Existence Of (47,5)- Arcs in The Projective Plane PG (2,13).

Shuaa Mahmood Aziz
Department of Mathematics
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 10/06/2002 **Accepted on: 05/11/2002**

ABSTRACT

In this work we show the existence of complete (47,5)-arcs which are unknown until now. The upper bound for the (k,5)- arcs is narrowed in the finite projective plane PG (2,13). The narrowing is fulfilled by finding complete (47,5)-arcs which are 372 arcs. However, only one (47,5)-complete arc out of the 372 is considered in this work. Furthermore the relation between complete (k, n)-arcs and minimal t-blocking sets is proved, in addition to between the connection of our arc and the code.

Keywords: (47,5)- arcs, finite projective plane PG (2,13), complete (k, n)-arcs, minimal t-blocking sets.

وجود الأقواس -(47,5)
في المستوي الإسقاطي PG(2,13)

شعاع محمود عزيز

قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ الاستلام: 2002/06/10 **تاريخ قبول البحث: 2002/11/05**

الملخص

في هذا البحث تم إثبات وجود الأقواس-(47,5) ، التي كانت تعتبر مجهولة الوجود الى حد الآن .إذ تم تضييق القيد الأعلى للأقواس -(k,5) في المستوي

الإسقاطي المنتهي $PG(2,13)$ وذلك بإيجاد أقواس تامّة من النمط-$(47,5)$ و كان عددها 372 قوساً.وقد تم ذكر قوس واحد من الأقواس الـ 372 .فضلاً عن ذلك فقد تمت برهنة علاقة بين الأقواس -(k,n) التامة والمجموعات القالبية الأصغرية فضلا عن علاقة القوس المذكور مع الشفرة(code).

الكلمات المفتاحية: الأقواس-$(47,5)$، المستوي الإسقاطي المنتهي $PG(2,13)$، الأقواس -(k,n) التامة، المجموعات القالبية الأصغرية.

1: التعاريف:

نستهل بإعطاء بعض التعاريف التي ستستند الى حقول كالوا $GF(q)$ والتي بدورها تعتمد على الحلقة Z_p حيث $GF(p) \cong Z_p \cong Z/pZ$.

(1−1) تعريف[1] :

ليكن S,S' فضائين اسقاطيين فان الإسقاط أو التحويل ألإسقاطي (projectivity) Σهو علاقة تقابل $\Sigma:\ S\to S'$ (Bijection) يمكن تمثيلها بالمصفوفة غير المفردة T (non- singular matrix) بحيث إذا كانت $\sum p(x')=p(x)$ فإنّ $tx'=xT$ حيث x',x هما متجها الإحداثيات (coordinate vectors) للنقطتين $p(x'),p(x)$ على التوالي .

(2−1) تعريف[1] : إذا كانت

$$F(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\ldots-a_0$$

متعددة حدود أحادية، فان المصفوفة المرافقة (companion matrix) $C(F)$ هي المصفوفة الاتية ذات البعد $n\times n$

$$C(F)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 8 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(1−3) تعريف[3]:

إذا كان Π إسقاطاً على المستوي P فإن Π يسمى إسقاطاً دوّاراً إذا كان

$$\mathbf{p^{(n)} = \Pi^n p = p \qquad \forall \quad p \in P.}$$

مثال ذلك نجد ان الإسقاط الأتي هو إسقاط دوّار على المستوي PG(2,13)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1−4) ملاحظة[3]: إن عدد نقاط PG(n,q) هو $\theta(n) = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

إستناداً إلى الملاحظة (1−4) سيكون عدد نقاط المستوي ألإسقاطي PG(2,13) هو 183 نقطة ؛ وكذلك بالاستناد الى مبدأ ألثنوية والذي يتحقق في الفضاء ألإسقاطي سيكون عدد خطوط المستوي ألإسقاطي PG(2,13) هو 183 خط . ووِفقاً لبديهيات الهندسة ألإسقاطية ستقع 14 نقطة على كل خط ,وكل خطين يشتركان بنقطة واحدة فقط .

