0.1002**	0.1548	0.0634	**0.1075**
	2	7.4340	0.0200	0.2574	**0.1245**	0.2975	0.1123	**0.1902**
		11.2610	0.0126	0.2269	**0.1080**	0.2283	0.0913	**0.1507**
		62.6267	0.0034	0.1693	**0.0791**	0.1521	0.0624	**0.1018**
5	−2	5.3853	0.0039	0.3453	**0.2043**	0.7330	0.2160	**0.5599**
		5.6164	0.0028	0.3003	**0.1745**	0.6137	0.1911	**0.4644**
		6.8212	0.0018	0.2527	**0.1440**	0.5005	0.1643	**0.3754**
		7.5689	0.0009	0.1972	**0.1096**	0.3874	0.1331	**0.2888**
		9.1822	0.0001	0.1233	**0.0660**	0.2593	0.0915	**0.1916**
	0.5	2.1977	0.0045	0.3315	**0.1610**	0.7301	0.2079	**0.4437**
		2.3706	0.0032	0.2886	**0.1405**	0.6165	0.1860	**0.3828**
		4.6781	0.0020	0.2380	**0.1162**	0.4963	0.1590	**0.3152**

		8.4574	0.0010	0.1814	**0.0890**	0.3747	0.1274	**0.2434**
		23.0494	0.0001	0.1094	**0.0539**	0.2446	0.0861	**0.1612**
	2	5.3664	0.0039	0.3096	**0.1327**	0.7450	0.2042	**0.3825**
		5.4610	0.0027	0.2681	**0.1169**	0.6268	0.1824	**0.3373**
		6.2441	0.0017	0.2229	**0.0992**	0.5108	0.1578	**0.2870**
		15.1981	0.0008	0.1736	**0.0790**	0.3978	0.1296	**0.2323**
		18.9877	0.0001	0.1070	**0.0503**	0.2646	0.0896	**0.1595**

3.10 الاستنتاجات :

من خلال الجانب التجريبي تبين ما يأتي :

أولاً : باستخدام مخاطرة بيز اللاحقة كمعيار لمقارنة مقدرات معلمة الشكل θ نلاحظ ما يأتي :

1- عندما يكون حجم العينة كبيراً N>50 كما في الجدول (1) يكون مقدر المعلمة θ تحت دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة أَفضل من مقدر θ تحت دالة خسارة مربع الخطأ غير المتزنة حينما n=3,5

2- عندما يكون حجم العينة صغيراً N=25 كما في الجدول (5) يكون مقدر المعلمة θ تحت دالة خسارة مربع الخطأ غير المتزنة أَفضل من مقدر θ تحت دالة خسارة مربع الخطأ المتزنة

3- عندما يكون حجم العينة كبيراً او صغيراً 100 , N=25 كما في الجدولين (2) و (6) يكون مقدر المعلمة θ تحت دالة خسارة linex المتزنة أَفضل من مقدر θ تحت دالة خسارة linex غير المتزنة حينما تكون معلمة الشكل لدالة خسارة linex c=0.5 وتقل الكفاءة كلما زادت قيمة معلمة الشكل c باتجاه الموجب او السالب

ثانياً : باستخدام دالة المعولية بوصفها معياراً للمقارنة بين المقدرات

إن مقدر دالة المعولية كما في الجداول (3) و (4) و (7) و (8) تحت دوال الخسارة المتزنة تكون أَقل من مقدر دالة المعولية تحت دوال الخسارة غير المتزنة، ولكن معيار المعولية في هذه الحالة لا يمكن استخدامه على أنه معياراً للمقارنة ؛ لأَنَّ البيانات مرتبة ترتيباً تصاعدياً في حالة استخدام القيم المسجلة العليا، وهذه الحالة يكون فيها تحيز للعينة العشوائية

المصادر العربية

1- الحمداني , خالدة احمد محمد , (2002) , "استخدام اسلوب بيز لاختبار العمر الزمني المعجل وتطبيقه عل المعدات الكهربائية في دائرة كهرباء نينوى" , المملكة المتحدة , جامعة ويلز .

2- ذنون ، باسل يونس ، (2010) ، " المحاكاة التصادفية الحاسوبية ونمذجتها باستخدام Matlab " ، دار الكتب للطباعة والنشر ،جامعة الموصل .

3- Ahmadi, J., Doostparast, M. and Parsian, A.,(2005),"Estimation and prediction in a two-parameter exponential distribution based on k-record values under Linex loss function", Taylor & Francis, Vol. 34, pp. 795-805.

4- Ahmadi, J., Jozani, M. J., Marchand, E., Parsian, A. (2009). Bayes estimation based on k-record data from a general class of distributions under balanced type loss functions. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 139:1180–1189

5- Ateya , S.F. , (2012) , "Maximum Likelihood and Bayes Estimations under Generalized Order Statistics from Generalized Exponential Distribution" , Applied Mathematical Sciences, Vol. 6 , no. 49, 2431 - 2444

6- Basu, A. P. and Ebrahimi, N.,(1991),"Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function", Journal of statistical planning and inference, Vol. 29, pp. 21-23.

7- 7- Chandler , K. N. , (1952) , " THE DISTRIBUTION AND FREQUENCY OF RECORD VALUES " , Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 14, No. 2 , pp. 220-228

8- DeGroot, M. H.,(1970),"Optimal statistical decisions", McGraw-Hill.

9- Kamps, U. (1995a). A Concept of Generalized Order Statistics. Teubner, Stuttgart,Germany.

10- Kamps, U. (1995b). A concept of generalized order statistics. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 48: 1-23.

11- Moghadam, M., Yaghmaei, F. and Babanezhad, M. , (2012) , " Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics" , Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 105, 5241 − 5251

12- Soliman, A. A., Abd – Ellah, A. H. and Sultan, K. S. (2006). Comparison of estimates using record statistics from Weibull model: Bayesian and non-Bayesian approaches. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51:2065-2077.

13- Soland, R.M. , (1969), "Bayesian analysis of the Weibull Process with unknown scale and shape parameters", IEEE Transactions on Reliability, 18 , 181-184.

14- Zellner, B. (1994). Pauses and the temporal structure of speech, in E. Keller (Ed.) Fundamentals of speech synthesis and speech recognition. (pp. 41-62). Chichester: John Wiley