Numerical Solution of the Problem of Heat Transfer by Convection

Ahmed M. Juma'a **Ashraf S. Aboudi**
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 08/06/2005 **Accepted on: 09/10/2005**

ABSTRACT

In this paper we have presated a heat transfer by convection in rectangular cavity filled with static fluid. Differentially heated end vertical walls. Two-dimensional motions are assumed. The governing vorticity and energy transport equations are solved by an alternating direction implicit finite- difference method. We transference heat equation into two finite-difference equations. The time interval has been deviled into two equal halves, alternating to compute an intermediate point in the first step and final value at T time. We get by result analysis, that we can reach the steady – state from Un steady –state after some iteration.

Keywords: convection, static fluid, finite difference method, Alternating-Direction Implicit Method, heat equation, steady state, unsteady state.

الحل العددي لمسألة نقل الحرارة بواسطة الحمل الحراري

أحمد محمد جمعة **أشرف سمعان عبودي**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2005/06/08 **تاريخ قبول البحث: 2005/10/09**

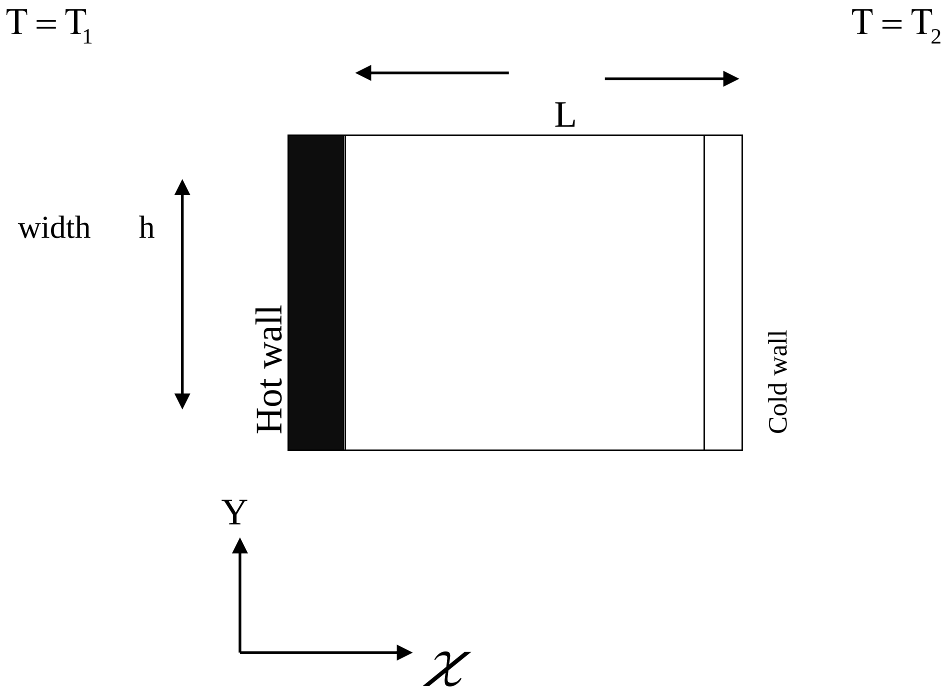
الملخص

في هذا البحث تمت معالجة مسألة انتقال الحرارة بطريقة الحمل الحراري لمائع ساكن في تجويف مستطيل الشكل ببعدين وكان هنالك اختلاف في درجة الحرارة على الجدارين العموديين الموصلين لذلك التجويف .وضعت المعادلات التي تغطي النموذج ، وقد تم حلها عددياً بالطريقة الضمنية التكرارية الإتجاهية (Alternating-Direction Implicit Method) والمعروفة اختصارا باسم طريقة (ADI). والتي يتم فيها تحويل معادلة لابلاس إلى معادلتين من معادلات الفروق المنتهية (Difference equations) ، إذ تستخدم المعادلة تلو الأخرى بصورة متعاقبة بعد تقسيم الفترة الزمنية إلى نصفين يمثلان خطوتين متتاليتين يتم فيها حساب قيمة وسطية في الخطوة الأولى ثم تعقبها القيمة النهائية التي تمثل القيمة بعد زمن معين. وقد تبين من خلال تحليل النتائج أنه يمكن الوصول إلى الحالة اللازمنية (Steady-State) من الحالة المعتمدة على الزمن (Un- Steady-State) .

