المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (30) 2019

ص ص [1-24]

المقدر التقريبي لمعلمات أنموذج VMA(1) غير الطبيعي

د. محاسن صالح عبدالله الطالب * د. هيفاء عبد الجواد سعيد ** د.وصفي طاهر صالح ***

msat563@yahoo.com haeifa965@gmail.com wasfit@gmail.com

المستخلص:

في كثير من تطبيقات السلاسل الزمنية يكون حد التشويش الأبيض لا يتبع التوزيع الطبيعي، بل يتبع أحدى التوزيعات الاحتمالية ذات الذيول الثقيلة. وإثناء استخدام النماذج الطبيعية في التقدير والتكهن بتلك الظواهر، فإنها سوف تنتج مقدرات وتكهنات بعيدة عن الواقع وغير كفوءة.

ينتمي توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم (Generalized multivariate modified Bessel distribution) إلى عائلة التوزيعات الاحتمالية ذات الذيول الثقيلة ، وله تطبيقات واسعة في الظواهر التي تتغير عبر الزمن، وعلى هذا الأساس فقد تناول البحث دراسة أنموذج متجه المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى Vector Moving average model of order (1), VMA(1) الذي يتبع فيه حد التشويش الأبيض توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم. تم تقريب أنموذج VMA(1) غير الخطي إلى أنموذج خطي. وقدرت معلمات الأنموذج بأسلوب بيز عند توفر معلومات سابقة غير خبرية (Non-Informative) مفترضين أن بعض معلمات التوزيع $(\lambda, \psi, \upsilon)$ تكون معلومة. استخدمت في أسلوب بيز دوال خسارة مختلفة ، وهي التربيعية والأُسية الخطية والمتوازنة و المتوازنة الموزونة. تم اقتراح دالتي وزن موجبة في دوال الخسارة المتوازنة الموزونة. طبقت بعض من النتائج التي تم الحصول عليها على عينة تجريبية مولدة من أنموذج VMA(1) . وقد تبين أن المقدرات تحت دوال الخسارة المتوازنة الموزونة المقترحة كانت أفضل بالمقارنة مع بقية المقدرات.

....

*مدرس/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

** استاذ مساعد/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

***مساعد رئيس جامعة تيشك الدولية/اربيل

تاريخ استلام البحث 2019/3/25 تأريخ القبول 2019 /6/19 تاريخ النشر 2019/12/1

Approximate estimator for parameters of non-normal VMA(1) model

Abstract:

In many applications of time series , the white noise does not follow the normal distribution but follows one of the heavy tailed distributions. When using normal models in estimation and forecasting, these phenomena they will produce far from reality and inefficient estimators and predictions. The generalized multivariate modified Bessel distribution belongs to the potentially heavy-tailed distribution family and has wide applications in events that change over time. On this basis, this paper concerned with the study of vector moving average model of the first order (VMA(1)), is the white noise error term of this model follows GMMB. The non linear VMA(1) model was approximated to a linear model. The parameters of approximated model was estimated by Bayesian technique when non-informative priors. We supposed that some parameters of the distribution $(\lambda, \psi, \upsilon)$ known.

Different loss functions has been used in Bayesian analysis, We proposed two positive weight functions in weighted balanced loss functions .

Some of theoretical results were applied on empirical sample generated from VMA(1) model. It is concluded that the estimators under proposed weighted balanced loss functions are better.

(1) تمهيد:

ينتمي توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم Generalized Multivariate Modified Bessel distribution (GMMB) إلى عائلة التوزيعات الاحتمالية ذات الذيول الثقيلة وهو التوزيع الأشمل من التوزيع الطبيعي وتوزيع t ((Thabane and Haq(2003) وله تطبيقات واسعة في الظواهر التي تتغير عبر الزمن التي لها أهمية كبيرة في صنع القرار كقياس مقدرة وجودة العملية الإنتاجية وأسعار الأسهم المالية والسلع الأساسية ، فقد أصبحت أسعار الأسهم كمدخلات أساسية لآلية صنع القرار في الشركات ((Wirson and Misiorek (2007).

يتمتع توزيع GMMB بخاصية الخطية فقد استخدمه (العبيدي ، سعيد (2013)) كتوزيع احتمالي لحد الخطأ في نموذج الانحدار وقدر معلمات النموذج بالأسلوبين البيزي واللابيزي، وأول من استخدم نماذج السلاسل الزمنية غير الطبيعية هما الباحثان((Ni and Sun (2009) و درسا تقدير معلمات أنموذج متجه الإنحدار الذاتي من الرتبة p ((VAR(p) عندما يكون حد التشويش الأبيض

يتبع توزيع t المتعدد وقدر معلماته بأُسلوب بيز تحت دوال خسارة مختلفة ، وأشكال مختلفة للتوزيعات الأولية لمصفوفة معلمات الأَنموذج.

إن أنموذجي ARMA , MA الأحادية المتغير، ومتعددة المتغيرات هي نماذج لاخطية في معلماتها ، وقد قدم ((Malan (2007) بحثاً عن تحليل السلاسل الزمنية لنماذج AVARMA , VMA , VAR المستقرة مستخدماً طريقة المربعات الصغرى الخطية لأُنموذج VAR وطريقة المربعات الصغرى غير الخطية لأُنموذجي AVARMA , VMA ، وعزز النتائج بالتطبيق على نوعين من البيانات حقيقية ومولدة. وقدم (Fan and Yao) بحثاً وضحا فيه الأسلوب البيزي في تقدير معلمات نموذجي AVARMA , VMA الطبيعيين ، ولاقيا صعوبة في تحديد قيمة حد التشويش الأبيض فقد استخدما أسلوب Box and Jenkenz في تقدير مصفوفتي معلمات الأُنموذجين واستخدما هذه المقدرات في تقدير حد التشويش الأبيض، واعتبراها متجهات مشاهدات معلومة وباستخدام التوزيعات الأولية لمصفوفات معلمات الأُنموذجين مع معلومات السلسلة وحد التشويش المقدر، واستنتجا التوزيعات اللاحقة لمعلمات الأُنموذجين. تناول ((Albassam and Ali (2013) استخدام اسلوب (بيز) غير المباشر في تحليل أنموذج المتوسطات المتحركة الطبيعي تحت ثلاثة أنواع من التوزيعات الأولية تنتمي إلى العائلة المرافقة ومن نوع Jeffrey , g، واستنتجا التوزيعات اللاحقة بعد إجراء تقريب لدالة الإمكان غير الخطية، وتبين أن التوزيعات اللاحقة لمعلمات النماذج تتبع توزيع t غير المركزي بمعلمات مختلفة ، وفحصت كفاءة المقدرات من خلال تجارب المحاكاة، وتبين أن التحليل البيزي غير المباشر هو الأفضل في عملية التقدير.

استخدم (الطالب (2017)) أسلوباً قرب فيه أنموذج متجه المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى VMA(1) إلى أنموذج خطي الذي يكون فيه حد التشويش يتبع توزيع GMMB ، واستخدم أسلوب بيز في تقدير معلماته تحت دوال خسارة مختلفة.

يضم المبحث الثاني وصفاً لأُنموذج VMA(1) ، والمبحث الثالث تناول كيفية تقريب أنموذج VMA(1) غير الخطي في معلماته إلى أُنموذج خطي ، أما المبحث الرابع فاختص بالتحليل البيزي وإيجاد التوزيعات اللاحقة لمصفوفتي معلمات الأُنموذج والتباين، وكان المبحث الخامس مكملاً للرابع إذ بين تقديرات مصفوفتي معلمات الأُنموذج والتباين تحت دوال خسارة مختلفة ، ومثل المبحث السادس الجانب التجريبي للدراسة ، وبين المبحث الأخير أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها.

(2) وصف الأُنموذج:

الأُنموذج الآتي يمثل أنموذج VMA(1) لمتجه عشوائي ذي بُعْد $k \times 1$، وليكن $\underline{y}_t$ (Tsay,2005):

$$\underline{y}_t = \underline{b} - \theta\underline{u}_{t-1} + \underline{u}_t \qquad ,t = 1,2,\dots,T \qquad \dots (1)$$

إذ إن :

k: عدد السلاسل الزمنية المدروسة.

t: تسلسل المشاهدة في السلسلة الزمنية.

