Superposition Method with the Principle of Multiple Shooting for Solving Stiff Linear Initial Value Problems

Basheer M.S. Khalaf **Suhaib A. Al-Tamr**

College of Education
University of Mosul, Iraq

Received on: 10/08/2002 **Accepted on: 04/01/2003**

Abstract

The main objective of this paper is the development of a new technique for solving stiff Linear Initial Value Problems (IVPs) in Ordinary Differential Equations (ODEs), The new Technique consists of combining the linear superposition principle with the principle of Multiple shooting.

We have applied the new technique successfully for solving hard stiff IVPs. Also we have studied the ability of the new technique for controlling the stability of the numerical solution of IVPs and how the new technique prevents the accumulation of round off errors.

Keywords: Ordinary Differential Equations (ODEs), stiff Linear Initial Value Problems (IVPs), superposition principle, Multiple shooting.

طريقة التطابق مع القذف المتعدد لحل المسائل الابتدائية الخطية الصلبة

بشير محمد صالح خلف **صهيب عبد الجبار التمر**

كلية التربية، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2002/08/10 **تاريخ قبول البحث: 2003/01/04**

الملخص

هدف البحث هو تطوير أسلوب جديد لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة الخطية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية، ويتكون الأسلوب الجديد من دمج مبدأ القذف المتعدد مع فكرة الأجزاء المتماثلة الخطية.

وتم تطوير هذا الأسلوب واستخدامه في المسائل الابتدائية الخطية الصلبة بنجاح كبير جدا. وتمت دراسة الاستقرارية وكيفية السيطرة على نمو الخطأ المتراكم باستخدام الأسلوب الجديد.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الاعتيادية، مسائل القيم الابتدائية الصلبة الخطية، طريقة التطابق، القذف المتعدد.

1- المقدمة:

ظهرت المسائل الصلبة منذ نصف قرن مضى، ومضت عليها بضع سنين من الإهمال حتى قال العالم G.Dahlquist " في حوالي 1960 ... أصبح كل واحد مدركاً أن العالم مليء بالمسائل الصلبة ".

استخدمت مسائل القيم الابتدائية عند دراسة حركة النوابض ذات الصلابة المختلفة ومنها اشتقت المسالة اسمها.

وكان أول ظهور لمصطلح الصلابة في بحث لـ Gurtiss & Hirschfelder (1952) في مسالة في علم الكيمياء الحركية. إذ قاما باقتراح أول مجموعة من صيغ التكاملات العددية الملائمة لمسائل القيم الابتدائية الصلبة. [8]

أصبح النظام الصلب مع عدد من التطبيقات المهمة مثل الكيمياء والهندسة وعلم الكيمياء الحركية وشبكة المعلومات ونظريات السيطرة و دراسة حركة النابض، وأشياء علمية مهمة والمساحة الناتجة من مسائل القيم الابتدائية أنظمة متعلقة بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تصور الظاهرة (حادثة يمكن ملاحظتها) والتي تكون معروفة بأنها متصلبة. [6]

2-1 تعاريف

المعادلة التفاضلية الصلبة: هي المعادلة التي لها حل أسي (Exponential Solution) $e^{\lambda x}$، إذ λ تمتلك قيما مختلفة إلى حد كبير واصغر قيمة لـ λ عبارة عن عدد سالب كبير وهذا الحل يقترب من الصفر مع زيادة قيمة x، وهو ما يعرف بالمعادلة التفاضلية الصلبة (الجافة) (Stiff Differential Equation). [7،8]

يقال عن النظام الخطي $y' = Ay + f(x)$ بأنه صلب إذا كان

$\lambda_i<0$

لكل $i=1,2,\ldots,n$

2. $\max\limits_{i=1,..,n} |\lambda_i| \Big/ \min\limits_{i=1,..,n} |\lambda_i| > 1$

إذ A مصفوفة ثابتة متماثلة ذات بعد n و $\lambda_i, i=1,\cdots,n$ هي قيم ذاتية (Eigenvalues) للمصفوفة A. [8]

2- طريقة التطابق لحل مسائل القيم الحدودية:

Superposition Methods for Solving Boundary Values Problems:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + g_{n+1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + g_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