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري، مائع ساكن، معادلات الفروق المنتهية، الطريقة الضمنية التكرارية الإتجاهية، معادلة الحرارة، الحالة اللازمنية، الحالة المعتمدة على الزمن.

1-النموذج:

نتصور أن هناك مائعاً ساكناً في تجويف مستطيل ، وإن الجدارين العموديين للتجويف موصلة للحرارة أحدهما ساخن والآخر بارد ، وكانت درجة حرارتهما T_1, T_2 على التوالي ، بينما كان الجداران الأفقيان من مادة عازلة. فلو اعتبرنا المحور X موازياً للجدارين العازلين و المحور Y موازياً للجدارين الموصلين ، وان البعد بين الجدارين الموصلين L وان ارتفاع المنطقة h ، ولتكن السرعة عند الجدارين العموديين للتجويف تساوي صفراً [6] ، وكما مبين بالشكل أدناه :



2-المعادلات الرياضية التي تغطي النموذج [8]:

1.معادلة الاستمرارية **Equation of Continuity**

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{.......... ....} (1)$$

2.معادلة الحركة **Equation of motion**

معادلة الحركة باتجاه المحور Y (Y-direction) بالشكل :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma\nabla^2 v-g\beta(T-T_0) \quad \text{.......... ....} (2)$$

أما إذا كانت الحركة على الـ (X-direction) المحور السيني فيكون

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\nabla^2 u \quad \text{.......... ....} (3)$$

3.معادلة الطاقة **Energy equation**

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=k\nabla^2 T+\in\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \quad \text{........ ..} (4)$$

حيث أن

$$\in=\frac{\mu}{C_p\rho}$$

$$k=\frac{\nu}{\rho c_p}$$

3-المعاملات اللابعدية

لغرض حل المسالة رياضيا فانه يجب اولا تحويلها الى الحالة اللابعدية ،وذلك بإدخال المعاملات اللابعدية الأتية[1] :

عدد براندتل (Prandtl number) $$\Pr=\frac{\mu C_p}{k}$$

عدد كيرشوف (Girshof number) $$r=\frac{\beta L^3(T-T_\infty)}{v^2}$$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr.Pr} = \frac{\beta \mathrm{L}^3 (T \ - T_\infty)}{v\alpha}$$ (Rayleigh number) عدد رالي

$$\mathrm{X} = \frac{x}{l}, \mathrm{Y} = \frac{y}{h}, and\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha}, t = \frac{\tau\alpha}{L^2}$$

4- الشروط الحدودية Boundary condition

الشروط الحدّية التي تحقق المعادلات المذكورة أنفاً هي:

1.السرعة Velocity

لا يوجد سرعة للمائع عند الحافات أي أن

$$v = 0 \qquad 0 \le y \le h$$
$$u = 0 \qquad 0 \le x \le l$$

2.درجة الحرارة Temperature

إن درجة الحرارة تعتمد على طبيعة الجدار في وجود انتقال في الحرارة أو عدمه وعلى ذلك يكون :

$T = T_1$ عند y=0

$T = T_2$ y=h

t = 0

.3 $$0 \le x \le L, 0 \le y \le h : u = v = 0.001, T = T_1 = 10$$

t > 0

$x = 0$, x

Or $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$$y = 0 : u = v = 0.001, T = T_1 = 10$$
$$y = h : u = v = 0.001, T = T_2 = 0$$

تصبح معادلة الحرارة بالصيغة اللابعدية كما يأتي [4]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+U\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{X}}+V\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Y}}=\nabla^2\theta$$

$$\nabla^2\theta=\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{X}^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{Y}^2}$$

وإن الشروط الحدية

$$0\le \mathrm{X}\le L,0\le \mathrm{Y}\le h:U=V=0.001,\theta=10$$

$$t>0$$

$$\mathrm{X}=0 and x=L:U=V=0.001,\theta=10$$

Or $\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{X}}=0$

$$\mathrm{Y}=0:U=V=0.001,\theta=0$$

$$\mathrm{Y}=h:U=V=0.001,\theta=0$$

ولحل معادلة الحرارة نحتاج أولاً إلى حل المعادلة $\nabla^2\theta=0$ على الشروط المقيدة :

$$t=0,0\le \mathrm{X}\le L,0\le \mathrm{Y}\le h:U=V=0,\theta=0$$

$$t>0$$

$$\mathrm{X}=0 and \mathrm{X}=L:U=V=0,\theta=0$$

Or $\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{X}}=0$

$$\mathrm{Y}=0:U=V=0.001,\theta=0$$

$$\mathrm{Y}=h:U=V=0.001,\theta=0$$

لأجل الحل سنستخدم إحدى الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعرف بالطريقة الضمنية التكرارية الإتجاهية (ADI) (Implicit -Alternating – direction) [2]