T: عدد المشاهدات الكلية لكل سلسلة زمنية.

$\underline{b}$: متجه ببعد $k \times 1$ يمثل المقطع.

θ: مصفوفة ذات بعد $k \times k$ تمثل مصفوفة معلمات الأُنموذج .

$\underline{u}_t$: متجه عمودي ذو بعد $k \times 1$ يمثل التشويش الأبيض (الخطأ).

$\underline{u}_{t-1}$: متجه عمودي ذو بعد Kx1 يمثل حد التشويش الأبيض عند تخلف زمني واحد.

$$\underline{y}_t = [y_{1t} \quad y_{2t} \quad \cdots \quad y_{kt}]'$$

إذ إن :

y_{1t}: المشاهدة t من السلسلة (1).

y_{kt}: المشاهدة t من السلسلة (k).

$$\underline{u}_t = [u_{1t} \quad u_{2t} \quad \dots \quad u_{kt}]'$$

$$\underline{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k]'$$

وبفرض أن المقطع ($\underline{b}$) متجه معلوم ، وعليه يمكن كتابة الأُنموذج (1) بالصيغة الآتية :

$$\underline{y}_t^* = \underline{u}_t - \theta\underline{u}_{t-1} \qquad \dots (2)$$

إذ إن

$$\underline{y}_t^* = \underline{y}_t - \underline{b}$$

و يمكن تمثيل حد التشويش الأبيض من الأُنموذج (2) بالصيغة الآتية :

$$\underline{u}_t = \underline{y}_t^* + \theta\underline{u}_{t-1} \qquad \dots (3)$$

وبالاعتماد على المعادلة (3) يمكن كتابة الأُنموذج (2) تعاقبياً من الخلف ليصبح الأُنموذج (3) بالصيغة الآتية(Wei 2006):

$$\underline{y}_t^* = \underline{u}_t - \sum_{j=1}^{t-1} \theta^j \ \underline{y}_{t-j} \quad \dots (4)$$

بشرط أن $\underline{u}_0 = 0$

نلحظ أن الأُنموذج (4) غير خطي في مصفوفة المعلمات (θ)، وبالتالي يجب استخدام طرائق التقدير غير الخطية لتقدير معلمات الأُنموذج ، مثل طريقة المربعات الصغرى غير الخطية (Non−linear Least square)، وطريقة نيوتن−كواشي (Newton−Qwasi)(Malan 2007)، ... ، ولما كانت هذه الطرائق لا يمكن استخدامها في التقدير البيزي فقد تم اقتراح أسلوب لتحويل الأُنموذج إلى أنموذج خطي وذلك باستخدام مفكوك تايلر.

(3) أسلوب مقترح لتحويل نموذج VMA(1) إلى أنموذج خطي:

بالإمكان تقريب الأنموذج (4) إلى أنموذج خطي بالاعتماد على مفكوك تايلور، إذ يتم تقريب الحد الثاني من الطرف الأيمن إلى خطي ، وذلك باعتماد الخطوات الآتية :

نكتب المعادلة (4) بالصيغة الآتية:

$$\underline{y}_t^* = \underline{u}_t - f(\theta) \quad \dots (5)$$

إذ إن

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{t-1} \theta^j \ \underline{y}_{t-j}^* \quad \dots (6)$$

وهي دالة معرفة من الفضاء $\mathbf{k\times k}$ إلى الفضاء $\mathbf{R^k}$ هذا يعني أن $f(\theta)$ متجه ذو سعة **(kx1)** وقابلة للاشتقاق إذ يمكن أن تكتب بالصيغة الآتية :

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{t-1} vec\left(I_k \theta^j \underline{y}_{t-j}^*\right)$$

و باستخدام خصائص عملية الـ Vector operator نحصل على:

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{t-1} \left(\underline{y}_{t-j}^{*\prime} \otimes I_k\right) vec\left(\theta^j\right) \quad \dots (7)$$

أصبحت الدالة $f(\Theta)$ معرفة من الفضاء R^{k^2} إلى الفضاء R^k، إذ إن الدالة $f: \mathrm{R}^{k\times k} \rightarrow \mathrm{R}^k$ هي نفسها $f: \mathrm{R}^{k^2} \rightarrow \mathrm{R}^k$.

وباستخدام مفكوك تايلور للدالة $f(\Theta)$ لغاية الرتبة الأولى عند النقطة $(\theta = \hat{\theta})$ التي تمثل مقدر المربعات الصغرى غير الخطي لمصفوفة المعلمات (θ) كالآتي(Kollo & Rosen, 2005):

$$f(\theta) = f\left(vec(\theta)\right) \cong f\left(vec(\hat{\theta})\right) + \left[I_k \otimes \left(vec(\theta) - vec(\hat{\theta})\right)^{\otimes(L-1)}\right]' \left[\frac{\partial f\left(vec(\theta)\right)}{\partial vec'^{(\theta)}}\right]' |_{\theta=\hat{\theta}} \left(vec(\theta) - vec(\hat{\theta})\right) \quad \dots (8)$$

إذ إن

L: تمثل رتبة المشتقة.

وأن

$$\frac{\partial f\left(vec(\theta)\right)}{\partial vec'^{(\theta)}} = \sum_{j=1}^{t-1} \left(y'_{t-j} \otimes I_k\right) \left[\frac{\partial f\left(vec(\theta^j)\right)}{\partial vec'^{(\theta)}}\right]' \quad \dots (9)$$

كما أن

$$\frac{\partial f\left(vec(\theta^j)\right)}{\partial vec'(\theta)} = \sum_{i=1}^{j} \left(\theta^{j-i} \otimes \theta^{i-1}\right) \quad \dots (10)$$

إذ إن الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة يمثل مصفوفة ذات سعة ($k^2 x k^2$) .

وبعد تعويض المعادلتين (9) و (10) في المعادلة (8) نحصل على :

$$f(\theta) = f\left(vec(\theta)\right) \cong f\left(vec(\hat{\theta})\right) + (I_k \otimes 1)' \left[\sum_{j=1}^{t-1} \left(y'_{t-j} \otimes I_k\right) \left\{\sum_{i=1}^{j} \left(\theta^{j-i} \otimes \theta^{i-1}\right)\right\}'\right] |_{\theta=\hat{\theta}} \left(vec(\theta) - vec(\hat{\theta})\right) \quad \dots (11)$$

إذ إن

$$f\left(vec(\hat{\theta})\right) = \sum_{j=1}^{t-1} \left(y'_{t-j} \otimes I_k\right) vec(\hat{\theta}^j)$$

نفرض أن

$$D_t = \sum_{j=1}^{t-1} \left(y'_{t-j} \otimes I_k\right) \left\{\sum_{i=1}^{j} \left(\theta^{j-i} \otimes \theta^{i-1}\right)\right\}' |_{\theta=\hat{\theta}}$$

$$\therefore f(\theta) \cong f\left(vec(\hat{\theta})\right) - D_t vec(\hat{\theta}) + D_t vec(\theta)$$

$$\cong \underline{c}_t + D_t vec(\theta) \quad \dots (12)$$

إذ أن

$$\underline{c}_t = f\left(vec(\hat{\theta})\right) - D_t vec(\hat{\theta})$$

نعوض المعادلة (12) في المعادلة (5) يصبح أنموذج VMA(1) التقريبي بالشكل الآتي:

$$\underline{y}_t^* \cong \underline{u}_t - \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right) \quad \dots (13)$$

نلاحظ من المعادلة (13) أن نموذج VMA(1) التقريبي أصبح نموذجاً خطياً(الطالب،2017) .