2. الإسقاط الدوّار في المستوي ألإسقاطي PG(2,13)

حسب تعريف الإسقاط الدوّار أعلاه يمكننا إيجاد المصفوفة الاتية :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبهذا تكون متعددة الحدود الأحادية لهذه المصفوفة المرافقة هي:

$F(x)=x^3-12x^2-11$

3. نقاط المستوي PG(2,13) وخطوطه

تم ترقيم النقاط من 0 إلى 182 وإعطاء الإحداثيات (1,0,0) للنقطة 0 وبتطبيق الإسقاط الدوّار أعلاه سنحصل على جدول النقاط الأتي:

0 1 0 0	**1** 0 1 0	**2** 0 0 1	**3** 1 0 7
4 1 1 7	**5** 1 1 8	**6** 1 9 3	**7** 1 11 2
8 1 10 0	**9** 0 1 10	**10** 1 0 9	**11** 1 8 7
12 1 1 2	**13** 1 10 4	**14** 1 5 5	**15** 1 4 1
16 1 7 9	**17** 1 8 11	**18** 1 3 5	**19** 1 4 6
20 1 12 3	**21** 1 11 9	**22** 1 8 4	**23** 1 5 8
24 1 9 0	**25** 0 1 9	**26** 1 0 2	**27** 1 10 7
28 1 1 4	**29** 1 5 12	**30** 1 6 11	**31** 1 3 12
32 1 6 12	**33** 1 6 4	**34** 1 5 11	**35** 1 3 9
36 1 8 5	**37** 1 4 0	**38** 0 1 4	**39** 1 0 12
40 1 6 7	**41** 1 1 0	**42** 0 1 1	**43** 1 0 1
44 1 7 7	**45** 1 1 1	**46** 1 7 1	**47** 1 7 4
48 1 5 3	**49** 1 11 10	**50** 1 2 3	**51** 1 11 3
52 1 11 11	**53** 1 3 1	**54** 1 7 2	**55** 1 10 12
56 1 6 2	**57** 1 10 2	**58** 1 10 3	**59** 1 11 0
60 0 1 11	**61** 1 0 10	**62** 1 2 7	**63** 1 1 9
64 1 8 2	**65** 1 10 9	**66** 1 8 9	**67** 1 8 6
68 1 12 12	**69** 1 6 1	**70** 1 7 10	**71** 1 2 8
72 1 9 12	**73** 1 6 9	**74** 1 8 3	**75** 1 11 4
76 1 5 10	**77** 1 2 4	**78** 1 5 4	**79** 1 5 6
80 1 12 2	**81** 1 10 10	**82** 1 2 1	**83** 1 7 8
84 1 9 5	**85** 1 4 4	**86** 1 5 1	**87** 1 7 3
88 1 11 6	**89** 1 12 9	**90** 1 8 12	**91** 1 6 3
92 1 11 8	**93** 1 9 2	**94** 1 10 6	**95** 1 12 10
96 1 2 5	**97** 1 4 2	**98** 1 10 8	**99** 1 9 6
100 1 12 11	**101** 1 3 4	**102** 1 5 9	**103** 1 8 8
104 1 9 1	**105** 1 7 5	**106** 1 4 9	**107** 1 8 0
108 0 1 8	**109** 1 0 3	**110** 1 11 7	**111** 1 1 5
112 1 4 11	**113** 1 3 6	**114** 1 12 4	**115** 1 5 2

116 1 10 5	**117** 1 4 8	**118** 1 9 4	**119** 1 5 0
120 0 1 5	**121** 1 0 11	**122** 1 3 7	**123** 1 1 10
124 1 2 9	**125** 1 8 10	**126** 1 2 10	**127** 1 2 11
128 1 3 0	**129** 0 1 3	**130** 1 0 5	**131** 1 4 7
132 1 1 11	**133** 1 3 10	**134** 1 2 0	**135** 0 1 2
136 1 0 4	**137** 1 5 7	**138** 1 1 12	**139** 1 6 0
140 0 1 6	**141** 1 0 6	**142** 1 12 7	**143** 1 1 6
144 1 12 6	**145** 1 12 8	**146** 1 9 11	**147** 1 3 8
148 1 9 8	**149** 1 9 10	**150** 1 2 12	**151** 1 6 6
152 1 12 1	**153** 1 7 0	**154** 0 1 7	**155** 1 0 8
156 1 9 7	**157** 1 1 3	**158** 1 11 5	**159** 1 4 12
160 1 6 5	**161** 1 4 5	**162** 1 4 10	**163** 1 2 2
164 1 10 1	**165** 1 7 12	**166** 1 6 10	**167** 1 2 6
168 1 12 5	**169** 1 4 3	**170** 1 11 12	**171** 1 6 8
172 1 9 9	**173** 1 8 1	**174** 1 7 11	**175** 1 3 2
176 1 10 11	**177** 1 3 11	**178** 1 3 3	**179** 1 11 1
180 1 7 6	**181** 1 12 0	**182** 0 1 12	**End of Points**

