

Stability Analysis of Fisher Equation Using Numerical Galerkin Techniques

Saad A. Manna

Ahmed F. Qassem

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Iraq

Received on: 13/07/2005

Accepted on: 10/10/2005

Abstract

We studied the stability of the steady state solutions for Fisher Equation in two cases, the First one with constant amplitude and we show that the steady state solution $u_1 = 1$ is always stable under any condition, but the other two solutions $u_1 = 0$ and $u_1(x) = A \cos(n\pi X)$ are conditionally stable.

In the Second case, we studied the steady state solutions for various amplitude by using two Methods. The First is analytically by direct Method and the second is numerical method using Galerkin technique which shows the same results, that is the steady state solution $u_1 = 1$ is always stable under any conditions, but the other two solutions $u_1 = 0$ and $u_1(x) = A \cos(n\pi X)$ are conditionally stable.

Keywords: Stability Analysis, Fisher Equation, Galerkin Technique.

تحليل الاستقرار لمعادلة Fisher باستخدام تقنيات Galerkin العددية

أحمد فاروق قاسم

سعد عبد الله مناع

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2005/10/10

تاريخ استلام البحث: 2005/07/13

المخلص

تم تحليل استقرار الحلول اللازمية لمعادلة Fisher وفي حالتين، الأولى في حالة كون السعة ثابتة، وقد تبين أن الحل اللازمي $u_1 = 1$ مستقر دائماً وبصورة غير مشروطة، أما الحلان اللازميان $u_1 = 0$ و $u_1(X) = A \cos(n\pi X)$ فهما مستقران بصورة مشروطة.

أما الحالة الثانية فقد تم دراسة استقرارية الحلول اللازمية في حالة كون السعة متغيرة وباستخدام طريقتين، الأولى تحليلية، والثانية طريقة عددية هي طريقة Galerkin إذ تم التوصل إلى نفس النتائج، وهي أن الحل اللازمي $u_1 = 1$ مستقر دائماً، أما الحلان $u_1 = 0$ و $u_1(X) = A \cos(n\pi X)$ فهما مستقران بصورة مشروطة.

الكلمات المفتاحية: تحليل الاستقرار، معادلة Fisher، تقنية Galerkin.

Introduction

1. المقدمة

إن أي نظام (System) فيزيائي أو بايولوجي أو غيره إذا ما تعرض إلى تأثيرات خارجية (اضطرابات صغيرة) في زمن ما ولم يتأثر سلوك النظام تأثيراً كبيراً في جميع الأزمنة المقبلة، فإن هذا النظام في حالة مستقرة (Stable)، فعلى سبيل المثال إن النظام الشمسي (Solar System) الموجود حالياً هو في حالة الاعتماد على الزمن الذي تتحرك فيه الكواكب حول الشمس وبشكل منتظم، ومن المعروف أنه إذا ما أُدخل جسم سماوي إضافي صغير إلى هذا النظام فإن الحالة الأصلية لن تتأثر بالإزعاجات الصغيرة التي يحدثها ذلك الجسم، لذلك يمكن القول أن الحالة الأصلية مستقرة (Stable)، ويمكن أن تثار أسئلة مماثلة حول الاستقرار في كل مشكلة فيزيائية أو طبيعية [5].

إن معادلة Fisher وضعها العالم فيشر في عام (1937) إذ اقترحها بوصفها نموذجاً رياضياً لدراسة علم حركة السكان و انتشارهم [2].

في عام (2000) درس Gourley [4] حلول الموجة المنقلة لمعادلة Fisher غير المحلية وهي حالة خاصة من معادلات الانتشار - التفاعل إذ لاحظ حلول الموجة المنقلة التي تربط ما بين حالتين منتظمتين من المسألة، وفي عام (2002) قام Wiese & Puri [9] بتطوير توسعات الاضطراب للحصول على حلول لمسائل القيم الابتدائية لنوعين من معادلات الانتشار - التفاعل (Diffusion Equations)، الأولى معادلة Fisher، والثانية معادلة Ginzburg-Landau المعتمدة على الزمن، وفي عام (2004) درس Fort & Mendez & Ortega [7] دور زمن التأخير في نمذجة مدى التوسع البيولوجي لمعادلة Fisher، لقد اثبت البحث بان زمن التأخير يقلل من السرعة المنتبأ بها للموجة المتقدمة مقارنة مع النموذج الكلاسيكي لمعادلة Fisher أي (معادلة Fisher من دون زمن التأخير).

في هذا البحث ستتم دراسة تحليل استقرارية الحلول اللازمنية (Steady State Solutions) لمعادلة Fisher وفي حالتين، الأولى تتناول دراسة تحليل الاستقرارية في حالة كون السعة ثابتة، والثانية تتناول دراسة تحليل الاستقرارية في حالة كون السعة متغيرة مع استخدام طريقة Galerkin العددية في هذه الحالة.

