Steady Flow in a Symmetric Thin Liquid Film on an Inclined Surface

Joseph Gh. Abdul-Ahad
College of Education
University of Mosul

Khidr M.S. Khidr
College of Science
University of Kirkuk

Received on: 03/10/2004 **Accepted on: 05/04/2005**

ABSTRACT

In this paper, we consider steady incompressible viscous flow in a symmetric thin liquid film on an inclined surface with angle β in two dimensions with no inertia force. The surface of the film is taken to be real that is there is no shear stress on the liquid surface. We found the differential equations that govern the flow. We solve these equations numerically by using Rang Kutta method.

Keywords: Flow, thin liquid film, inclined surface, incompressible flow, differential equations, Rang Kutta method.

الجريان اللازمني في غشاء رقيق متناظر على سطح مائل

جوزيف غانم عبد الأحد
كلية التربية
جامعة الموصل

خضر محمد صالح خضر
كلية العلوم
جامعة كركوك

تاريخ استلام البحث: 2004/10/03 **تاريخ قبول البحث: 2005/04/05**

الملخص

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة المتناظرة للسوائل غير القابلة للانضغاط وبانعدام قوى القصور الذاتي وبفرض أن جهد القص على السطح يكون صفراً. وفي هذا البحث تمت دراسة الجريان اللازمني عندما يكون الغشاء مائلا بزاوية β. وقد حلت هذه المعادلات بطريقة رنج–كوتا العددية.

الكلمات المفتاحية: الجريان، الأغشية الرقيقة، سطح مائل، السوائل غير القابلة للانضغاط، المعادلات التفاضلية، طريقة رنج–كوتا.

(1-1) المقدمة Introduction

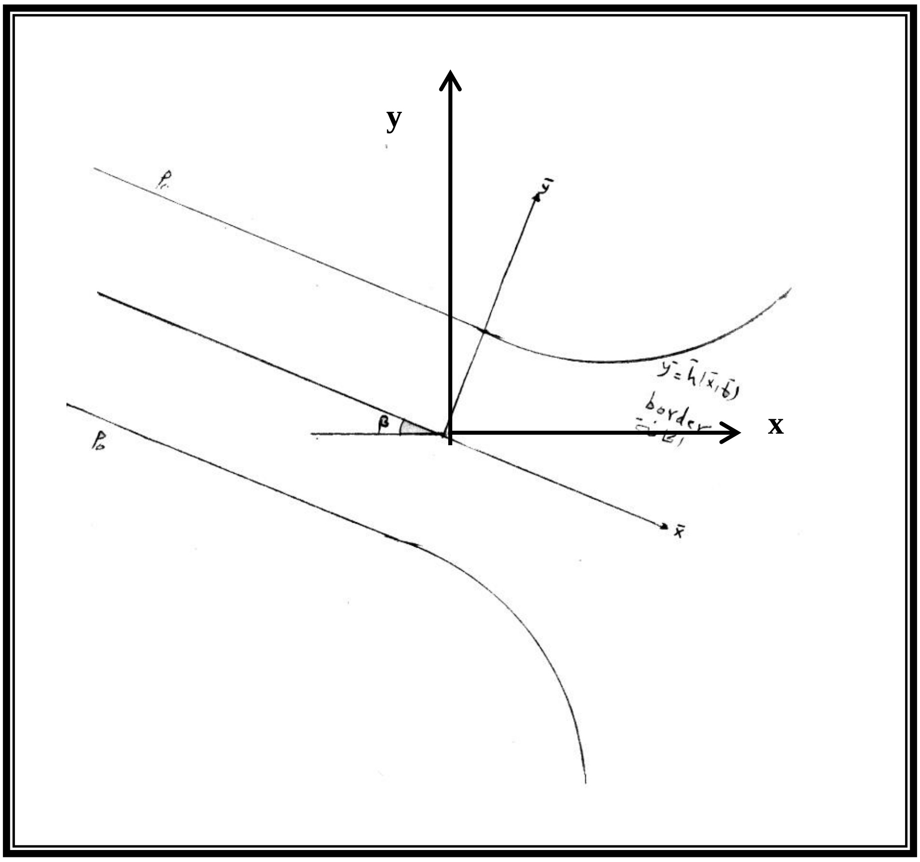
تمت دراسة الأغشية الرقيقة (Thin films) التي تتكون عادة من الهواء وسائل لزج مع الشد السطحي (surface tension) سابقا دراسة مستفيضة . وان إحدى هذه التأثيرات هي نحافة (thinness) هذه الأغشية والتي لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عمليات الطلاء . على الرغم من العديد من الدراسات في مجال الأغشية الرقيقة مثل (Rayleigh,1890)،(Mysels, 1959) ، (Isenperge, 1978) فإنه لا يوجد وصف دقيق