حل معادلة الحرارة بطريقةADI

سنقوم بحل معادلة الحرارة باستخدام الطريقة الضمنية التكرارية الإتجاهية بنفس الطريقة التي استخدمت فيها لحل معادلة لابلاس كما في المصدر[3]

أي أننا سنقوم بحل المعادلة

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

وبعد الحصول على النتائج من معادلة الحرارة . سوف نستخدم هذه النتائج لحل معادلة الحركة التي يكون حلها معتمداً على نتائج معادلة الحرارة وعليه سنقوم بحل معادلة الحركة

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi=-\Pr\nabla^4\psi+\Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

حيث ψ دالة الجريان

باستخدام طريقة (ADI) إذ أننا سنطبق الطريقة على المحور السيني . ومن ثم على المحور الصادي [5]

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-u\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}-v\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad \ldots\ldots.(5)$$

أولاً : على المحور السيني

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\theta^*_{i,j}-\theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}=U_{i,j,n}\,\frac{\theta^*_{i+1,j}-\theta_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$v\frac{\partial\theta}{\partial y}=V_{i,j,n}\,\frac{\theta_{i,j+1,n}-\theta_{i,j-1,n}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial x^2}=\frac{\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial y^2}=\frac{\theta_{i,j+1,n}-2\theta_{i,j,n}+\theta_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}$$

نعوض في المعادلة (5) نحصل على :

$$\frac{\theta^*_{i,j}-\theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}=\frac{\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\theta_{i,j+1,n}-2\theta_{i,j,n}+\theta_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}-U_{i,j,n}\frac{\theta^*_{i+1,j}-\theta^*_{i-1,j}}{2(\Delta x)}-$$

$$V_{i,j,n}\frac{\theta_{i,j+1,n}-\theta_{i,j-1,n}}{2(\Delta y)}$$

$$\frac{\theta^*_{i,j}-\theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}=\frac{2(\Delta y)^2\left[\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}\right]+2(\Delta x)^2\left[\theta_{i,j+1,n}-2\theta_{i,j,n}+\theta_{i,j-1,n}\right]}{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}....$$

$$\underline{-(\Delta x)(\Delta y)^2U_{i,j,n}\left[\theta^*_{i+1,j}-\theta^*_{i-1,j}\right]-(\Delta y)(\Delta x)^2V_{i,j,n}\left[\theta_{i,j+1,n}-\theta_{i,j-1,n}\right]}$$

$$2(\Delta x)^2(\Delta y)^2\left[\theta^*_{i,j}-\theta_{i,j,n}\right]=\frac{\Delta t}{2}\Big[\ 2(\Delta y)^2\theta^*_{i+1,j}-4(\Delta y)^2\theta^*_{i,j}$$

$$+2(\Delta y)^2\theta^*_{i-1,j}+2(\Delta x)^2\theta_{i,j+1,n}-4(\Delta x)^2\theta_{i,j,n}$$

$$+2(\Delta x)^2\theta_{i,j-1,n}-(\Delta x)(\Delta y)^2U_{i,j,n}\theta^*_{i+1,j}+(\Delta x)(\Delta y)^2U_{i,j,n}\theta^*_{i-1,j}$$

$$-(\Delta y)(\Delta x)^2V_{i,j,n}\theta_{i,j+1,n}\ \ +(\Delta y)(\Delta x)^2V_{i,j,n}\theta_{i,j-1,n}\ \Big]$$

وبالتبسيط وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$-\theta^*_{i-1,j}+2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right]}\theta^*_{i,j}-\left[1+\frac{\Delta xU_{i,j,n}}{\left(1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}\right]\theta^*_{i+1,j}$$

$$=\left[1+\frac{\left(\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}-\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}{\left(1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}\right]\theta_{i,j-1,n}+2\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right]}\theta_{i,j,n}+$$

$$+\left(1-\frac{\left(\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right)}{1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}}\right)\theta_{i,j+1,n}$$