التي لها n من الشروط الحدودية ولها حل عام

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x) \qquad (2)$$

إذ $y_*(x)$ تكامل جزئي نحصل عليه من حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة والتى لها قيم ابتدائية صفرية وهذا يعنى

$$y = 0 \,,\ y' = 0 \,,\ y'' = 0 \,,\ \ldots \,,\ y^{(n-1)} = 0$$

عندما $x = 0$

و

$$\sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x)$$

هو حل متمم لـ $y_*(x)$ كل من $i=1\ldots n$ $y_i(x)$ نحصل عليه بحل الجزء المتجانس من المعادلة التفاضلية التي تنتمي إلى القيم الابتدائية

$$y_i = 0 \,,\ y_i' = 0 \,,\ \ldots \,,\ y_i^{(i-1)} = 1 \,,\ y_i^{(i)} = 0 \,,\ \ldots \,,\ y_i^{(n-1)} = 0$$

إذ يتم حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة للحصول على ($y_*(x)$) وكذلك المعادلة التفاضلية المتجانسة للحصول على ($y_i(x)$) باستخدام إحدى الطرائق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية (طرائق ذات خطوة واحدة أو طرائق متعددة الخطوات أو غيرها من الطرائق العددية).[5]

إذ يتم تخفيض رتبة المعادلة وتحويلها الى نظام من n من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى ويتم حلها عدديا باستخدام الشروط الابتدائية المذكورة سابقاً.

بعد حساب $y_*(x), y_i(x)$ نستخدم الشروط الحدودية لإيجاد قيم

$$A_i \qquad i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\,,\ n$$

إذ نحصل عند تعويض الشروط الحدودية بالمعادلة (2) على n من المعادلات الخطية و n من المجاهيل (A_i) إذ يتم حل المعادلات الخطية بإحدى طرائق حل المعادلات الخطية (طريقة كاوس أو طريقة كاوس جوردن) لنحصل على قيم A_i .

وبعدها نستطيع أيجاد أية قيمة لـ y تقع بين الشروط الحدودية باستخدام المعادلة (2).

مثال1:

حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24 + e^x$$

إذ

$$y(0) + y'(0) = 2 \quad , \quad y'(0) + y''(0) = 2$$
$$y(1) + y'(1) = 5 + 2e \quad , \quad y''(1) = 12 + e$$

إذ أن الحل المضبوط للمعادلة هو

$$y(x) = x^4 + e^x$$

الحل:

أولا:

نحول المعادلة التفاضلية الى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى وذلك بفرض

$$(3a)\left.\begin{array}{l} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ z_3 = y'' \\ z_4 = y''' \end{array}\right\}$$

إذ

$$(3b)\left.\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = z_4 \\ z_4' = f(x) \end{array}\right\}$$

ثانيا:

نقوم بإيجاد قيمة التكامل الجزئى $y_*(x)$ بحل النظام (3b) الذي له قيم ابتدائية

عندما $x = 0$ $\quad z_1(0) = 0\ , z_2(0) = 0\ , z_0(0) = 0\ , z_0(0) = 0$

إذ يتم حساب $y_*(x)$ باستخدام طريقة رانج–كوتا

ثالثا:

نقوم بإيجاد قيم $y_i(x)\ ,\ i=1,2,3,4$ وذلك بحل النظام(3b) (حل الجزء المتجانس من المعادلة) أي $f(x)=0$ لإيجاد الحل التكميلي عند القيم

$$y_i=0\ ,\ y_i'=0\ ,\ \ldots\ ,\ y_i^{(i-1)}=1\ ,\ y_i^{(i)}=0\ ,\ \ldots\ ,\ y_i^{(n-1)}=0 \quad \text{at} \quad x=0$$

أي يتم حساب $y_1(x)$ عندما

$$y_1=1\ ,\ y_1'=0\ ,\ y_1''=0\ ,\ y_1'''=0 \qquad x=0 \qquad f(x)=0$$

وحساب $y_2(x)$ عندما

$$y_2=0\ ,\ y_2'=1\ ,\ y_2''=0\ ,\ y_2'''=0 \qquad x=0 \qquad f(x)=0$$

و حساب $y_3(x)$ عندما

$$y_3=0\ ,\ y_3'=0\ ,\ y_3''=1\ ,\ y_3'''=0 \qquad x=0 \qquad f(x)=0$$

و حساب $y_4(x)$ عندما

$$y_4=0\ ,\ y_4'=0\ ,\ y_4''=0\ ,\ y_4'''=1 \qquad x=0 \qquad f(x)=0$$

رابعا:

يتم حساب قيم $A_1, A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4$ باستخدام الشروط الحدودية للحصول على أربع معادلات خطية لها أربعة متغيرات و يمكن حلها باستخدام طريقة كاوس للحصول على قيم $A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4$.