ولنفرض أن $\underline{u}_t$ يتوزع توزيع بيسل متعدد المتغيرات المحور المعمم ،إذ يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال بالاستعانة بالتوزيعات المختلطة من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات، وتوزيع كاوس المعكوس المعمم وكالآتي :

$\underline{u}_t|\tau \sim N_k(\underline{0}, \tau\Sigma)$

إذ إن (τ) متغير عشوائي يتبع توزيع كاوس المعكوس المعمم وكالآتي(Hormann & Leydold,2014) وكالآتي:

$\tau \sim GIG(\lambda, \psi, \upsilon)$

ودالة كثافة احتماله هي:

$$p(\tau) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{\upsilon}{2}}}{2\kappa_\upsilon\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \tau^{\upsilon-1} exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\psi}{\tau}\right) + \lambda\tau\right\}\right] , \qquad \tau > 0 \qquad \dots (14)$$

إذ إن:

$\boldsymbol{\lambda, \psi}$: تمثلان معلمتي القياس .

υ: معلمة الشكل.

$\kappa_\upsilon(.)$: دالة بسل المحورة من النوع الثالث ذات الرتبة $(\boldsymbol{\upsilon})$ وصيغتها (Kim & Gentel 2011) .

$$\kappa_\upsilon(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\upsilon-1} exp\left(-\frac{1}{2}x(z+z^{-1})\right) dx \quad \dots (15)$$

وإن دالة كثافة احتمال $(\underline{u}_t)$ تأخذ الصيغة الآتية :

$$\mathrm{f}(\underline{u}_t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{k}{4}} \mathrm{K}_{\frac{2\upsilon-k}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1+\frac{\underline{\acute{u}}_t\Sigma^{-1}\underline{u}_t}{\psi}\right)}\right)\left(1+\frac{\underline{\acute{u}}_t\Sigma^{-1}\underline{u}_t}{\psi}\right)^{\frac{2\upsilon-k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\mathrm{K}_\upsilon\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \quad \dots (16)$$

التي تمثل دالة كثافة احتمال توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم ،الذي يوصف بالآتي:

$\underline{u}_t \sim GMMB_k(\underline{0}, \Sigma, \lambda, \Psi, \nu)$

وبما أن متجه المشاهدات $\underline{y}_t^*$ في المعادلة (13) عبارة عن تركيبة خطية بدلالة المتجه العشوائي $\underline{u}_t$ الذي يتبع توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم، لذلك فان التوزيع الاحتمالي لـ $\underline{y}_t^*$ هو توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم الذي يوصف بالآتي

$$\underline{y}_t^* \sim GMMB_k\left(-\left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right), \Sigma, \lambda, \Psi, \nu\right)$$

(4) التوزيعات الاحتمالية اللاحقة:

يتم في هذا المبحث تقدير معلمات نموذج متجه المتوسطات المتحركة المعرف في المعادلة (13) باستخدام المعلومات السابقة غير الخبرية .

لإيجاد التوزيع السابق المشترك لـ (Θ, Σ) المشروط بـ (τ) نتبع الآتي :

$$p(vec(\theta), \Sigma|\tau) = p(vec(\theta)|\Sigma, \tau)p(\Sigma|\tau) \qquad \dots (17)$$

ولإيجاد هذا التوزيع نفرض أن

$$g_1 = LnL(vec(\theta), \Sigma|\tau) = -\frac{Tk}{2}\ln(2\pi) - \frac{Tk}{2}\ln\tau - \frac{T}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2\tau}tr(\Sigma^{-1}w_1) \qquad \dots (18)$$

علماً أن

$$w_1 = \sum_{t=1}^{T}\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)'$$

يتم تفاضل طرفي المعادلة (18)، و نحصل على :

$$\begin{aligned} dg_1 = &-\frac{T}{2}tr(\Sigma^{-1}d\Sigma) + \frac{1}{2\tau}tr(\Sigma^{-1}d\Sigma\,\Sigma^{-1}w_1) \\ &+ \frac{1}{2\tau}tr\Sigma^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(D_t dvec(\theta)\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)'\right.\right. \\ &\left.\left.+ \left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)dvec'(\theta)D_t'\right)\right] \end{aligned}$$

نعيد كتابة الحد الثاني من المعادلة في أعلاه على شكل ثابت ونحصل على (Schott, 1997):

$$\begin{aligned} dg_1 = &\frac{1}{2\tau}tr[(d\Sigma)\Sigma^{-1}(w_1 - T\tau\Sigma)\Sigma^{-1}] \\ &+ \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)'\Sigma^{-1}D_t\,dvec(\theta)\right) \end{aligned}$$

وباستخدام خصائص أثر المصفوفة ، وبما أن (Σ) هي مصفوفة متناظرة ذات بعد $k \times k$ فإن :

$$vec(\Sigma) = D_k^* \, V(\Sigma) \qquad \dots (19)$$

علماً أن D_k^* هي مصفوفة تستخدم لتعديل عملية تحويل المتجه، وإرجاع أبعاد المصفوفة المحولة إلى أصلها.

$$dg_1 = \frac{1}{2\tau}(vec(d\Sigma)')'(\Sigma^{-1} \otimes \Sigma^{-1})vec(w_1 - T\tau\Sigma) + \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)' \Sigma^{-1} D_t \, dvec(\theta)\right)$$

لكن

$$vec(\mathrm{d}\Sigma) = dvec(\Sigma) = D_k^* \, dV(\Sigma)$$

$$dg_1 = \frac{1}{2\tau}\left(dV(\Sigma)\right)' D_k^{*\prime}(\Sigma^{-1} \otimes \Sigma^{-1})vec(w_1 - T\tau\Sigma) + \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)' \Sigma^{-1} D_t \, dvec(\theta)\right) \qquad \dots (20)$$

نأخذ التفاضل من المرتبة الثانية للمعادلة(20)

$$d^2 g_1 = \frac{1}{2\tau}\left(dV(\Sigma)\right)' D_k^{*\prime} \, [d(\Sigma^{-1} \otimes \Sigma^{-1})] vec(w_1 - T\tau\Sigma) + \frac{1}{2\tau}\left(dV(\Sigma)\right)' D_k^{*\prime} \, (\Sigma^{-1} \otimes \Sigma^{-1}) vec(dw_1 - T\tau \mathrm{d}\Sigma) - \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T} dvec'(\theta) D_t' \Sigma^{-1} D_t dvec(\theta) + \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\underline{y}_t^* + \left(C_t + D_t vec(\theta)\right)\right)' (d\Sigma^{-1}) D_t \, dvec(\theta)\right) \qquad \dots (21)$$

إذ إن

$$dw_1 = -\sum_{t=1}^{T} D_t \, dvec(\theta)\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)' - \sum_{t=1}^{T}\left(\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right) dvec'(\theta) D_t'\right) \qquad \dots (22)$$

نعوض المعادلة (22) في المعادلة (21)، ونأخذ سالب التوقع الرياضي للطرفين ; نحصل على :

$$-E(d^2g_1) = \left(dV(\Sigma)\right)' D_k^{*\prime}\,[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})]D_k^* dV(\Sigma) + \frac{1}{\tau}\,dvec'(\theta)\sum_{t=1}^{T} D_t'\Sigma^{-1}D_t\;dvec(\theta)$$

$$= \left[dvec'(\theta)\quad \left(dV(\Sigma)\right)'\right] I_{\underline{y}_t^*|\tau}(vec(\theta),\Sigma)\begin{bmatrix} dvec(\theta)\\ dV(\Sigma)\end{bmatrix}$$

إذ إن

$$I_{\underline{y}_1^*,\underline{y}_2^*,\dots,\underline{y}_t^*|\tau}(vec(\theta),\Sigma) = \begin{bmatrix}\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{T} D_t'\Sigma^{-1}D_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & D_k^{*\prime}\,[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})]D_k^*\end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المعلومات في أعلاه استندت على (T) من مشاهدات السلسلة، وبالاعتماد على مشاهدة واحدة فإن المجموع في المصفوفة الموجودة في أول عنصر من القطر الرئيس سوف يحذف، وعليه فإن التوزيع السابق المشترك لـ $(vec(\theta),\Sigma)$المشروط بـ (τ) هو :

$$p(vec(\theta),\Sigma|\tau) \propto \left|I_{\underline{y}_t^*|\tau}(vec(\theta),\Sigma)\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$p(vec(\theta),\Sigma|\tau) \propto \left|\frac{1}{\tau}D_t'\Sigma^{-1}D_t\right|^{\frac{1}{2}}\left|D_k^{*\prime}\,[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})]D_k^*\right|^{\frac{1}{2}}$$