ومنها نفرض:

$$A_1(I) = -1$$

$$B_1(I) = 2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right).\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}$$

$$C_1(I) = -1-\frac{\Delta x U_{i,j,n}}{\left(1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}$$

$$D_1(I) = \left[1+\frac{\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}-\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}}{1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}}\right]\theta_{i,j-1,n}+2\left(\frac{1}{\lambda}-1\right).\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}\right)}+$$

$$\left[1-\frac{\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}}{1+\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}}\right]$$

ثانياً : المحور الصادي

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-u\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}}-v\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\theta_{i,j,n+1}-\theta^*_{i,j}}{\frac{\Delta t}{2}}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{x}} = U_{i,j,n}\frac{\theta^*_{i+1,j}-\theta^*_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$v\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{y}} = V_{i,j,n}\frac{\theta_{i,j+1,n+1}-\theta_{i,j-i,n+1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{y}^2} = \frac{\theta_{i,j+1,n+1}-2\theta_{i,j,n+1}+\theta_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2}$$

نعوض في المعادلة (5) نحصل على:

$$\frac{\theta_{i,j,n+1}-\theta^*_{i,j}}{\frac{\Delta t}{2}}=\frac{\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\theta_{i,j+1,n+1}-2\theta_{i,j,n+1}+\theta_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$-U_{i,j,n}\ \frac{\theta^*_{i+1,j}-\theta^*_{i-1,j}}{2(\Delta x)}-V_{i,j,n}\ \frac{\theta_{i,j+1,n+1}-\theta_{i,j-1,n+1}}{2(\Delta y)}$$

$$\frac{\theta_{i,j,n+1}-\theta^*_{i,j}}{\frac{\Delta t}{2}}=\frac{2(\Delta y)^2\left[\theta^*_{i+1,j}-2\theta^*_{i,j}+\theta^*_{i-1,j}\right]+2(\Delta x)^2\left[\theta_{i,j+1,n+1}-2\theta_{i,j,n+1}+\theta_{i,j-1,n+1}\right]-}{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}\ \ldots\ldots$$

$$\underline{(\Delta x)(\Delta y)^2U_{i,j,n}\left[\theta^*_{i+1,j}-\theta^*_{i-1,j}\right]-(\Delta x)^2(\Delta y)V_{i,j,n}\left[\theta_{i,j+1,n+1}-\theta_{i,j-1,n+1}\right]}$$

وبالتبسيط وبإعادة الترتيب نحصل على

$$-\theta_{i,j-1,n+1}+2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right).\frac{1}{\left[1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}\theta_{i,j,n+1}+\left\{-1-\frac{\Delta y V_{i,j,n}}{\left[1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}\right\}\theta_{i,j+1,n+1}$$

$$=\left\{1-\frac{\left[\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}{\left[1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}\right\}\theta^*_{i-1,j}+\left\{2\left(\frac{1}{\lambda}-1\right).\frac{1}{\left[1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}\right\}\theta^*_{i,j}+$$

$$+\left\{1-\frac{\left[\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}{\left[1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right]}\right\}\theta^*_{i+1,j}$$

ومنها نفرض أن :

$$A_2(I)=-1$$

$$B_2(I)=2\left(\frac{1}{\lambda}+1\right).\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right)}$$

$$C_2(I)=-1-\frac{\Delta y V_{i,j,n}}{\left(1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right)}$$

$$D_2(I)=\left[1-\frac{\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}-\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}}{\left(1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right)}\right]\theta^*_{i-1,j}+\left\{2\left(\frac{1}{\lambda}-1\right).\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}\right)}\right\}\theta^*_{i,j}+$$

$$\left\{1-\frac{\frac{\Delta x}{2}U_{i,j,n}+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}}{1+\frac{\Delta y}{2}V_{i,j,n}}\right\}\theta^*_{i+1,j}$$

في الجزء الثاني من هذا البحث سنقوم بحل معادلة الحركة (Motion equation) التي صيغتها اللابعدية هي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}\right)-\frac{\partial}{\partial Y}\left(U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right)\right]=$$

$$\Pr\nabla^2\left[\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right]+\Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