جدول نقاط المستوي ألإسقاطي PG(2,13)

وعليه بإمكانِنا اختيار الخط الأول في هذا المستوي ليتكون من النقاط الاتية:
{1,2,9,25,38,42,60,108,120,129,135,140,154,182}
وبتطبيق الإسقاط الدوار عليه ستتكوّن الخطوط الباقية الى حد الخط الأخير والذي سيكون:
{0,1,8,24,37,41,59,107,119,128,134,139,153,181}

(1−3) **تعريف**[1]: **القوس − (k,n)** (**(k,n)-arc**) في المستوي PG(2,q) هو مجموعة تتكون من k من النقاط بحيث يوجد n منها على خط ولا تقع (n+1) منها على أي خط.ويقال للقوس من النمط (k,n) بأنه **تام** (**complete**) إن لم يكن محتوىً في قوس من النمط (k+1,n).

(3−2) **تعريف**[1] : يسمى الخط في المستوي الاسقاطي والذي يحوي على i من نقاط القوس -(k,n) بـ **القاطع− I** (I-secant) .

(3−3) **تعريف**[2]:

يقال للمجموعة **S** إنها **مجموعة -b قالبية -t** (t-blocking b-set)إذا كان كل خط في المستوي PG(2,q) يقطع S بما لا يقل عن t من النقط، حيث أن |S|=b ويوجد خط يقطع S بـ t من النقط بالضبط . يقال للمجموعة القالبية -1 أنها **تافهة** (trivial) إذا احتوت على خط من الخطوط بكل نقاطه.

تسمى المجموعة القالبية -t **أصغرية** (minimal) أو **غير قابلة للتحليل** (irreducible) عندما لاتوجد مجموعة جزئية فعلية منها تشكل مجموعة قالبية-t.

(3−4) **مبرهنة**[2]: في المستوي الاسقاطي PG(2,q)

القوس A من النمط (k,n) يكون تاماً إذا وفقط إذا كانت PG(2,q)\A هي مجموعة أصغرية قالبية−(q+1-n) .

البرهان :

(⇐)ليكن القوس A من النمط (k,n) قوساً تاماً . واضح أن متممته S=PG(2,q)\A هي مجموعة قالبية − (q+1-n) تحوي q^2 +q+1-k من النقاط .إن لم تكن S أصغرية فانه توجد في الأقل نقطة p∈S بحيث أن S\{p} هي مجموعة قالبية −(q+1-n) تحوي q^2 +q-k من النقاط.

والآن بالنظر الى المتممة لهذه المجموعة الأخيرة نجد أنها تمثل القوس A مضافاً اليه النقطة p وبحيث يكون من النمط (k+1,n) وهذا يناقض الفرض ،وعليه فإن S أصغرية .

($\Rightarrow$) لتكن S مجموعة أصغرية $q^2+q+1-k$ قالبية−(q+1-n). واضح ان متممتها هو القوس A من النمط (k,n) . فلو كان A قوساً غير تام، فتوجد نقطة $p \notin A$

بحيث ان $A \cup \{p\}$ يمثل القوس− (k+1,n) . ولكن ظهر لنا ان متممة هذا القوس الجديد هي المجموعة q^2+q-k القالبية−(q+1-n) وهي تمثل $S \setminus \{p\}$ وهذا مناقض للفرض ■

(4−0) الأقواس الجديدة

سوف نرمز لأكبر قيمة لـ k بحيث يكون القوس− (k,n) موجوداً بالرمز $m_{2,q}(n)$ وكذلك نرمز لأصغر قيمة لـk بحيث أن القوس− (k,n) يكون تاماً بالرمز $t_{2,q}(n)$