ويمكن بعدها إيجاد أية قيمة للمعادلة $y(x)$ التي تقع بين (0,1) باستخدام المعادلة (2).

والجدول (1) يبين النتائج باستخدام طريقة التطابق إذ تم حسابها باستخدام طريقة رانج–كوتا R.K وبطول خطوة h=0.1 . [5]

الجدول (1)

مقارنة النتائج لطريقة التطابق الخطية مع الحل الأمثل

الخطأ	الحل الأمثل	**طريقة التطابق**	**قيمة x**
0.00000	1.00000	1.00000	0
4.8227e-06	1.10527	1.10526	0.1
4.4628e-06	1.22300	1.22299	0.2

0.3	1.37954	1.35795	4.1522e-06
0.4	1.51742	1.21742	3.8862e-06
0.5	1.71121	1.71122	3.6606e-06
0.6	1.95171	1.95171	3.4709e-06
0.7	2.25384	2.25385	3.3130e-06
0.8	2.63513	2.63514	3.1829e-06
0.9	3.11570	3.11570	3.0760e-06
1	3.71828	3.71828	3.6547e-16

3 – تطوير الطريقة إلى حل مسائل القيم الابتدائية:

سوف يتم في هذا البند تطوير طريقة التطابق (Superposition) التي تستخدم في حل مسائل القيم الحدودية (BVPs) في حل مسائل القيم الابتدائية (IVBs).

من تعريف مسائل القيم الحدودية. [7،9]

لتكن

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-!)}) \qquad (4a)$$

تنتمي إلى n من الشروط في y و(او) مشتقاتها كما فى

$$y^{(k1)}(x_1) = b_1, y^{(k2)}(x_2) = b_2, ..., y^{(kn)}(x_n) = b_n \qquad (4b)$$

اذا كانت $i = 1 \cdots n$, x_i في المعادلة (4b) القيمة نفسها (أي $x_I=x_j$ حتى انه $i\neq j$ لكل قيم x) عندئذ تكون المعادلة (4a) مسألة قيم ابتدائية من الرتبة n. مع ذلك ،اذا كانت الشروط الحدودية في المعادلة (4b) $x_i\neq x_j$ لعدد من قيم x ، عندها تصبح المعادلة (4a) مسألة قيم حدودية من الرتبةn. [7،9]

والمثال على ذلك (الفرق بين مسائل القيم الابتدائية ومسائل القيم الحدودية)[4]

IVP: $y''(x) = -y$

$y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = -1$

BVP: $y''(x) = -y$

$y(0) = 2\ ,\ y(3\pi/2) = 1$

والفرق بينهما أن الشروط في مسائل القيم الابتدائية في القيمة نفسها لـ x في حين أن الشروط في مسائل القيم الحدودية معطاة في نقطتين مختلفتين لـ x (أي نقطة البداية ونقطة النهاية للتكامل)، وان لكل من المثالين المذكورين أنفاً الحل نفسه وهو

$$y(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$$

من التعريف المذكور أنفا يمكن القول ان مسائل القيم الابتدائية حالة خاصة من مسائل القيم الحدودية، أي أن في الإمكان حل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة $n > 1$ باستخدام طرائق مسائل القيم الحدودية.

3−1 تطبيقات عددية مع مناقشة النتائج:

سوف يتم في هذا البند استعراض النتائج العددية لعدد من الأمثلة لبيان المكان تطبيق الطريقة (التطابق) على مسائل القيم الابتدائية، مع بيان مدى كفاية الطريقة فى هذه المسائل.

مثال2:

حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' = 6y - 3xy' \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0.1$$

نحول المعادلة الى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى بفرض[1].