و لأجل تبسيط هذه المعادلة سنقوم بتحويلها إلى صيغة دالة الجريان(Ψ) وذلك كما يأتي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]+\left[\ \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}.\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right)\right\}-\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right\}\ \right]$$

$$=\Pr\frac{\partial v}{\partial x}\nabla^2-\frac{\partial u}{\partial y}\nabla^2+\Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial^3\psi}{\partial y\partial x^2}-\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right\}\right]$$

$$=\Pr\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\Pr\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]+\left[-\frac{\partial^4\psi}{\partial y\partial x^3}-\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3}-\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}\right]$$

$$=-\Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}-\Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}-\Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial x^2}-\Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}+\Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} - \Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial x^2} - \Pr\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} + \Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y\partial x^3} + \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} + \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}(\Pr - 1) - \Pr\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}\right) + \frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y\partial x^3} + \Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\Pr\nabla^4\psi + \Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

المعادلـة الأخيـرة هـي معادلـة مـن الرتبـة الرابعـة وسـنقوم بتخفيضـها إلـى الرتبـة الثانيـة عـن طريـق الفرضية الآتية ، إذ ξ تمثل التدوير $\xi = \nabla^2\psi$ (Vorticity) [7]

ومنها نحصل على :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \Pr\nabla^2\xi + \Pr Ra\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

الآن سنستخدم طريقة الـ (ADI) أيضا لحل المعادلة الأخيرة:

أولاً: المحور السيني

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\xi^*_{i,j} - \xi_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\xi^*_{i+1,j} - 2\xi^*_{i,j} + \xi^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)}$$

وبالتعويض بالمعادلة (8) نحصل على :-

$$\frac{\xi^*_{i,j}-\xi_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}=\Pr\left[\frac{\xi^*_{i+1,j}-2\xi^*{}_{i,j}+\xi^*_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\xi_{i,j+1,n}-2\xi_{i,j,n}+\xi_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}\right]+$$

$$\Pr Ra\left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}}{2\Delta x}\right]$$

$$\frac{\xi^*_{i,j}-\xi_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}=\frac{2\Pr(\Delta y)^2\left[\xi^*_{i+1,j}-2\xi^*{}_{i,j}+\xi^*_{i-1,j}\right]+2Pr(\Delta x)^2\left[\xi_{i,j+1,n}-2\xi_{i,j,n}+\xi_{i,j-1,n}\right]+}{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\Pr Ra\,(\Delta x)(\Delta y)^2\left[\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}\right]}{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}$$

وبإعادة الترتيب

$$-\xi^*_{i-1,j}+2\left(\frac{1}{\lambda\Pr}+1\right)\xi^*_{i,j}-\xi^*_{i+1,j}=\xi_{i,j-1,n}-2\left(\frac{1}{\lambda\Pr}-1\right)\xi_{i,j,n}+\xi_{i,j+1,n}$$

$$+\frac{\Delta x}{2}Ra\left[\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}\right]$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$A_1(I)=-1$$

$$B_1(I)=2\left(1+\frac{1}{\lambda\Pr}\right)$$

$$C_1(I)=-1$$

$$D_1(I)=\xi_{i,j-1,n}+2\left(\frac{1}{\lambda\Pr}-1\right)\xi_{i,j,n}+\xi_{i,j+1,n}+\frac{\Delta x}{2}Ra\left[\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}\right]$$

ثانياً : المحور الصادي

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\xi_{i,j,n+1}-\xi^{*}_{i,j}}{\frac{\Delta t}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\xi^{*}_{i+1,j}-2\xi^{*}_{i,j}+\xi^{*}_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=\frac{\xi_{i,j+1,n+1}-2\xi_{i,j,n+1}+\xi_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)}$$

نعوض بالمعادلة (8) فنحصل على :

$$\frac{\xi_{i,j,n+1}-\xi^{*}_{i,j}}{\frac{\Delta t}{2}}=\Pr\left[\frac{\xi^{*}_{i+1,j}-2\xi^{*}_{i,j}+\xi^{*}_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\xi_{i,j+1,n+1}-2\xi_{i,j,n+1}+\xi_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2}\right]$$
$$+\Pr Ra\left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}}{2\Delta x}\right]$$