وبما أن D_t و D_k^* مصفوفات ثابتة لذلك تحذف مع ثابت التناسب ، عليه يأخذ التوزيع السابق المشترك الصيغة الآتية (الطالب ، 2017):

$$p(vec(\theta),\Sigma|\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\,|\Sigma|^{-\frac{k}{2}}\,|\Sigma|^{-\frac{k}{2}}$$

$$p(vec(\theta),\Sigma|\tau) = |\Sigma|^{-\frac{2k+1}{2}} \qquad \dots(23)$$

المعادلة (23) تمثل التوزيع السابق المشترك لـ$(vec(\theta),\Sigma)$ المشروط بـ (τ) ، عليه فإنَ التوزيع اللاحق المشترك المشروط بـ(τ) ينتج من دمج هذه المعادلة مع دالة الإمكان التي تمثل المعادلة (24)(الطالب ، 2017) الآتية :

$$L(vec(\theta),\Sigma|\tau) \cong \frac{exp\left[-\frac{1}{2\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\underline{y}_t^* - \left[-\left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right]\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{y}_t^* - \left[-\left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right]\right)\right]}{(2\pi)^{\frac{Tk}{2}}\tau^{\frac{Tk}{2}}|\Sigma|^{\frac{T}{2}}} \qquad \dots(24)$$

$$p(vec(\theta),\Sigma|Y,\tau) = p(vec(\theta),\Sigma|\tau)\,L(vec(\theta),\Sigma|\tau)$$

$$p(vec(\theta),\Sigma|Y,\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+2k+1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{y}_t^* + \left(\underline{c}_t + D_t vec(\theta)\right)\right)\right] \quad \dots (25)$$

بعد إجراء العديد من العمليات الرياضية تصبح المعادلة (25) بالشكل الآتي :

$$p(vec(\theta),\Sigma|Y,\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+2k+1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2\tau}tr(\Sigma^{-1}M_1)\right].$$

$$exp\left[-\frac{1}{2\tau}tr\left(\Sigma^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left[D_t\left(vec(\theta)-vec(\hat{\theta})\right)\right]\left[D_t\left(vec(\theta)-vec(\hat{\theta})\right)\right]'\right)\right] \dots (26)$$

علماً أن $_1$ معرفة بالآتي

$$M_1 = \sum_{t=1}^{T}\left(\underline{y}_t^* + C_t\right)\left(\underline{y}_t^* + C_t\right)' - \sum_{t=1}^{T}\left(D_t vec(\hat{\theta})\right)\left(D_t vec(\hat{\theta})\right)' \quad \dots (27)$$

نلحظ أن الجزء الأول من المعادلة (27) يمثل نواة توزيع معكوس وشارت بالمعلمات (T+k) و $(\frac{D_1}{D})$، الجزء الثاني يمثل نواة التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات بالمعلمات ($vec(\hat{\theta})$) و $(\sum D_t' \Sigma^{-1} D_t)^{-\mathbf{1}}$.

ومتوسط التوزيع اللاحق لمتجه المعلمات ($vec(\theta)$) هو:

$$E\left(vec(\theta)|y\right) = vec(\hat{\theta}) \quad \dots (28)$$

ومقدر بيز لـ($vec(\theta)$) يمثل مقدر الإمكان الأعظم ($vec(\hat{\theta})$).

أما بالنسبة للتوزيع الهامشي اللاحق لمصفوفة التباين (Σ) المشروط بالمتغير (τ) فيمكن إيجاده من إجراء عملية التكامل على المعادلة (27) بالنسبة لمتجه المعلمات ($vec(\theta)$)؛ نحصل على :

$$P(\Sigma|Y,\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+2k+1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2\tau}tr\Sigma^{-1}M_1\right) \quad \dots (29)$$

نلحظ أن المعادلة (29) تمثل نواة توزيع Wishart المعكوس بالمعلمات $(\frac{M_1}{\tau})$ و$(T+k)$،

والتوزيع الهامشي اللاحق الكامل لمصفوفة التباين (Σ) المشروط بالمتغير (τ) هو :

$$P(\Sigma|Y,\tau)=\frac{\left|\frac{M_1}{\tau}\right|^{\frac{T+k}{2}}|\Sigma|^{-\frac{T+2k+1}{2}}exp\left(-\frac{1}{2\tau}tr\Sigma^{-1}M_1\right)}{2^{\frac{k(T+k)}{2}}\ \Gamma_k\left(\frac{T+k}{2}\right)} \quad \dots(30)$$

كما أن التوزيع الهامشي اللاحق الكامل لمصفوفة التباين (Σ) غير المشروط بالمتغير (τ) هو:

$$P(\Sigma|Y)=\int_0^\infty P(\Sigma|Y,\tau)\,P(\tau)d\tau \quad \dots(31)$$

وبتعويض المعادلتين (14) و(30) في المعادلة (31) نحصل على :

$$P(\Sigma|Y)=\frac{|M_1|^{\frac{T+k}{2}}|\Sigma|^{-\frac{T+2k+1}{2}}\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{k(T+k)}{4}}\ \mathrm{K}_{\frac{2v-k(T+k)}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1+\frac{tr\Sigma^{-1}M_1}{\psi}\right)}\right)}{2^{\frac{k(T+k)}{2}}\ \Gamma_k\left(\frac{T+k}{2}\right)\ \mathrm{K}_\nu(\sqrt{\lambda\psi})\left(1+\frac{tr\Sigma^{-1}M_1}{\psi}\right)^{\frac{2v-k(T+k)}{4}}} \quad \dots(32)$$

وعليه فإنَ مقدر بيز هو(الطالب ، 2017)

$$\hat{\Sigma}_B\cong\frac{M_1\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{K}_{\nu-1}(\sqrt{\lambda\psi})}{(T-1)\ \mathrm{K}_\nu(\sqrt{\lambda\psi})} \quad \dots(33)$$

(5) دوال الخسارة لمصفوفتي المعلمات (Θ) والتباين (Σ) :

سوف يتم تقدير معلمات أنموذج VMA(1) التقريبي بأُسلوب بيز تحت عدد من دوال الخسارة، وهي :

أولاً : دوال الخسارة لمصفوفة المعلمات (θ) :

(أ) دوال الخسارة التربيعية:

1) دالة الخسارة التربيعية:

تعرف دالة الخسارة التربيعية بالصيغة الآتية:

$$\mathrm{L}_Q(\hat{\Theta},\Theta)=\mathrm{tr}\{(\hat{\Theta}-\Theta)'\mathrm{I}(\hat{\Theta}-\Theta)\} \quad \dots(34)$$

أما دالة المخاطرة التربيعية لمصفوفة المعلمات (Θ) ; هي :

$$R_Q(\hat{\Theta},\Theta)=E\left(L_Q(\hat{\Theta},\Theta)\right)=\int_{\Theta} L_Q(\hat{\Theta},\Theta)P(\Theta|Y)\,d\Theta \qquad \ldots(35)$$

ويتم إيجاد مقدر (بيز) لمصفوفة المعلمات (Θ) الذي يمثل المصفوفة التي تجعل دالة المخاطرة $R_Q(\hat{\Theta},\Theta)$ أقل ما يمكن ، ونعوض المعادلة (34) في المعادلة (35) ,وبعد جعل دالة المخاطرة أقل ما يمكن نحصل على:

$$\therefore \hat{\Theta}_Q=E(\Theta|Y) \qquad \ldots(36)$$

وعليه فإنَ مقدر (بيز) تحت دالة الخسارة التربيعية يمثل متوسط التوزيع اللاحق .

ولإيجاد دالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة التربيعية نجد توقع دالة الخسارة بالنسبة للتوزيع اللاحق نحصل على:

$$R_Q(\hat{\Theta},\Theta)=trE\{(\hat{\Theta}-\Theta)'(\hat{\Theta}-\Theta)\}$$

من المعادلة الأخيرة نلحظ أن دالة المخاطرة تمثل تباين التوزيع اللاحق لمصفوفة المعلمات (Θ).