2. النموذج الرياضي

Mathematical Model

إن من معادلات الانتشار غير الخطية معادلة Fisher والتي صيغتها:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(u) \quad \dots(1)$$

حيث $h(u) = ru(1-u)$ هي دالة غير خطية تحقق الشروط الآتية:

$$h(u) \in C^1([0,1])$$

$$h(0) = h(1) = 0$$

$$h'(0) = r > 0$$

$$h'(u) < r$$

$$u \in [0,1]$$

إن $u(x,t)$ تمثل كثافة السكان (Population Density) عند الزمن (t) وعند الموقع (x) ، D هي معامل الانتشار (Diffusion Coefficient) وهي موجبة دائما ، r تمثل معدل نمو السكان (Growth Rate) وهي موجبة أيضا وتزداد إذا وجدت زيادة هائلة في السكان ، وهي تبين كيفية حال السكان بعد زمن معين [8] .

أما الشروط الحدودية والابتدائية المستخدمة في حل معادلة Fisher في الفترة $x \in [0,1]$ فهي الشروط الحدودية لنيومان (Neumann Boundary Conditions) وهي [3]:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots(2)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad x \in [0,1]$$

لغرض إيجاد معادلة Fisher اللابعدية سوف نعرف القيم اللابعدية الآتية [10, 11]:

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad T = \frac{D}{L^2} t$$

حيث L تمثل طول الفترة لـ x أي أن:

$$0 \leq x \leq L$$

وباستخدام هذه التحولات نحصل على:

$$\frac{D}{L^2} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{D}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + ru - ru^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{rL^2}{D}u - \frac{rL^2}{D}u^2 \quad \dots(3)$$

$$\frac{\partial u(0,T)}{\partial X} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u(1,T)}{\partial X} = 0 \quad \dots(4)$$

المعادلة (3) مع الشروط الحدودية (4) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة Fisher.

Stability Analysis

3. تحليل الاستقرار

نفرض أن النظام قد تعرض إلى إزعاج، ونفرض أن $u_1(X)$ تمثل حالة النظام اللابعدية

و $u_2(X, T)$ تمثل حالة الإزعاج المفروضة [5]:

$$u(X, T) = u_1(X) + u_2(X, T) \quad \dots(5)$$

بتعويض (5) في المعادلة (3) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial T} &= \left(\frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} \right) + \frac{rL^2}{D} (u_1 + u_2) - \frac{rL^2}{D} (u_1 + u_2)^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial T} &= \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{rL^2}{D} u_1 + \frac{rL^2}{D} u_2 - \frac{rL^2}{D} u_1^2 - \frac{2rL^2}{D} u_1 u_2 - \frac{rL^2}{D} u_2^2 \end{aligned}$$

ويمكن فصل الحالة اللابعدية لمعادلة Fisher عن الحالة الزمنية وكما يأتي:

$$0 = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{rL^2}{D} u_1 - \frac{rL^2}{D} u_1^2 \quad \dots(6)$$

$$\left. \frac{du_1}{dX} = 0 \text{ at } X = 0, 1 \right\} \quad \dots(7)$$

حيث أن المعادلة (6) مع الشروط الحدودية (7) تمثل الحالة اللابعدية لمعادلة Fisher

.(Steady State Of Fisher Equation)

$$\frac{\partial u_2}{\partial T} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{rL^2}{D} u_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1 u_2 - \frac{rL^2}{D} u_2^2 \quad \dots(8)$$

$$\left. \frac{\partial u_2(X, T)}{\partial X} = 0 \text{ at } X = 0, 1 \right\} \quad \dots(9)$$

حيث أن المعادلة (8) مع الشروط الحدودية (9) تمثل الحالة الزمنية لمعادلة Fisher .

4. الحل اللازمي المنتظم: Uniform Steady State Solution

المعادلة (6) مع الشروط الحدودية (7) لها حلان $u_1 = 0$, $u_1 = 1$ هما الحلون الثابتة (Constant Solutions) إذ أن $u_1 = 0$ يسمى أيضا بالحل التافه [4] .

وللحصول على الحل غير الثابت (Nonconstant Solution) للمعادلة (6) مع الشروط الحدودية نلجأ إلى Linearized Stability Analysis للمعادلة (6) [5,10] لتصبح :

$$\frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{rL^2}{D} u_1 = 0 \quad \dots(10)$$

إن المعادلة (10) هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية ومتجانسة والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$u_1(X) = A \cos MX + B \sin MX \quad \dots(11)$$

حيث أن $M = \sqrt{\frac{rL^2}{D}}$ ، A ، B ثوابت .