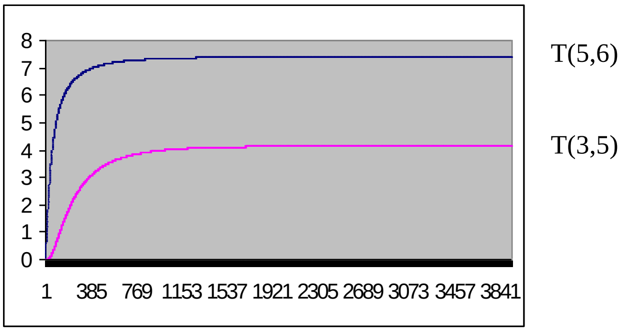
وبالتبسيط وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$-\xi_{i,j-1,n+1}+2\left(\frac{1}{\lambda \Pr}+1\right)\xi_{i,j,n+1}-\xi_{i,j+1,n+1}=\xi^{*}_{i-1,j}+2\left(\frac{1}{\lambda \Pr}-1\right)\xi^{*}_{i,j}+\xi^{*}_{i+1,j}$$
$$+\frac{\Delta x Ra}{2}\left[\theta_{i+1,j,n+1}-\theta_{i-1,j,n+1}\right]$$

الاستنتاجات

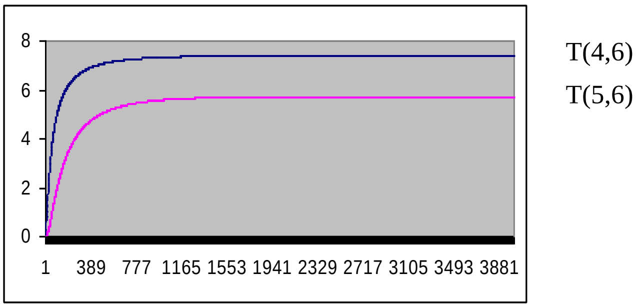
لقد تمت معالجة مسألة الحرارة (معادلة الحرارة و معادلة الحركة) من خلال إحدى المسائل التطبيقية لمكانيك الموائع ، إذ قمنا بتحويل إحدى هذه المسائل من ارض الواقع والمتمثل بـ (مائع ساكن في تجويف مستطيل ، الجداران العموديان للتجويف موصلان للحرارة أحدهما ساخن والآخر بارد ، وكانت درجة حرارتهما T_1, T_2 على التوالي ، بينما كان الجداران الأفقيان من مادة عازلة) إلى نموذج رياضي ، وتم استنباط معادلة الحرارة ومعادلتي الحركة من المعادلات الأساسية التي تغطي النموذج.

ولان أيجاد الحل لمعادلتي الحرارة والحركة يعد من الأمور الصعبة والتي يتعذر إنجازها بالطرائق التحليلية ، فقد تم اختيار إحدى الطرائق العددية التقريبية وهي الطريقة الضمنية التكرارية الإتجاهية المعروفة باسم طريقة الـ ADI (Alternating Direction Implicit Method) التي تعتبر من امثل الطرائق لإنجاز هذه المعالجة لمثل هذا النوع من المعادلات التي ارتأينا حلها، لذا فقد تم تطبيق هذه الطريقة على معادلة الحرارة و الحصول على نتائج جيدة ، إذ أظهرت النتائج و المخططات انه يمكن الوصول إلى الحالة اللازمنية (Steady-State) من الحالة المعتمدة على الزمن (Un Steady-State)، بعد عدد من التكرارات وهذا واضح من خلال الأشكال(1,2,3,4) . إذ انه تم اخذ نقاط مختلفة على الشبكة وتبين منها أن المنحني الذي يمثل درجة الحرارة في تلك النقطة يبدأ بالنمو بعد مرور فترة من الزمن وبعدها تثبت درجة الحرارة وتصبح غير معتمدة على الزمن .هذا واضح في الشكلين (1,2). ويمكن اعتبار نفس الكلام بالنسبة إلى دالة الجريان التي تمثل الحل لمعادلة الحركة وهذا واضح أيضا في الشكلين(3,4).