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

فينتج

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0.1$$

نحصل على $y_*(x)$ من المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0$$

نحل النظام باستخدام إحدى الطرائق العددية لمسائل القيم الابتدائية (طريقة رانج كوتا أو طريقة ادم)

2−نحصل على y_1 من المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 0$$

3−نحصل على y_2 من المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = 6y - 3xy_2 \qquad y_2(0) = 1$$

4- نعوض الشروط الابتدائية للمسالة في المعادلة (2) فنحصل على معادلتين خطيتين بمجهولين (A_1 ,A_2) إذ يتم حلهما بإحدى طرائق حل المعادلة الخطية (طريقة كاوس مثلا) لنحصل على قيم A_1 , A_2 (يمكن حساب A_1,A_2 في هذه الحالة من البداية).

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{1=1}^{n} A_i y_i(x)$$

عندما $y(0)=1$

$1 = 0+A_1+0A_2$

$0.1=0+0A_1+A_2$

$A_1=1$

$A_2=0.1$

5-نستخدم المعادلة(2) للحصول على قيم $y(x)$ التي تقع بين $(0,1)$ وهى كالأتي

الجدول (2)

حل المثال (2) يبين فيه إمكان تطبيق طريقة التطابق على مسائل القيم الابتدائية

مع مقارنة الطريقة بطريقة رانج–كوتا

طريقة رانج–كوتا	طريقة التطابق	قيمة **x**
1	1	0
1.0401	1.0401	0.1
1.1404	1.1404	0.2
1.3013	1.3013	0.3
1.5231	1.5231	0.4
1.806	1.806	0.5
2.1501	2.1501	0.6
2.556	2.556	0.7
3.0234	3.0234	0.8
3.5526	3.5526	0.9
4.1437	4.1437	1

من الجدول (2) إن طريقة التطابق يمكن استخدامها فى حل مسائل القيم الابتدائية.

3–2 تطبيق طريقة التطابق على المسائل الصلبة:

سوف يتم في هذا البند تطبيق طريقة التطابق على المسائل الصلبة وبيان مدى ملاءمتها لهذا النوع من المسائل وذلك بتطبيق الطريقة على عدد من المسائل الصلبة.

مثال3:

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0$$
$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

والحل الأمثل لها هو

$$y = e^{-x} + e^{-1000x}$$

نحل المعادلة باستخدام طريقة التطابق فينتج، (إذ أن وسيله التكامل هي طريقة رانج–كوتا من الرتبة الرابعة. [2،3،8])

الجدول(3)

حل المثال (3) باستخدام طريقة التطابق

قيمة x	طريقة التطابق قيمة h=0.005	الحل الأمثل
0.0	1.00000	1.00000
0.1	-1.556e+005	0.90484
0.2	-1.671e+028	0.81873
0.3	-7.482e+050	0.74082
0.4	-3.710e+073	0.67032
0.5	-2.603e+096	0.60653
0.6	-1.311e+119	0.54881
0.7	-6.097e+141	0.49658
0.8	-4.894e+164	0.44933
0.9	-2.719e+187	0.40657
1.0	-1.356e+210	0.36788

نلاحظ في هذا المثال كيف أن الخطأ ينمو بسرعة وذلك لان قيمة h اكبر من 0.00278 وهي القيمة التي تجعل المسالة مستقرة .

المثال4:

$$y'' + 21y' + 20y = 0$$
$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

والحل الأمثل لها هو

$$y = e^{-x} + e^{-20}$$

نحل المعادلة باستخدام طريقة التطابق فينتج[4،8]

الجدول (4)

حل المثال (4) باستخدام طريقة التطابق

قيمة x	طريقة التطابق قيمة h=0.2	الحل الأمثل
1	**0.36788**	**0.36788**
2	**0.13534**	**0.13534**
3	**0.03771**	**0.04979**
4	**-37.2798**	**0.01832**
5	**-117957**	**0.00674**

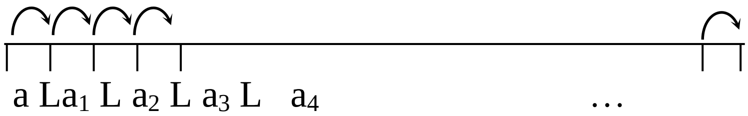
نلاحظ في هذا المثال كيف أن الخطأ ينمو بسرعة وذلك لان قيمة h اكبر من 0.1 وهي القيمة التي تجعل المسالة مستقرة .

نلاحظ من المثالين المذكورين أنفا أن الطريقة غير ملائمة في حل المسائل الصلبة.