للظواهر التي تحدث في هذه الأغشية الرقيقة ،إذ درس (Abdulahad, 1994) الشروط الديناميكية على سطوح الأغشية الرقيقة، كما درس (Morshed, 1996) الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة في حالتي الجريان المستقر وغير المستقر آخذا بالاعتبار الموجات في هذه الأغشية عندما تكون لزوجة السائل صغيرة جدا.

كما اهتم كل من (B. R. Duffy and S. K. Wilson, 1997) بدراسة جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للموائع والتي يكون فيها الغشاء سطحا حرا وبوجود الشد السطحي ودرس (Javier, 2000) الجريان في الأغشية الرقيقة والذي يكون للشد السطحي وللجاذبية التأثير في جريان المائع ، وباستخدام نظرية التزييت. وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة السائلة والمائلة بزاوية β وبإهمال تأثير قوى القصور الذاتي وباعتبار ان السطح لا يمتلك أي جهد قص على سطح الغشاء.

(1-2)المعادلات التي تحكم الجريان Equations that Govern the Flow

لوصف الجريان نأخذ الإحداثيات الكارتيزية $\bar{x}$ و $\bar{y}$ حيث ان الإحداثي $\bar{x}$ هو أحداثي المتناظر وان الجريان يكون باتجاه الإحداثي $\bar{x}$ والذي يميل بزاوية β عن الإحداثي الكارتيزي x وان الإحداثي $\bar{y}$ يكون عموديا عليه وكما موضح بالشكل (1-1) إذ أن للتعجيل الأرضي g تأثيراً كبيـــــــــــــــــــــــــــراً فـــــــــــــــــــــــــــي الجريـــــــــــــــــــــــــــان



الشكل (1-1) المقطع المستعرض لغشاء متناظر المائل بزاوية β

نفرض أن $\bar{u}$ و $\bar{v}$ هي مركبات السرعة في الاتجاهين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ على الترتيب ، $\bar{P}$ يمثل الضغط ولتكن معادلة السطح الحر للغشاء بالصيغة الأتية :

$$\bar{y} = \mp \bar{h}\left(\bar{x}, \bar{t}\right) \qquad \ldots(1\text{-}2)$$

سوف نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} << 1$$

على المجال $\bar{x}$.

وبهذا يمكن إهمال الحد $\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right)^2$ من معادلة الانحناء والذي له الصيغة :

$$k=\frac{\dfrac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1+\left\{\dfrac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(2\text{-}2)\ldots$$

إذ تصبح بالصيغة الأتية:

$$\mathbf{k}=\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{h}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2} \qquad \ldots(3.2)$$

وإن معادلة الزخم الطولي باتجاه $\bar{x}$ لها الصيغة الأتية :

$$\rho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}\right)+\rho g_{\bar{x}} \qquad \ldots(4\text{-}2)$$

وباستخدام نظرية التزييت تصبح بالصيغة الأتية :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}=\mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\rho g\sin(\beta) \qquad \ldots(5\text{-}2)$$

وإن معادلة الزخم العرضي باتجاه $\bar{y}$ لها الصيغة التالية :

$$\rho\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}+\mu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}\right)+\rho g_{\bar{y}} \qquad \ldots(6\text{-}2)$$

وباستخدام نظرية التزييت وبتكامل المعادلة (2-9) بالنسبة لـ $\bar{y}$ باشتقاق $\bar{v}$ بعد التكامل مرتين بالنسبة لـ $\bar{x}$ نحصل على المعادلة الأتية :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}=-\mu\,\bar{y}\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3}-\rho g\cos(\beta) \qquad \ldots(7\text{-}2)$$

حيث أن : μ يمثل اللزوجة ، ρ يمثل الكثافة ، g يمثل التعجيل الأرضي.

وإن معادلة الاستمرارية لها الصيغة الأتية:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}=0 \qquad \ldots(8\text{-}2)$$

وبما أن الجريان باتجاه الإحداثيين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ فإن (8 – 2) تصبح بالصيغة الأتية :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=0 \qquad \ldots(9\text{-}2)$$

وإن الجريان غير قابل للإنضغاط.