2) دالة الخسارة التربيعية المتوازنة :Balanced Quadratic loss function

صيغة هذه الدالة هي (Jozani et al. 2006):

$$L_{QB}(\hat{\Theta},\Theta)=wtr(\hat{\Theta}-\Theta_m)(\hat{\Theta}-\Theta_m)'+(1-w)tr(\hat{\Theta}-\Theta)(\hat{\Theta}-\Theta)' \qquad \ldots(37)$$

إذ إن

Θ_m : مقدر أولي.

وبفرض أن $_m=\Theta_{mle}$

وعليه تكون دالة الخسارة هي

$$\begin{aligned}L_{QB}(\hat{\Theta},\Theta)&=wtr(\hat{\Theta}\hat{\Theta}'-\hat{\Theta}\Theta_m{}'-\Theta_m\hat{\Theta}'+\Theta_m\Theta_m{}')\\&+(1-w)tr(\hat{\Theta}\hat{\Theta}'-\hat{\Theta}\Theta'-\Theta\hat{\Theta}'+\Theta\Theta')\end{aligned} \qquad \ldots(38)$$

لإيجاد مقدر(بيز) نجعل توقع هذه الدالة بالنسبة لـ Θ في نهايته الصغرى ، الذي يعني مخاطرة المقدر $\hat{\Theta}$ أقل ما يمكن وعليه مقدر(بيز) هو:

$$\hat{\Theta}_{QB}=w\Theta_m+(1-w)E(\Theta|Y) \qquad \ldots(39)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة التربيعية المتوازنة هي:

$$R_{QB}(\hat{\Theta},\Theta)=wtr(\hat{\Theta}-\Theta_m)(\hat{\Theta}-\Theta_m)'+(1-w)trE\left((\hat{\Theta}-\Theta)(\hat{\Theta}-\Theta)'|Y\right) \qquad \ldots(40)$$

3) دالة الخسارة التربيعية المتوازنة الموزونة:

هذه الدالة تأخذ صيغة دالة الخسارة التربيعية المتوازنة نفسها، ولكن يضرب الحد الأول منها بوزن وهو عبارة عن دالة موجبة بدلالة مقدر الإمكان الأعظم ، أو أي مقدر آخر، ويضرب الحد الثاني بوزن وهو عبارة عن دالة موجبة بدلالة المعلمة الأصلية، صيغتها هي(Jozani at el., 2006):

$$L_{QWB}(\widehat{\Theta},\Theta) = wT(\Theta_m)tr(\widehat{\Theta}-\Theta_m)(\widehat{\Theta}-\Theta_m)' + (1-w)T(\Theta)tr(\widehat{\Theta}-\Theta)(\widehat{\Theta}-\Theta)' \quad \ldots(41)$$

لقد اقترح العديد من الباحثين أشكالاً مختلفة للدالة $T(\Theta)$ في حالة أحادية المتغير منها الدالة الخطية الموجبة ، والبعض الآخر استخدم الدالة التي تمثل مربع المعلمة ، أو مقلوب مربع المعلمة أو... . وبما أن هذه الدالة هي دالة موجبة فقد تم اقتراح الدالة بالشكل الآتي:

$$T(\Theta_m) = vec'(\Theta_m)vec(\Theta_m) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\Theta_{m(ij)}^2 \quad \ldots(42)$$

$$T(\Theta) = vec'(\Theta)vec(\Theta) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\Theta_{(ij)}^2 \quad \ldots(43)$$

عليه تكون دالة الخسارة بالشكل الآتي :

$$L_{QWB}(\widehat{\Theta},\Theta) = w\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{m(ij)}^2\left\{tr\widehat{\Theta}\widehat{\Theta}' - 2\mathrm{tr}\widehat{\Theta}\Theta_m' + \mathrm{tr}\Theta_m\Theta_m'\right\} + (1-\mathrm{w})\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{(ij)}^2\left\{\mathrm{tr}\widehat{\Theta}\widehat{\Theta}' - 2\mathrm{tr}\widehat{\Theta}\Theta' + \mathrm{tr}\Theta\Theta'\right\} \quad \ldots(44)$$

ومقدر بيز لـ (Θ) هو :

$$\widehat{\Theta} = \frac{w\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{m(ij)}^2\,\Theta_{\mathrm{m}} + (1-\mathrm{w})\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{(ij)}^2\;\Theta\,|Y\right)}{w\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{m(ij)}^2 + (1-\mathrm{w})\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kP+1}\theta_{(ij)}^2\;|Y\right)} \quad \ldots(45)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة التربيعية المتوازنة الموزونة هي:

$$R_{QWB}(\widehat{\Theta},\Theta) = wd + (1-\mathrm{w})\left[\mathrm{tr}\widehat{\Theta}\widehat{\Theta}'(tr(V)+\mu'\mu) - 2v\mathrm{ec}(\widehat{\Theta}) * (\mathrm{M}_3 + 2V\mu + (tr(V)+\mu'\mu)\mu) + (2tr(V^2) + 4\mu'V\mu + (tr(V)+\mu'\mu)^2)\right] \quad \ldots(46)$$

إذ إن

V: تمثل مصفوفة التباين للتوزيع اللاحق لـ (Θ).

M_3: العزم المركزي الثالث للتوزيع اللاحق لـ (Θ).

μ: متجه متوسط التوزيع اللاحق لـ $(vec\Theta)$.

(ب) دوال الخسارة الأُسية الخطية (Linex):

1) دالة الخسارة الأُسية الخطية (Linex):

صيغة هذه الدالة هي :

$$L_L(\widehat{\Theta},\Theta)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})-1\right] \qquad \dots(47)$$

إذ إن

a_{ij}: ثابت حقيقي بحيث $_{ij} \neq 0$.

k : عدد السلاسل المدروسة .

p : رتبة الأنموذج

ومقدر بيز لـ (Θ) هو :

$$\therefore \hat{\theta}_{L(ij)}=-\frac{1}{a_{ij}}\ln E\left(e^{-a_{ij}\theta_{ij}}|Y\right) \qquad \dots(48)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة هي :

$$R_L(\widehat{\Theta},\Theta)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[e^{a_{ij}\hat{\theta}_{ij}}E\left(e^{-a_{ij}\theta_{ij}}|y\right)-a_{ij}\hat{\theta}_{ij}+a_{ij}E\left(\theta_{ij}|y\right)-1\right] \quad \dots(49)$$

2) دالة الخسارة الأُسية الخطية (Linex) المتوازنة:

صيغة هذه الدالة هي :

$$\begin{aligned}L_{LB}(\widehat{\Theta},\Theta)=\mathrm{w}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})-1\right]\\+(1-w)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})-1\right] \qquad \dots(50)\end{aligned}$$

ومقدر بيز لـ (Θ) هو :

$$\therefore \hat{\theta}_{LB(ij)}=-\frac{1}{a_{ij}}\ln\left[we^{-a_{ij}\theta_{m(ij)}}+(1-w)E\left(e^{-a_{ij}\theta_{ij}}|Y\right)\right] \qquad \dots(51)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة Linex هي:

$$R_{LB}(\widehat{\Theta},\Theta)=\mathrm{w}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})-1\right]$$
$$+(1-w)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[e^{a_{ij}\hat{\theta}_{ij}}E(e^{-a_{ij}\theta_{ij}}|y)-a_{ij}\hat{\theta}_{ij}+a_{ij}E(\theta_{ij}|y)-1\right]\ldots(52)$$

3) دالة الخسارة الأُسية الخطية (Linex) المتوازنة الموزونة:

هذه الدالة تأخذ صيغة دالة الخسارة الاسية الخطية المتوازنة نفسها لكن يضرب الحد الأول منها بوزن ويكون هذا الوزن دالة موجبة بدلالة مقدر الإمكان الأعظم ، ويضرب الحد الثاني بوزن وهو عبارة عن دالة بدلالة المعلمة الأصلية ، صيغتها هي (Jozani at el.,2006):

$$L_{LWB}(\widehat{\Theta},\Theta)=\mathrm{w}T(\Theta_m)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})-1\right]$$
$$+(1-w)T(\Theta)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij})-1\right]\qquad\ldots(53)$$

إذ إن دوال الوزن $T(\Theta_m)$ و $T(\Theta)$ تأخذ الصيغ المذكورة في المعادلتين(42) و(43) نفسها على التوالي.