4 أسلوب جديد لطريقة التطابق مع القذف المتعدد:

اتضح لنا في البند السابق أن طريقة التطابق في حل المعادلة التفاضلية الصلبة غير ناجحة فى هذا النوع من المعادلات، و سيتم في هذا البند تطوير الطريقة- التطابق - إلى طريقة يمكن فيها حل هذا النوع من المعادلات .

تكمن هذه الطريقة الجديدة في تجزئة فترة التكامل (a , b) الى اجزاء صغيرة متماثلة في الطول $(a,a_1), (a_1,a_2),\ldots,(a_n,b)$ ، حتى ان $L=a_1-a=a_2-a_1=\ldots=b-a_n$ كما هو مبين في الشكل (1).



الشكل (1)

يبين كيفية عمل الطريقة الجديدة

إذ يتم استخدام الشروط الابتدائية في المعادلة $(4b)$ لأجراء التكامل على الفترة (a,a_1) باستخدام طريقة التطابق، إذ يتم

1-أيجاد قيم A_i $i=1\ldots n$ من الشروط الابتدائية.

2- حساب $y_*(x)$ على الجزء غير المتجانس للمعادلة على الفترة (a,a_1) .

3- حساب $y_i(x)$ $i=1\cdots n$ على الجزء المتجانس للمعادلة على الفترة (a,a_1) .

4-استخدام المعادلة (2) لإيجاد قيم $y(x)$ على الفترة (a,a_1) .

5-استخدام قيم $y(a_1)=b_1, y'(a_1)=b_2, y''(a_1)=b_3,\ldots, y^{(n-1)}(a_1)=b_n$ بوضعها شروطاً ابتدائية على الفترة (a_1,a_2) .

وهكذا نعيد استخدام الخطوات من 1 إلى 5 على جميع الفترات $(a,a_1), (a_1,a_2),\ldots,(a_n,b)$ إذ يتم في هذه الطريقة التخلص من تنامي الخطأ وذلك لان فترة التكامل متجزئة و سوف يتم في هذه الحالة بتر الخطأ قبل أن يتنامى والبدء بتكامل جديد على الفترة الأخرى القادمة وهكذا إلى نهاية الفترات التي تعني نهاية التكامل.

4-1 : تطبيقات عددية مع مناقشة النتائج:

سوف يتم في هذا البند تطبيق الطريقة الجديدة على المعادلة التفاضلية الصلبة مع بيان مدى كفاية الطريقة.

المثال 5:

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0$$

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

إن فترة الاستقرارية لهذا المثال عند استخدام طريقة رانج-كوتا هي $\lambda h < 2.8$ إذ $\lambda=1000$ في هذه المسالة. [2،3،8]

إذاً قيمة h يجب أن تكون $h < 0.0028$ أما في هذه الطريقة فقد تم التوصل الى نتائج جيدة عندما تكون قيمة $h=0.05$.

الجدول (5)

حل المثال (5) باستخدام الطريقة الجديدة بطول فترة $L=0.05$

قيمةx	الطريقة الجديدة قيمة h=0.005	الطريقة الجديدة قيمة h=0.01	الطريقة الجديدة قيمة h=0.05	الحل الامثل
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	0.90484	0.90484	0.90484	0.90484
0.2	0.81873	0.81873	0.81873	0.81873
0.3	0.74082	0.74082	0.74082	0.74082
0.4	0.67032	0.67032	0.67032	0.67032
0.5	0.60653	0.60653	0.60653	0.60653
0.6	0.54881	0.54881	0.54881	0.54881
0.7	0.49658	0.49658	0.49658	0.49658
0.8	0.44933	0.44933	0.44933	0.44933
0.9	0.40657	0.40657	0.40657	0.40657
1.0	0.36788	0.36788	0.36788	0.36788

يشير الجدول (5) إلى مدى تأثير استخدام طول الخطوة h حتى تكون واقعة خارج منطقة الأستقرارية لطريقة رانج-كوتا الاعتيادية إذ يبين الجدول (5) مدى كفاءة الطريقة الجديدة مقارنة بطريقة الحل بالتطابق في الجدول (3) التي أعطت نتائج غير مقبولة بسبب تضخم الأخطاء على نحو كبير جدا وذلك عند ما تكون قيمة $h=0.005$. بخلاف الطريقة الجديدة إذ بدت هذه

الطريقة مستقرة على نحو جيد عند قيمة h=0.005 وكذلك تم الحصول على قيم جيد جدا عند قيم h=0.01 وقيم h=0.05.