(3–3) الشروط الحدودية Boundary Conditions

1. شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء

Tangential stress condition at free surface

$$\tau=\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)s=0 \qquad \ldots(1\text{-}3)$$

حيث s يمثل سطح الغشاء الحر .

2. شرط الإجهاد العمودي Normal – stress condition

$$\tilde{w}=-\sigma\left(\pm k\right) \qquad \ldots(2\text{ - }3)$$

حيث أن : σ يمثل الشد السطحي .

وبتعويض المعادلة (3.2) في (2.3) نحصل على ما يأتي:

$$\tilde{w}=\sigma\ \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \qquad \ldots(3\text{-}3)$$

كما يمكن إعطاء مركبة الإجهاد العمودي (بصيغة أخرى) وهي:

$$\tilde{w}=\left(-\bar{P}+2\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)s \qquad \ldots(4\text{-}3)$$

ومن المعادلتين (3.3) و (4.3) نحصل على ما يأتي:

$$\left[-\bar{P}+2\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right]_s=\sigma\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial\bar{x}^2}\qquad\ldots(5\text{-}3)$$

ويمكن كتابة المعادلة (2–9) بالصيغة الأتية:

$$\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)_s=-\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)_s\qquad\ldots(6\text{-}3)$$

وبتعويض (3 - 6) في (3 - 5) وبعد الترتيب نحصل على مايأتي:

$$\bar{P}=-\sigma\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial\bar{x}^2}-2\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\qquad\ldots(7\text{ - }3)$$

3. شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر

Material derivative at free surface condition

من معادلة سطح الغشاء $\bar{y}=\bar{h}(\bar{x},\bar{t})$ فإن :

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=\bar{y}-\bar{h}(\bar{x},\bar{t})=0$$

وباستخدام المؤثر

$$\frac{D}{D\bar{t}}=\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}$$

نحصل على ما يأتي:

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial\bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial F}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}=0\quad\text{on}\quad\bar{y}=\bar{h}$$

أو

$$\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}}+\bar{h}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}=0$$

أو

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{u}\,\bar{h}) = 0$$

وفي حالة الجريان اللازمني تصبح بالصيغة الأتية:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{u}\,\bar{h}) = 0 \qquad \ldots(8\text{-}3)$$

(3-4) الإشتقاقات والتكاملات اللازمة لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان :

نشتق المعادلة (3-7) بالنسبة لـ $\bar{x}$ فنحصل على ما يأتي:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} = -\sigma \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 2\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \qquad \ldots(1 - 4)$$

ومن المعادلتين (2 - 5) و (4-1) نحصل على ما يأتي :

$$-\sigma \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 2\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \rho g \sin(\beta)$$

أو

$$-\sigma \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 3\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \rho g \sin(\beta) = 0$$

أو

$$\sigma \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} + 3\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \rho g \sin(\beta) = 0 \qquad \ldots(2\text{-}4)$$

نكامل المعادلة (4 - 2) مرتين بالنسبة لـ $\bar{x}$ فنحصل على ما يأتي:

$$\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} + 3\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \rho g \sin(\beta)\bar{x} = A \qquad \ldots(3\text{-}4)$$

و

$$\sigma\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}+3\mu\,\bar{u}+\frac{1}{2}\rho\,g\sin(\beta)\bar{x}^{2}=A\,\bar{x}+R$$

حيث أن A,R ثوابت التكامل .

أو

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}+\frac{3\mu\,Q}{\sigma\,\bar{h}}+\frac{1}{2}\,\frac{\rho g}{\sigma}\sin(\beta)\bar{x}^{2}=\frac{A}{\sigma}\,\bar{x}+\frac{R}{\sigma} \qquad \ldots(4.4)$$

ومن تكامل المعادلة (3 - 8) فان $Q=\bar{u}\,\bar{h}$ حيث ان Q يمثل التصريف .