ومقدر بيز لـ (Θ) هو :

$$\hat{\theta}_{LWB(ij)}=\frac{1}{a_{ij}}\ln\left[\frac{(1-w)E[vec'(\Theta)vec(\Theta)|\mathrm{Y}]+wvec'(\Theta_m)vec(\Theta_m)}{(1-w)E[vec'(\Theta)vec(\Theta)e^{-a_{ij}\theta_{ij}}|\mathrm{Y}]+wvec'(\Theta_m)vec(\Theta_m)e^{-a_{ij}\theta_{m(ij)}}}\right]\ldots(54)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة Linex المتوازنة الموزونة هي:

$$R(\widehat{\Theta},\Theta)=vec'(\Theta_m)vec(\Theta_m)w\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{kp+1}\left[exp\{a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})\}-a_{ij}(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{m(ij)})-1\right]$$
$$+(1-w)\left[\hat{g}(\Theta)+\frac{1}{2}\int_{\tau}vec'(\widehat{BB}).vec\left[\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta_{fl}\partial\theta_{dr}}\right]^{-1}P(\tau)\,d\tau\right]\qquad\ldots(55)$$

ثانياً: دوال الخسارة لمصفوفة التباين (Σ) :

(أ) دوال الخسارة التربيعية :

1) دالة الخسارة التربيعية:

صيغة هذه الدالة هي(Ni & Sun 2005) :

$$L_{\mathrm{Q}}(\widehat{\Sigma},\Sigma)=tr(\widehat{\Sigma}\,\Sigma^{-2}\widehat{\Sigma})-2tr\widehat{\Sigma}\,\Sigma^{-1}+k\qquad\ldots(56)$$

ومقدر (بيز) لـ (Σ) هو :

$$\therefore \hat{\Sigma}_{Q} = E\left(\Sigma^{-1}|Y\right) * \left[E\left(\Sigma^{-2}|Y\right)\right]^{-1} \quad \dots (57)$$

المعادلة (57) تمثل مقدر (بيز) لمصفوفة التباين (Σ) تحت دالة الخسارة التربيعية.

ودالة المخاطرة التربيعية هي:

$$R_{Q}\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = tr\left(\hat{\Sigma}\, E\,(\Sigma^{-2}|Y)\hat{\Sigma}\right) - 2tr\hat{\Sigma}\, E\,(\Sigma^{-1}|Y) + k \quad \dots (58)$$

ويتم إيجاد التوقعين غير الشرطيين في المعادلة (58) كالآتي:

$$E\left(\Sigma^{-1}|Y\right) = E_{\tau}E_{\Sigma^{-1}}\left(\Sigma^{-1}|Y, \tau\right) \quad \dots (59)$$

$$E\left(\Sigma^{-2}|Y\right) = E_{\tau}E_{\Sigma^{-1}}\left(\Sigma^{-2}|Y, \tau\right) \quad \dots (60)$$

لكن إذا كان

$$\Sigma|Y, \tau \sim IW_{k}\left(\frac{D}{\tau}, T + k + 1\right)$$

فإن

$$\Sigma^{-1}|Y, \tau \sim W(\tau D^{-1}, T)$$

وعليه يكون التوقع في المعادلتين (59) و (60) يمثل التوقع لتوزيع وشارت وكالآتي:

$$E\left(\Sigma^{-1}|Y, \tau\right) = \left(TD^{-1}\tau\right)$$

$$E\left(\Sigma^{-1}|Y\right) = \left(TD^{-1}\right) * \frac{\kappa_{v+1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\kappa_{v}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (61)$$

$$E\left(\Sigma^{-2}|Y\right) = \left(\left(\frac{D^{-2}}{(T+1)(T-2)}\right)^{-1} + \left(\frac{D^{-1}\, trD^{-1}}{(T+1)(T-2)}\right)^{-1}\right) * \frac{\kappa_{v+2}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\kappa_{v}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)} \quad \dots (62)$$

2) دالة الخسارة التربيعية المتوازنة:

صيغة هذه الدالة هي:

$$L_{QB}\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = wtr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_{m}^{-1} - I\right)^{2} + (1-w)tr(\hat{\Sigma}\, \Sigma^{-1} - I)^{2} \quad \dots (63)$$

$$\begin{aligned} L_{QB}\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = {} & w\left[tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_{m}^{-2}\hat{\Sigma}\ \right) - 2tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_{m}^{-1}\right) + k\right] \\ & + (1-w)\left[tr\left(\hat{\Sigma}\, \Sigma^{-2}\hat{\Sigma}\right) - 2tr\left(\hat{\Sigma}\, \Sigma^{-1}\right) + k\right] \end{aligned} \quad \dots (64)$$

و مقدر بيز لـ (Σ) هو(الطالب ، 2017):

$$\hat{\Sigma}_{QB} = [w\Sigma_{m}^{-1} + (1-w)E(\,\Sigma^{-1}|Y)] * [w\Sigma_{m}^{-2} + (1-w)E(\,\Sigma^{-2}|Y)]^{-1} \quad \dots (65)$$

ودالة المخاطرة التابعة لدالة الخسارة التربيعية المتوازنة هي:

$$R_Q(\hat{\Sigma},\Sigma) = w\left[tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-2}\hat{\Sigma}\ \right) - 2tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-1}\right) + k\right] + (1-w)\left[tr\left(\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\ (\ \Sigma^{-2}|\mathrm{Y})\hat{\Sigma}\right) - 2\mathrm{tr}\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\ (\ \Sigma^{-1}|\mathrm{Y}) + \mathrm{k}\ \right] \quad \dots (66)$$

3) دالة الخسارة التربيعية المتوازنة الموزونة:

صيغة هذه الدالة هي :

$$L_{\mathrm{QWB}}(\hat{\Sigma},\Sigma) = wT(\Sigma_m)tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-1} - I\right)^2 + (1-w)T(\Sigma)tr(\hat{\Sigma}\,\Sigma^{-1} - I)^2$$

علماً أن ($(T(\Sigma_m)$) و($T(\Sigma)$) هما دالتا وزن موجبتان وقد اقترحت دالتا الوزن بالشكل الآتي:

$$T(\Sigma_m) = |\Sigma_m| \quad , \quad T(\Sigma) = |\Sigma| \quad \dots (67)$$

وعليه تكون دالة الخسارة التربيعية المتوازنة الموزونة بالصيغة الآتية:

$$L_{\mathrm{QWB}}(\hat{\Sigma},\Sigma) = |\Sigma_m|\left[w\left\{tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-2}\hat{\Sigma}\ \right) - 2tr\left(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-1}\right) + k\right\}\right] + |\Sigma|\left[(1-w)\left\{tr\left(\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\ (\ \Sigma^{-2}|\mathrm{Y})\hat{\Sigma}\right) - 2\mathrm{tr}\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\ (\ \Sigma^{-1}|\mathrm{Y}) + \mathrm{k}\right\}\right] \quad \dots (68)$$

و مقدر (بيز) لـ(Σ) هو:

$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{QW}B} = [\mathrm{w}|\Sigma_m|\Sigma_m^{-1} + (1-w)E(\ |\Sigma|\Sigma^{-1}|\mathrm{Y})] * [w|\Sigma_m|\Sigma_m^{-2} + (1-w)E(\ |\Sigma|\Sigma^{-2}|\mathrm{Y})]^{-1} \quad \dots (69)$$

ودالة المخاطرة التربيعية المتوازنة الموزونة هي :

$$R_{\mathrm{QW}B}(\hat{\Sigma},\Sigma) = \mathrm{w}|\Sigma_m|[tr(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-2}\hat{\Sigma}\ ) - 2tr(\hat{\Sigma}\ \Sigma_m^{-1}) + k] + (1-w)\left\{tr\left(\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\left(\ |\Sigma|\Sigma^{-2}|\mathrm{Y}\right)\hat{\Sigma}\right) - 2\mathrm{tr}\left(\hat{\Sigma}\ \mathrm{E}\ (|\Sigma|\ \Sigma^{-1}|\mathrm{Y})\right) + \mathrm{kE}\ (|\Sigma||\mathrm{Y})\right\} \quad \dots (70)$$

(ب) دوال الخسارة Entropy :

1) دالة الخسارة Entropy:

تكون صيغة هذه الدالة هي :

$$L_{\mathrm{E}}(\hat{\Sigma},\Sigma) = tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right) - \ln\left|\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right| - k \quad \dots (71)$$

إذ إن :

k : عدد السلاسل الزمنية المدروسة.