المثال 6:

$$y'' + 21y' + 20y = 0$$
$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

الجدول (6)

حل المثال (6) باستخدام الطريقة الجديدة بطول فترة h=1

قيمة **x**	الطريقة الجديدة قيمة**h=0.2**	الطريقة الجديدة قيمة**h=1**	الحل الأمثل
1	0.36788	0.37512	0.36788
2	0.13534	0.14063	0.13534
3	0.04978	0.05273	0.04978
4	0.01831	0.01977	0.01831
5	0.006737	0.00741	0.006737

إن فترة الاستقرارية للمثال(6) عند استخدام طريقة رانج–كوتا هي $h < 0.1$ إذ $\lambda=20$، فقد تم التوصل إلى نتائج جيدة عندما تكون قيمة h=0.2 كما هو مبين في الجدول (6) فعند استخدام طريقة التطابق تكون النتائج متباعدة كما هو مبين في الجدول (4)، وكذلك تم التوصل إلى نتائج جيدة عندما تكون قيمة h=1.

2–4 استقرارية الطريقة:

إن الدقة العالية للمعادلة هى واحدة من اصعب سمات الحلول العددية للمعادلة التفاضلية، وهى هدف تسعى إليه جميع الطرائق، إذ هناك عدد من الحالات التي يكون فيها الخطأ العام خارجاً تماما عن السيطرة، وهذا السلوك يعرف بعدم الاستقرارية ويحدث عادة فى المعادلات التفاضلية الصلبة. [10]

توضيحاً لذلك، سوف نناقش المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = \lambda y \qquad (5)$$

التي حلها العام

$$y = Ae^{\lambda x}$$

إذا كانت $0 > \lambda$ فان الحل يتزايد بسرعة كلما زادت قيمة x، في حين إذا كانت $\lambda < 0$ فان الحل يقترب من الصفر كلما زادت قيمة x (وهذا ما نحاول التكلم عليه) إذ يجب ان نفرض ان الحل العددي يقترب من الصفر كلما زادت قيمة x .

دعونا الان نرى ما يحدث عندما نطبق طريقة رانج-كوتا من الرتبة الرابعة على المعادلة(5) .

ليكن $w = hx$ عندها نحصل

$$K_1 = h\lambda y_0 = wy_0$$
$$K_2 = h\lambda(y_0 + 1/2wy_0) = y_0(w + 1/2w^2)$$
$$K_3 = h\lambda(y_0 + 1/2y_0(w + 1/2w^2)) = y_0(w + 1/2w^2 + 1/4w^3)$$
$$K_4 = h\lambda(y_0 + y_0(w + 1/2w^2 + 1/4w^3)) = y_0(w + w^2 + 1/2w^3 + 1/4w^4)$$

نجد قيمة y_1

$$y_1 = y_0 + 1/6(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$y_1 = y_0(1 + w + 1/2w^2 + 1/6w^3 + 1/24w^4) \qquad (6)$$

نظريا ليس من الصعب ان نحصل على $y_1 = y_0 e^w$

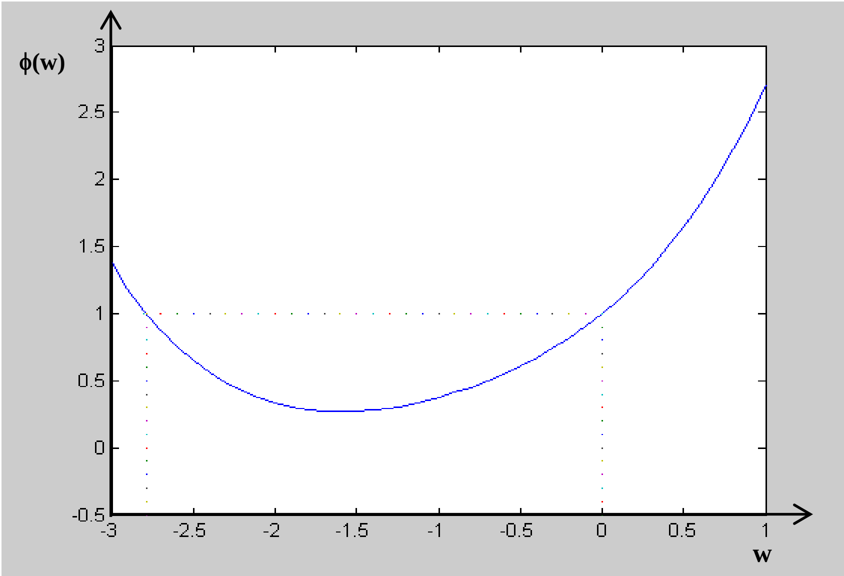
وعلى فرض ان w صغيرة فيجب ان تعطى المعادلة (6) تقريبا جيدا إلى الحل النظرى.