(3.5) المتغيرات اللابعدية

Non – Dimensional variables

$$\left.\begin{aligned}\bar{h}&=\left(\frac{\mu^{3}Q^{3}}{\sigma^{2}\rho g}\right)^{1/5} f\\ \bar{x}&=\left(\frac{\mu\sigma Q}{\rho^{2}g^{2}}\right)^{1/5}\xi\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(1\text{-}5)\ldots$$

الآن لحل المعادلة (4 - 4) نأخذ الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : نفرض ان R=0 و A≠0 في المعادلة (4 - 4) فتصبح بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}+\frac{3\mu\,Q}{\sigma\,\bar{h}}+\frac{1}{2}\,\frac{\rho g}{\sigma}\sin(\beta)\bar{x}^{2}=\frac{A}{\sigma}\,\bar{x} \qquad \ldots(2\text{-}5)\ldots$$

وبتعويض (5 - 1) في (5 - 2) نحصل على :

$$f'+3f^{-1}+\frac{1}{2}\sin\beta\,\xi^{2}=A\left(\frac{1}{\mu\,\sigma^{3}\rho^{3}gQ}\right)^{1/5}\xi \qquad \ldots(3\text{–}5)\ldots$$

حيث إن الثابت A له البعد $\left(\mu\,\sigma^{3}\rho^{3}gQ\right)^{1/5}$

ويمكن كتابة المعادلة (3.5) بالصيغة الآتية:

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^2 = k_1\xi \qquad \ldots(4\text{-}5)$$

حيث إن $k_1 = A\left(\frac{1}{\mu\ \sigma\ \rho^3\ g^3\ Q}\right)^{1/5}$ ثابت لا بعدي .

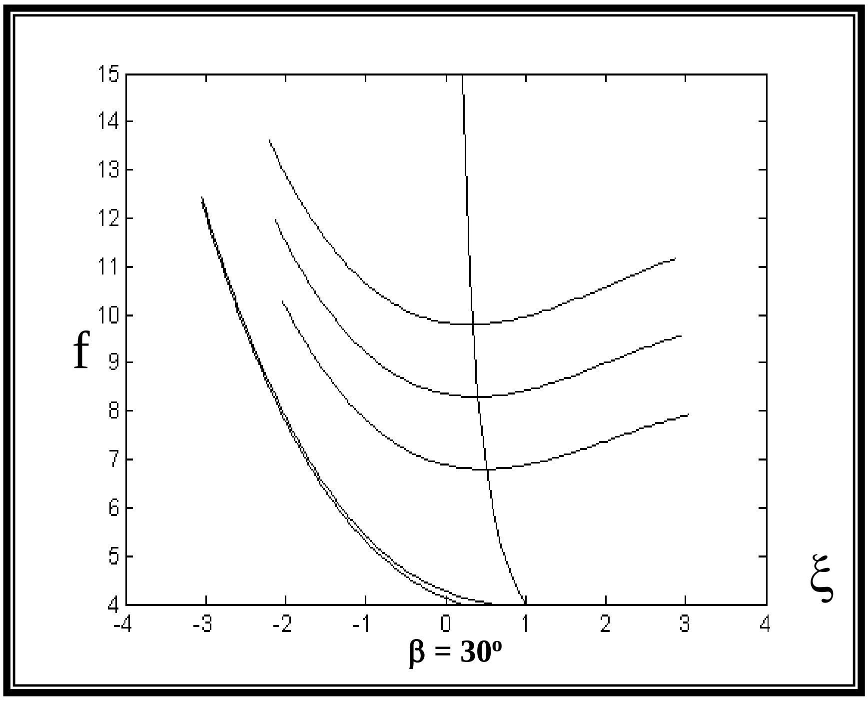
ولحل المعادلة (5 - 4) نحتاج الى شروط ابتدائية ولاجل الحصول على هذه الشروط نفرض أن المشتقة الأولى f' تكون مساوية للصفر وهذا يعطينا المحل الهندسي للنقاط التي تكون عندها المشتقة $f' = 0$ وبهذا تصبح المعادلة (5 - 4) بالصيغة الآتية:

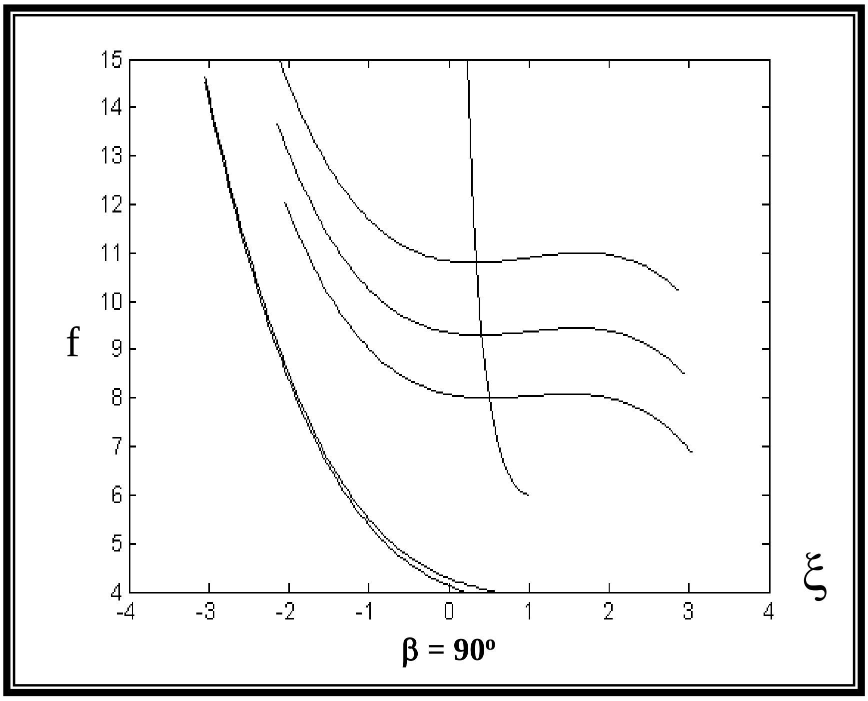
$$3f^{-1} + \frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^2 = k_1\xi$$

أو

$$f = \frac{-3}{\frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^2 - k_1\xi} \qquad \ldots(5 - 5)$$

ومن المعادلة (5 - 5) نحصل على الشروط الابتدائية لحل المعادلة (5 - 4) وباستخدام برنامج الـ MATLAB باستخدام طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على النتائج والحلول العددية للمعادلة (5 – 4) عندما $k_1=1$ وان β تأخذ القيم 30° ، 90° بالترتيب وكما موضح في الشكل (5-1).





الشكل (5-1) : يمثل منحنيات الحلول في المستوي (f , ζ) للمعادلة (5-4)

الحالة الثانية : نفرض إن $A=0$ و $R\neq 0$ في المعادلة (4.4) فتصبح بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}+\frac{3\mu Q}{\sigma \bar{h}}+\frac{1}{2}\frac{\rho g}{\sigma}\sin(\beta)\bar{x}^{2}=\frac{R}{\sigma} \qquad \ldots(6\text{-}5)$$

وبتعويض (5 - 1) في (5 - 6) نحصل على ما يأتي:

$$f'+3f^{-1}+\frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^{2}=\frac{R}{\sigma}\left(\frac{1}{\mu^{2/5}\sigma^{-3/5}\rho^{1/5}g^{1/5}Q^{2/5}}\right)$$

أو

$$f'+3f^{-1}+\frac{1}{2}\sin\beta\,\xi^{2}=B\left(\frac{1}{\mu^{2}\sigma^{2}\rho g Q^{2}}\right)^{1/5} \qquad \ldots(7\text{ - }5)$$

حيث إن R له البعد $\left(\mu^{2}\sigma^{2}\rho g Q^{2}\right)^{1/5}$

ويمكن كتابة المعادلة (5 - 7) بالصيغة الآتية:

$$f'+3f^{-1}+\frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^{2}=k_{2} \qquad \ldots(8\text{-}5)$$

حيث إن $k_{2}=B\left(\frac{1}{\mu^{2}\sigma^{2}\rho g Q^{2}}\right)^{1/5}$ ثابت لا بعدي .