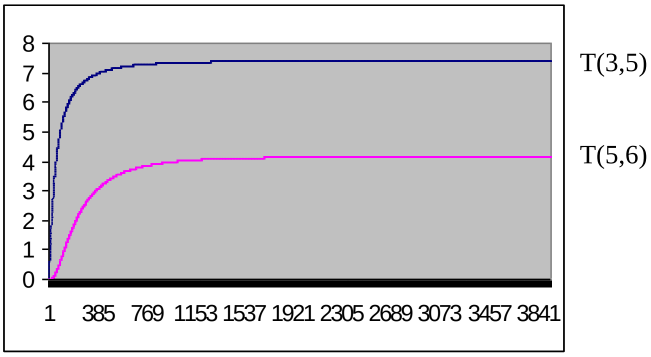
الشكل (1)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين(3,5) و (5,6) في تكرارات الشبكة للمعادلة $\nabla^2\theta = 0$ **بالحالة الخطية**



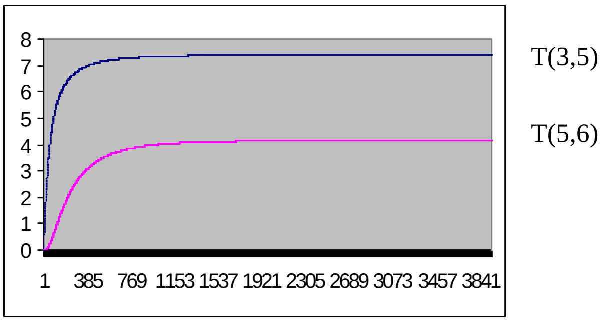
الشكل (2)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين (5,6)و (4,6) في تكرارات الشبكة لمعادلة الحرارة بالحالة العامة



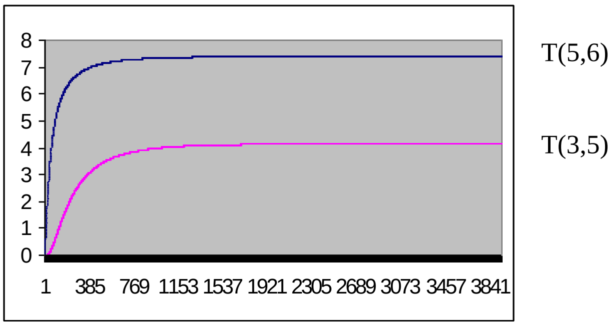
الشكل(3)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين (3,5) و (5,6) في تكرارات الشبكة لمعادلة الحركة بالحالة الخطية



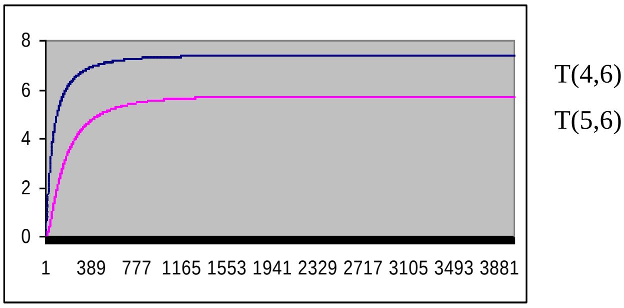
الشكل(4)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين (3,5) و (5,6) في تكرارات الشبكة لمعادلة الحركة بالحالة العامة



الشكل (5)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين(3,5) و (5,6) في تكرارات الشبكة للمعادلة الحركة بالحالة الخطية



الشكل (6)

سلوك درجة الحرارة في الموقعين (5,6) و (4,6) في تكرارات الشبكة لمعادلة الحركة بالحالة العامة

المصادر

[1] Gill A.E. (1966) "The boundary-layer for convection in a rectangular cavity", **Journal of fluid Mechanic**, vol. 26, pp.515-536.

[2] JUMAA A.M. (2001) "Convection in an inclined fluid layer", ch.5, pp. 1-4.

[3] Al-Khafahi, Amir Wadi and John R. Tooley (1986) **Numerical Methods in Engineering Practical**, CBS publishing Japan Ltd., ch13, pp. 553.

[4] Neta B. (2003) "Numerical solution of Partial Differential equations" **MA3243 LECTURE NOTES**, pp. 189

[5] Brice Carnhan, H.A. Luther James O. Wilkees. (1969) "Applied Numerical Methods", New York**: John Wiley**, Ch7, pp. 452-457.

[6] Vasseur, P.; M. Hasnaoui; E. Bilgen and L. Robillard (1995) "Natural convection in an inclined fluid layer with a transverse magnetic field: Analogy with a porous medium", **Journal of Heat Transfer**, Vol. 117, pp. 121-129.

[7] Tieszen, A. Ooi, P. Durbin and M. Behnia (1998) "Modeling of natural convection heat Transfer" pp.290.

[8] Victor. L. Streeter and E. Benjamiam Wylie (1951) **Fluid Mechanics**, ch. 182.