ومقدر (بيز) لـ(Σ) هو:

$$\therefore\ \hat{\Sigma}_E = \mathrm{E}(\Sigma|\mathrm{Y}) \quad \dots (72)$$

ودالة المخاطرة Entropy هي :

$$R_E\left(\hat{\Sigma},\Sigma\right) = tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\mathrm{E}(\Sigma|\mathrm{Y})\right) - \ln\left(\hat{\Sigma}\right)^{-1} - E(\ln(\Sigma)|Y) - k \qquad \ldots(73)$$

2) دالة الخسارة Entropy المتوازنة :

صيغة هذه الدالة هي :

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{EB}}\left(\hat{\Sigma},\Sigma\right) = & w\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - \ln\left|\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right| - k\right] \\ & + (1-w)\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right) - \ln\left|\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right| - k\right] \qquad \ldots(74) \end{aligned}$$

ومقدر(بيز) لـ(Σ) هو:

$$\hat{\Sigma}_{EB} = w\Sigma_m + (1-w)\mathrm{E}(\Sigma|\mathrm{Y}) \qquad \ldots(75)$$

ودالة المخاطرة Entropy المتوازنة هي :

$$\begin{aligned} R_{EB}\left(\hat{\Sigma},\Sigma\right) = & w\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - \ln\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - k\right] \\ & + (1-w)\left[tr\left(\hat{\Sigma}\, E(\Sigma|\mathrm{Y})\right) - \ln\left(\hat{\Sigma}^{-1}\right) - E(\ln(\Sigma)|\mathrm{Y}) - k\right] \\ & \ldots(76) \end{aligned}$$

3) دالة الخسارة Entropy المتوازنة الموزونة:

صيغة هذه الدالة هي :

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{EWB}}\left(\hat{\Sigma},\Sigma\right) = & wT(\Sigma_m)\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - \ln\left|\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right| - k\right] \\ & + (1-w)T(\Sigma)\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right) - \ln\left|\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\right| - k\right] \qquad \ldots(77) \end{aligned}$$

إذ إن الأوزان (Σ_m) و $T(\Sigma)$ معرفان في المعادلة (67) .

ومقدر بيز لـ(Σ) هو:

$$\hat{\Sigma}_{EWB} = [w|\Sigma_m|\Sigma_m + (1-w)\mathrm{E}(|\Sigma|\,\Sigma|\mathrm{Y})] * [w|\Sigma_m| + (1-w)\mathrm{E}(|\Sigma|\,|\mathrm{Y})]^{-1} \ldots(78)$$

ودالة المخاطرة Entropy المتوازنة الموزونة هي:

$$\begin{aligned} R_{EWB}\left(\hat{\Sigma},\Sigma\right) = & w|\Sigma_m|\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - \ln\left(\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma_m\right) - k\right] \\ & + (1-w)\left[tr\left(\hat{\Sigma}^{-1}\,\mathrm{E}(|\Sigma|\,\Sigma|\mathrm{Y})\right)\right. \\ & \left. - \ln\left(\hat{\Sigma}^{-1}\right)\mathrm{E}(|\Sigma|\,|\mathrm{Y}) - E(|\Sigma|\ln(|\Sigma|)|\mathrm{Y}) - k\,\mathrm{E}(|\Sigma|\,|\mathrm{Y})\right] \qquad \ldots(79) \end{aligned}$$

(6) الجانب التجريبي:

يعرض هذا المبحث تطبيقَ ما توصلنا إليه في المباحث (3،4،5) ، وذلك من خلال بيانات مولدة لِنموذج متجه المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى VMA (1) بتشويش ابيض يتبع توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم المعادلة (1).

1) توليد البيانات:

يعد أسلوب المحاكاة (Simulation) من الأساليب الفعالة في توفير قاعدة تجريبية ملائمة للتحقق من الأسلوب المتبع في البحث ، وتأكيداً للقاعدة النظرية قيد الدراسة، توجد أساليب متعددة للمحاكاة ، وقد شهدت تطوراً كبيراً مواكباً للتطور الذي حصل في استخدام البرمجيات الجاهزة. ويعتمد أسلوب المحاكاة على توليد الأرقام العشوائية التي تحاكي النماذج قيد الدراسة لتوليد بيانات معينة.

2) توليد بيانات أنموذج متجه المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى VMA(1):

من الصعب توليد المشاهدات العشوائية لأنموذج متجه المتوسطات المتحركة عندما يكون التشويش الأبيض يتبع توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم ، لذلك لجأنا لتوليد هذه المشاهدات عن طريق التوزيعات المختلطة. وتم استخدام التوزيع الطبيعي وتوزيع كاوس المعكوس المعمم كما ذكر سابقاً . إذ تم توليد المتجه $\underline{a}_t$ من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات بمتجه متوسط (صفري) ومصفوفة تباين (Σ_k) وعرف المتغير العشوائي $(\underline{u}_t = \tau^{\frac{1}{2}}\underline{a}_t)$ ، الذي يمثل متغيراً عشوائياً مشروطاً بالمتغير العشوائي (τ)، ويتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات بمتجه متوسط (صفري) ومصفوفة تباين $(\tau\Sigma_k)$ ، وللحصول على المتغير العشوائي $(\underline{u}_t)$ غير المشروط نكامل المعادلة الآتية بالنسبة لـ (τ) :

$$\underline{u}_t = \underline{a}_t \int_0^{\infty} \tau^{\frac{1}{2}}\, p(\tau)\; d\tau \qquad \dots (80)$$

$p(\tau)$: تمثل دالة كثافة احتمال توزيع كاوس المعكوس المعمم التي سبق تعريفها في المعادلة (14) ، إذ أن $(\underline{u}_t)$ يمثل متجه حد (التشويش الأبيض) ، الذي يتبع توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم .

خوارزمية مقترحة توضح كيفية توليد (k) لسلسلة زمنية من توزيع(بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم :

1) تحديد عدد السلاسل الزمنية (المتغيرات) (k) ولتكن (k=2) ، وتحديد طول السلسلة (عدد المشاهدات) (T) ولتكن (T=100) .

2) تحديد قيم معلمات توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم (v, λ, ψ) .

3) تعريف مصفوفة التباين (Σ) إذ يجب ان تكون مصفوفة أكيدة الايجابية .

4) توليد (T) مشاهدة عشوائية من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وكالآتي:

$$\underline{a}_t \sim N_k(\underline{0}, \Sigma) \qquad , \quad t = 1,2,\dots,T$$

5) تحويل المشاهدات المولدة في الخطوة (4) إلى مشاهدات مولدة من توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم عن طريق تعريف المتغير العشوائي $(\underline{u}_t)$ المشروط بالمتغير العشوائي (τ) وفق الصيغة الآتية :

$$\underline{u}_t = \tau^{\frac{1}{2}}\, \underline{a}_t$$

عليه يكون

$\underline{a}_t|\tau \sim N_k(\underline{0}, \tau\Sigma)$

6) إيجاد المتغير u_t غير المشروط بحل المعادلة (80) نحصل على:

$$\underline{u}_t = \underline{a}_t \frac{K_{\frac{2v+1}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{4}}} \qquad \dots (81)$$

لغرض توليد مشاهدات أنموذج متجه المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى المعرف بالآتي :

$$\underline{y}_t = \underline{c} - \Theta_1 \underline{a}_{t-1} + \underline{a}_t \qquad \dots (82)$$

1) نعرف المصفوفة (Θ_1)، ونتحقق من شرط الانعكاس .