بما ان $w = h\,\lambda$ و h قيمة موجبة، ونحن مهتمون أساسا بالحالة عندما تكون w سالبة فان رسم المعادلة

$$\phi(w) = 1 + w + 1/2w^2 + 1/6w^3 + 1/24w^4$$

الشكل (2)

رسم المعادلة $\phi(w) = 1+w+1/2w^2+1/6w^3+1/24w^4$



يمكن أن نرى من القيم السالبة لـ w وكما هو مبين في الشكل (2) ان $|\phi(w)| < 1$ إذا كانت w تقع بين (-2.8,0) حسب (للتقريب الدقيق فان اقل حد -2.785293). إذا كانت w تقع بين هذه الحدود، فان تأثير المعادلة (6) في y_1 سوف يكون اقل من y_0 والحل سوف يقترب من الصفر كلما زادت قيمة x – وهذا ما نسعى إليه–. أما إذا كانت w لا تقع بين الفترة (-2.8,0)، فان y_1 سوف تكون اكبر من y_0 ، والحل العددي سوف يزداد من دون حدود كلما زادت قيمة x ، إذ لا توجد مشكلة إذا كانت $w > 0$. [2،6]

ولكن إذا كانت $w < -2.8$ فسوف نحصل على حل عددي متزايد مع أن الحل النظري متناقص(غير متزايد) وهذا ما يدعى عدم الأستقرارية العددية (numerical instability) وهذا يعنى انه عندما نحل معادلة تفاضلية قيمها الابتدائية λ سالبة يجب أن تكون قيمة h مختارة أي $-2.8 < |h\lambda| < 0$.

أما في الطريقة الجديدة فيتم التخلص من تنامي الخطأ وذلك لان فترة التكامل مجزئة و سوف يتم في هذه الحالة بتر الخطأ قبل أن يتنامى والبدء بتكامل جديد على الفترة الأخرى القادمة وهكذا إلى نهاية الفترات.

المصـادر

(1) حسون د.م حسن مجيد وم.محمود عطا الله شكور، "**التحليل الهندسي والعددي التطبيقي**"، *الجامعة التكنلوجية –بغداد–العراق*،(1999).

[2] AL-Himmat, G. M.S: "**Extending the Stability Region of some Numerical Methods for IVPs**". M.Sc.thesis, *University of Mosul*, (2000).

[3] Conte, S.D. and Carl de Boor: "**Elementary numerical Analysis, an algorithmic approach**", *International Student Edition, London*, (1981).

[4] Johnston, R.L: " **Numerical Methods:A software approach** ",*John Wiley and Sons Inc*, (1982).

[5] Khalaf, B.M.S: " **Parallel Numerical Algorithms for Solving Ordinary differential equations** ", Ph.D. Thesis, *University of Leeds school of Computer Studies, U.K*, (1990).

[6] Lambert, J.D: "**Computational methods in ordinary differential equations** ", *John Wileey &sons inc*, (1974).

[7] Maron, M.J: "**Numerical analysis: a practical approach**", *Macmillan Publishing Co., INC, New York*, (1982).

[8] Murshed, A. A. A: "**New Parallel Numerical Algorithms for solving stiff ODEs adapted for MIND computers** ", Ph.D. thesis, *University of Mosul*, (2000).

[9] Quinney, D: "**An introduction to the numerical solution of differential equations**", *John Wiley and Sons*, (1985).

[10] Scraton, R.E: "**Basic Numerical Methods: an introduction to numerical mathematics on a microcomputer**", *University of Bradford London*, (1984).