وواضح أن

$$t_{2,q}(1)=m_{2,q}(1)=1; t_{2,q}(q+1)=m_{2,q}(q+1)=q^2+q+1$$

وفيما يتعلق بالمستوي ألإسقاطي PG(2,13) فإن الملخص للقيم المعلومة الى حد الآن المتعلقة بـ $m_{2,13}(n)$ يتمثل بالجدول الاتي :

n	2	3	4	5	6	7
$m_{2,13}(n)$	14	23	34-40	46-53	61-66	79
n	8	9	10	11	12	13
$m_{2,13}(n)$	92	105	116-119	131-133	144-147	169

جدول بالقيم المنشورة في المصدر[5] لـ $m_{2,13}(n)$

نلاحظ عندما يكون n=5 فإن القيد الأعلى لطول القوس (عدد نقاطه) هو 53 نقطة وهذا من الناحية النظرية فقط إذ لم يتم الحصول الى حد الآن على أي قوس−(53,5) بل كان أعلى ما أمكن إيجاده هو أقواس بطول 46 نقطة فقط ولهذا تمت كتابة القيد بالصيغة 46-53 .

في هذا البحث نثبت وجود الأقواس-(47,5) وذلك بذكر قوس واحد فقط من بين 372 قوساً تم الحصول عليها وبالإستناد الى جدول خطوط المستوي PG(2,13) في الفقرة (2−3)أعلاّه أمكننا الحصول الى القوس (47,5) والذي يتكون من النقاط الاتية:

$$\{0,1,2,4,6,15,20,21,22,31,32,35,36,37,38,44,48,\\ 52,54,56,69,70,75,76,86,88,89,96,103,106,108,\\ 109,111,113,115,126,134,136,138,140,156,161,\\ 163,166,173,174,181\}$$

لهذا القوس كالآتي: T_iوحسب التعريف (3−2) تكون القواطع .

$T_0 =16, T_1 =10, T_2= 13, T_3= 20, T_4= 58, T_5= 66$.

(4−2) بالاستفادة من المبرهنة (3−4) سيكون الآن وبشكل حتمي وجود المجموعة القالبية ألأصغرية-9 ذات 136 نقطة والتي تمثل المتمم (complement) للقوس أعلاّه .

(4−3) علاقة الأقواس-(47,5) مع الشفرة (code) [4]:

افرض أن $K=\{P_1,\dots,P_n\}$ هي مجموعة من n من النقاط في PG(k-1,q) , نعرف المصفوفة G ذات البعد k×n , حيث $G=(P_1 \ \dots \ P_n)$ على الحقل F_q.فإن G هي المصفوفة المولّدة (generator matrix) للشفرة C والتي تكتب بالشكل [n,k,d] code على الحقل F_q إذا وفقط إذا كان كل أوّلي في PG(k-1,q)يحتوي على الأكثر n-d من نقاط K ويوجد على الأقل أوّلي يضم بالضبط n-d على من نقاط K .

وبناءً على وجود القوس أعلاّه سيكون في PG(2,13) عندما k=3 يمكننا إعتبار K هو القوس في الفقرة (4−1) أعلاه. ستكون الآن وبشكل حتمي الشفرة [47,3,42] code موجودة.

المصادر

1–بان عبد الكريم قاسم (2001) ," القيمة العظمى للأقواس-(k,4) في المستوي الإسقاطي(PG(2,11 " ,رسالة ماجستير ,جامعة الموصل.

2–شعاع محمود عزيز (2001),"حول القيد الأدنى للأقواس -(k,n) التامة في المستوي ألإسقاطي(PG(2,q ",رسالة ماجستير ,جامعة الموصل.

3-Horadam, A.F.(1970),'A Guide to undergraduate Projective Geometry' ,Pergamon Press Australia ,1st. Ed.

4- Hirschfeld, J.W.P. and Storme, L.(1998)'The Packing Problem in Statistics, Coding Theory and Finite Projective Spaces', Journal of Statistical Planning and Inference **72**(1998) pages 355-380.

5-Hirschfeld, J.W.P. and L. Storme) (2001),'The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces: update 2001.'Finite Geometries, Developments in Mathematics, Kluwer, Boston, 2001, pp. 201-246.