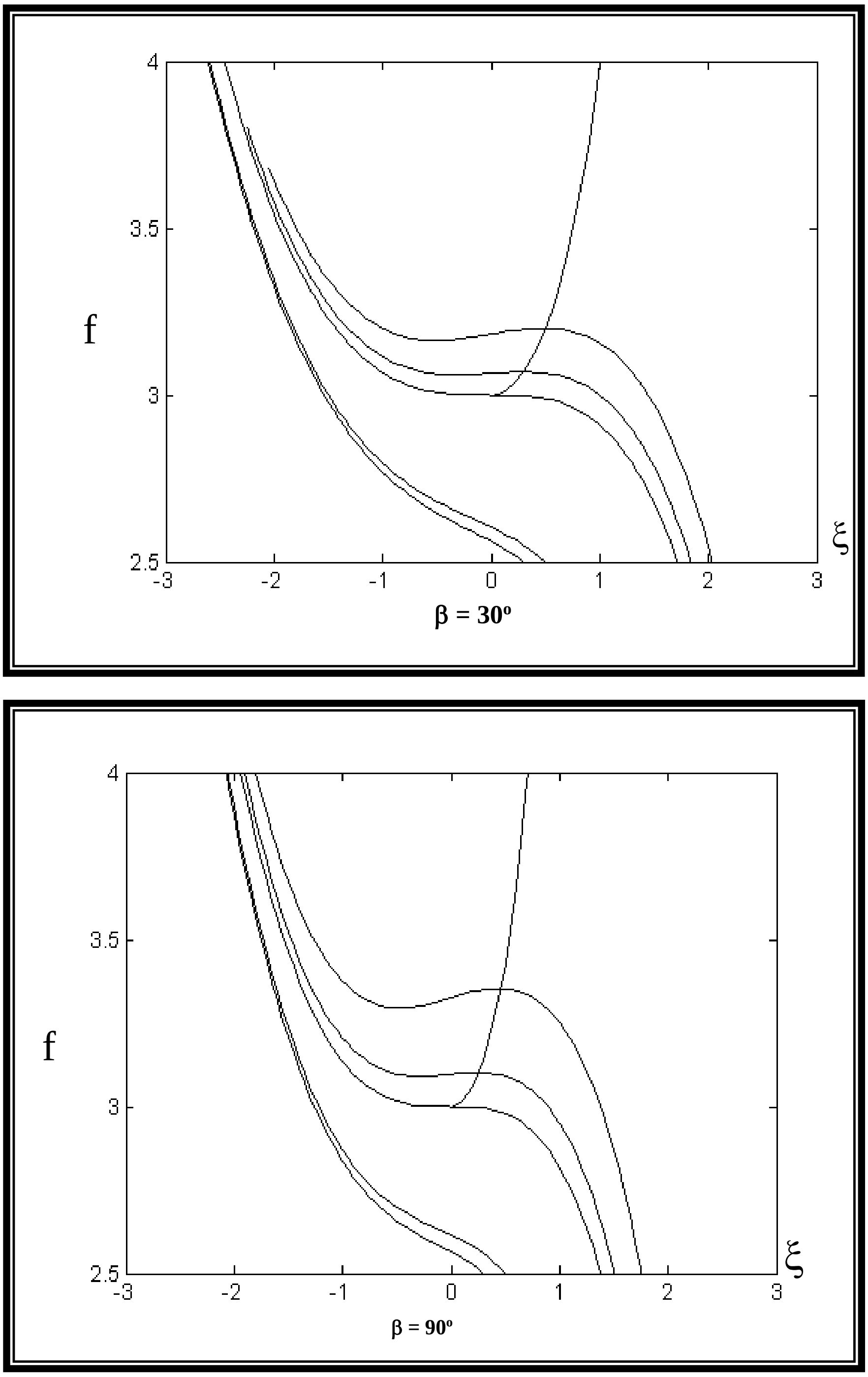
ولحل المعادلة (5-8) نحتاج الى شروط ابتدائية ولأجل الحصول على هذه الشروط نتبع نفس الطريقة المذكورة لحل المعادلة (5 - 4) فتصبح المعادلة (5 - 8) بالصيغة الآتية:

$$3f^{-1}+\frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^{2}=k_{2}$$

أو

$$f=\frac{-3}{\frac{1}{2}\sin(\beta)\xi^{2}-k_{2}} \qquad \ldots(9\text{ - }5)$$

ومن المعادلة (5-9) نحصل على الشروط الابتدائية لحل المعادلة (5 - 8) وباستخدام برنامج MATLAB بطريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على النتائج والحلول العددية للمعادلة (5 - 8) عندما $k_2=1$, $\beta=30^{o}, 90^{o}$ وكما موضح في الشكل (5 – 2).