2) نحسب متجهات مشاهدات السلسلة $(\underline{y}_t)$ باعتماد الأنموذج (82) ،أذ تحسب مشاهدة مشاهدة إلى حد المشاهدة (T=100).

المعلمات الافتراضية لـ(Θ, Σ) موضحة في الجدول (1) ، تم التحقق من شرط الانعكاس للأنموذج بإيجاد جذور المعادلة

$$Det\left(I_k + \theta_1 Z + \theta_2 Z^2 + \cdots + \theta_q Z^{q2}\right) = 0 \qquad \dots (83)$$

إذ يكون للنموذج خاصية الانعكاس إذا كانت القيمة المطلقة لجذور المعادلة (83) أكبر من الواحد (خارج دائرة الوحدة) ،إذ كانت القيمة المطلقة للجذور هي (6.306, 2.265) ونلحظ أن كليهما أَكبر من الواحد مما يدل على تحقق الشرط.

3) تقدير معلمات الأَنموذج:

تم تقدير المعلمات (Θ, Σ) بأسلوب بيز بآستخدام جميع دوال الخسارة المذكورة ، كما تمت المفاضلة بين المقدرات بآستخدام معيار دوال المخاطرة ومعيار متوسط مجموع مربعات البواقي بالنسبة لمصفوفة المعلمات (Θ) بالاعتماد على جميع التوافقات بين القيم الافتراضية لمعلمات توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم ،وكذلك الوزن (w) الموضحة في الجدول (1)، وذلك بآستخدام محيط ماتلاب MATLAB–R2015 .

الجدول (1) :يوضح القيم الافتراضية المعتمدة لجميع المعلمات

	v	λ	ψ	w	θ
1	3	0.2	5	0.2	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$
2	9	5	9	0.5	
3		9		0.9	

ونتيجة للتوافيق بين جميع القيم الافتراضية لمعلمات توزيع (بسل) متعدد المتغيرات المحور المعمم الموضحة في الجدول (1) تم الحصول على (12) عينة ، وتم تقدير مصفوفة المعلمات (θ) عندما (Σ) غير معلومة ، ثم المفاضلة بين جميع المقدرات وجميع العينات، وتبين أن أفضل هذه المقدرات هي الموضحة في الجدول (2) .

الجدول(2) :يوضح دوال المخاطرة ومتوسط مجموع مربعات البواقي لمقدرات بيز لمصفوفة المعلمات $(\boldsymbol{\theta})$ تحت دوال الخسارة المختلفة عندما تكون $(\boldsymbol{\Sigma})$ غير معلومة

$v = 3$, $\lambda = 9$, $\psi = 5$				
w		0.2	0.5	0.9
$\hat{\theta}_Q$	Risk	0.0475		
	MSE	2.5390		
$\hat{\theta}_{QB}$	Risk	0.0380	0.0238	0.0048
	MSE	2.5390	2.5390	2.5390
$\hat{\theta}_{QWB}$	Risk	0.0062	0.0040	0.00085072
	MSE	2.5432	2.5410	2.5390
$\hat{\theta}_L$	Risk	0.00024266		
	MSE	2.5389		
$\hat{\theta}_{LB}$	Risk	0.0001600	0.0001213	0.00004368
	MSE	2.5389	2.5389	2.5389
$\hat{\theta}_{LWB}$	Risk			
	MSE	2.5623	2.5511	2.5400

نلحظ أن أفضل المقدرات لدوال الخسارة التربيعية ولدوال خسارة Linex على الترتيب هي الآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{QWB}} = \begin{bmatrix} 0.1785 & 0.0067 \\ 0.2597 & -0.0007 \end{bmatrix}, \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{LB}} = \begin{bmatrix} 0.1709 & 0.0114 \\ 0.2516 & 0.0041 \end{bmatrix} \ , w = 0.9$$

والمقدر الذي يمتلك أقل MSE، وأقل دالة مخاطرة هو المقدر $\hat{\theta}_L$ نفسه عندما $w = 0.9$.

(7) الاستنتاجات:

*.من نتائج التطبيق العملي تبين أن أفضل مقدر لمتجه معلمات أنموذج المتوسطات المتحركة ($vec(\theta)$) (أو مصفوفة المعلمات) هو مقدر دالة الخسارة التربيعية المتوازنة الموزونة من بين دوال الخسارة التربيعية لجميع العينات المدروسة عند الوزن w=0.9 عند استخدام معيار دالة المخاطرة ، وعند

استخدام معيار متوسط مجموع مربعات البواقي نلحظ أن المقدر لـ θ تحت دالة خسارة Linex المتوازنة هو الأفضل في أغلب العينات المدروسة.

*. بثبوت المعلمتين (λ, v) تزداد قيمة دالة المخاطرة بزيادة قيمة المعلمة (ψ) في أغلب دوال الخسارة والعينات.

المصادر:

1) الطالب، محاسن صالح وسعيد،هيفاء عبد الجواد و صالح، وصفي طاهر، (2017)،"**التحليل البيزي لبعض نماذج السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات غير الطبيعية تحت دوال خسارة مختلفة**"، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل ، أطروحة دكتوراه غير منشورة ، العراق.

2) العبيدي ، سرمد عبدالخالق و سعيد، هيفاء عبدالجواد ، (2013)،"**التقدير اللابيزي و البيزي لبعض معلمات نموذج انحدار بسل المحور المعمم مع التطبيق على بيانات سوق العراق للاوراق المالية**"، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل ، رسالة ماجستير غير منشورة ، العراق.

3)Albassam, M. S. and Ali, S. S., (2013), "**Selection of prior distribution in the indirect Bayesian identification of Moving average models**", Canadian Journal on computing in mathematics, Natural sciences and medicine , Vol. 1. No. 2 .

4) Fan , C. and Yao, S., (2008), "**Bayesian approach for ARMA process**", International business research , Vol. 4, No. 4.

5) Hormann, W. and Leydold, J., (2014), "**Generating generalized Inverse Gaussian Random Variates**", Journal Statistics and computing, Vol. 24, Issue 4, pp. 547-557.

6) Jozani, M. J. , Marchand, E. and Parzian, A., (2006)a , "**Bayes Estimation Under A General Class of Balanced Loss Functions**", https://www.usherbrooke.ca/mathematiques/fileadmin/…/rr36

7) Jozani, M. J. , Marchand, E. and Parzian, A., (2006)b , "**On Estimation with Weighted Balanced-Type Loss Functions**", Statistics & Probability Letters, 76, pp. 773-780.

8) Kim, H. and Genton, M. G., (2011), "**Characteristic Functions of Scale Mixtures of Multivariate Skew-Normal Distributions**", Journal of Multivariate Analysis, 102, pp.1105-1117.

9) Kollo, T. and Rosen, D. V., (2005), "**Advance Multivariate Statistics with Matrices**", Springer.

10) Malan, K., (2007), "**Stationary Multivariate Time Series Analysis",** Msc Thesis, University of Pretoria, Pretoria .

11) Ni, S. and Sun, D. ,(2005), " **Bayesian Estimation for Vector Autoregressive Models**", American Statistical Association Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 23, No. 1, pp.105-117.

12) Schott, J. R., (1997), "**Matrix Analysis for Statistics**", John Wiley & Sons, Canada.

13) Tsay, R. S., (2005),"**Analysis of Financial Time Series**", 2nd ed., John Wiley & Sons, Canada.

14) Wei, W.W. S., (2006), "**Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**", 2nd ed., Person Education ,Inc, U.S.A.

15) Weron, R. and Misiorek, A., (2007), "**Heavy Tails and Electricity Prices : Do Time Series Models with Non-Gaussian Counterparts** ", PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMCZNEJ WE WROCLAWIU, NR 1076,S. 472-480.