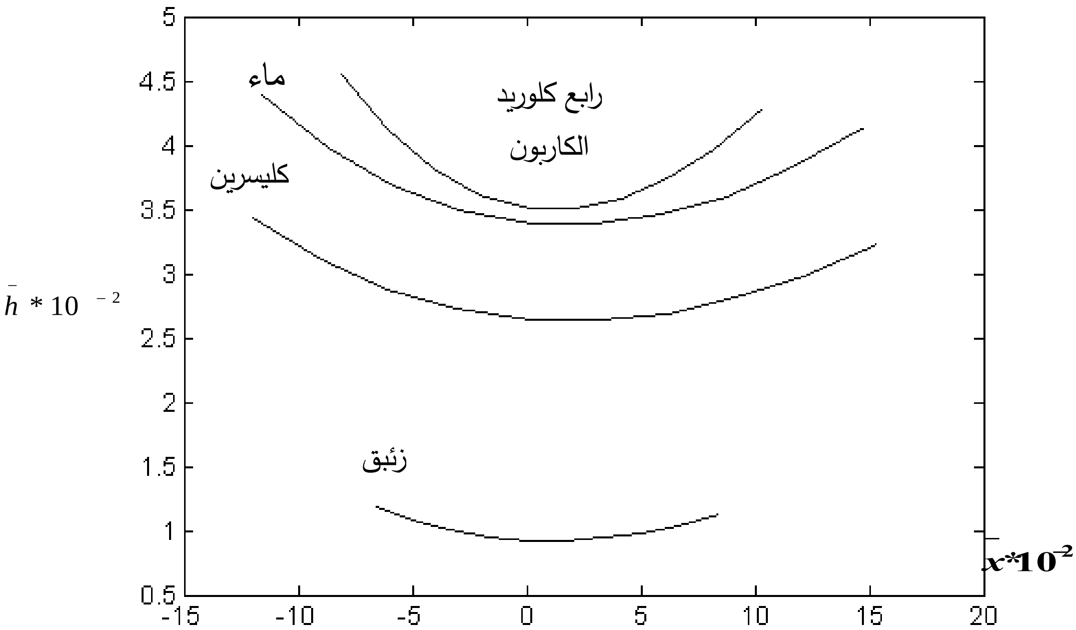
الشكل (5 -2) منحنيات الحلول في المستوي (f، ξ) للمعادلة (5 - 8)

لإيجاد سمك الغشاء لبعض السوائل المعروفة نستخدم الجدول الأتي وبفرض أن التصريف Q=1.

الجدول (5 - 1) يمثل قيم الثوابت لبعض السوائل

$g\times10^2$ m/sec^2	$\sigma\times10^3$ N/m	$\rho\times10^{-3}$ Kg/m^3	$\mu\times10^3$ $N.sec/m^2$	الصيغة الجزئية	السائل
980	63.4	1.26	1.49	$C_3H_8O_3$	الكليسرين
980	72.7	1	1	H_2O	الماء
980	435	13.6	1.55	Hg	الزئبق
980	27	1.6	0.97	CCl_4	رابع كلوريد الكاربون

والشكل (5 - 3) يبين سمك الأغشية لكل من الكليسرين والماء والزئبق ورابع كلوريد الكاربون



الشكل (5 - 3)

(1-6) الاستنتاجات Conclusions

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللازمني في غشاء رقيق متناظر على سطح مائل بزاوية ما وفي نظام ثنائي البعد بعد إهمال قوى القصور الذاتي و جهد القص على سطح الغشاء وتبين من الحلول للمعادلة(5-4) بأن المنحنيات تبدأ بالميلان باتجاه اليمين بينما باتجاه اليسار تكون محاذية للدالة $f(\xi)=A\xi^2$ عندما $\zeta \to -\infty$ بينما المنحنيات تكون اكثر تموجا" لسمك الغشاء في المعادلة (5-8) وتزداد هذه التموجات كلما ازدادت قيم β.

المصادر

[1] Abdul Ahad, J. G., 1994, “Similarity solution for unsteady flow thin liquid films”, ***J. Ed. SCI***, *Vol. 17.*

[2] B. R. Duffy and S. K. Wilson,1997 “A third – order deferential equation arising in thin – film flows and relevant to Tanner’s Law”, ***App. Math. Lebb***, *Vol. 10, No.3, PP, 63 – 68.*

[3] Isenperge. C.,1978,**The science of soap film and soap Bubbles**, *Clevedon, England*.

[4] Javier. A. ,2000,“Global models for moving contact lines”, ***Physical reviews***, *Vol. 63, 011208, PP. 1 – 13.*

[5] Morshed, A. M, 1996,“**Fluid flow in thin liquid films**”, *M. Sc, thesis University of Mosul*.

[6] Myesl, K. J., Shinoda, K., and Frankle, S.,1959, ” **Soap films studies of their thinning and bibliography**”, *pergamon press, London.*

[7] Rayleiyh, J. W.,1890,“ **Foam proceeding of the Royal institution**”, *Vol. 13, PP 85 – 97.*