بتعويض الشروط الحدودية (7) في المعادلة (11) نحصل على:

$$BM = 0 \quad \dots(12)$$

$$-AM \sin(M) + BM \cos(M) = 0 \quad \dots(13)$$

من المعادلة (12) بما أن $M = \sqrt{\frac{rL^2}{D}} > 0$ إذن $B = 0$.

بالتعويض عن قيمة B في المعادلة (13) نجد أن :

$$-AM \sin(M) = 0$$

حيث أن $M > 0$.

إما $A = 0$ وهذا هو الحل التافه $u_1 = 0$

أو

$$\sin(M) = 0$$

$$\Rightarrow M = n\pi \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{rL^2}{D}} = n\pi \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{rL^2}{D} = (n\pi)^2, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

إذاً الحل اللازمي لمعادلة Fisher الذي يحقق الشروط الحدودية (7) هو:

$$u_1(X) = A \cos(n\pi X), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \dots(14)$$

5. تحليل الاستقرار في حالة السعة الثابتة (حالة الاضطراب):

إن المعادلة (8) تمثل الحالة الزمنية لمعادلة فيشر وبإهمال $u_2^2(X, T)$ لأنه مقدار صغير جداً (حسب فرضية أن الإزجاج صغير) [5].

المعادلة (8) تصبح:

$$\frac{\partial u_2}{\partial T} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{rL^2}{D} u_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1 u_2 \quad \dots(15)$$

نفرض أن:

$$u_2(X, T) = P e^{ik(x-ct)} \quad \dots(16)$$

حيث أن $k > 0$ تمثل العدد الموجي، $P > 0$ تمثل سعة الموجة (Amplitude)، وتكون في هذه الحالة ذات قيمة ثابتة، إما c فتمثل سرعة الموجة، وهي ذات قيمة معقدة (Complex) $(c = c_1 + ic_2)$ ، وإن القيمة الموجبة أو السالبة لـ c_2 بهذه الحالة هي التي تؤدي إلى نمو الإزجاج أو تلاشيها على التوالي، فعندما تكون $c_2 > 0$ فالنظام يكون غير مستقر (Unstable)، وعندما تكون $c_2 < 0$ فالنظام يكون مستقراً (Stable) [5].

بتعويض الفرضية (16) في المعادلة (15) نجد أن:

$$-ikc P e^{ik(x-ct)} = i^2 k^2 P e^{ik(x-ct)} + \frac{rL^2}{D} P e^{ik(x-ct)} - \frac{2rL^2}{D} P e^{ik(x-ct)} u_1(X)$$

يمكن تبسيط المعادلة السابقة لتصبح:

$$-ikc = -k^2 + \frac{rL^2}{D} - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) \quad \dots(17)$$

$$-ik(c_1 + ic_2) = -k^2 + \frac{rL^2}{D} - \frac{2rL^2}{D} u_1(X)$$

$$\Rightarrow -ikc_1 + kc_2 = -k^2 + \frac{rL^2}{D} - \frac{2rL^2}{D} u_1(X)$$

بعد فصل الجزء الحقيقي والجزء الخيالي نحصل على:

$$-ikc_1 = 0$$

$$kc_2 = -k^2 + \frac{rL^2}{D} - \frac{2rL^2}{D}u_1(X)$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-k^2D + rL^2 - 2rL^2u_1(X)}{kD} \quad \dots(18)$$

بما أن c_2 هي عامل التضخم (Amplification Factor) التي تؤدي إلى تحديد حالة الاستقرارية، وان هناك ثلاثة حلول لا زمنية $u_1(X)$ لمعادلة Fisher ، لذلك فهناك ثلاث حالات للمعادلة (16) هي:

1.الحل اللازمي الأول:

عندما تكون $u_1 = 0$ ، فان المعادلة (18) تصبح

$$c_2 = \frac{-k^2D + rL^2}{kD} \quad \dots(19)$$

وبذلك يكون الحل $u_1 = 0$ مستقراً إذا كانت

$$k^2D > rL^2$$

حيث $L^2 > 0, D > 0, r > 0$

2.الحل اللازمي الثاني:

عندما $u_1 = 1$ ، فان المعادلة (18) تصبح:

$$c_2 = \frac{-k^2D - rL^2}{kD}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-[k^2D + rL^2]}{kD}$$

بما أن $k > 0, L^2 > 0, D > 0, r > 0$ لذلك تكون $c_2 < 0$ دائما وبذلك يكون النظام في هذه الحالة مستقراً دائما.

3.الحل اللازمي الثالث:

عندما يكون $u_1(X) = A\cos n\pi X$ كما في المعادلة (14) فان المعادلة (18) تصبح:

$$c_2 = \frac{-k^2D + rL^2 - 2rL^2 A\cos(n\pi X)}{kD} \quad \dots(20)$$

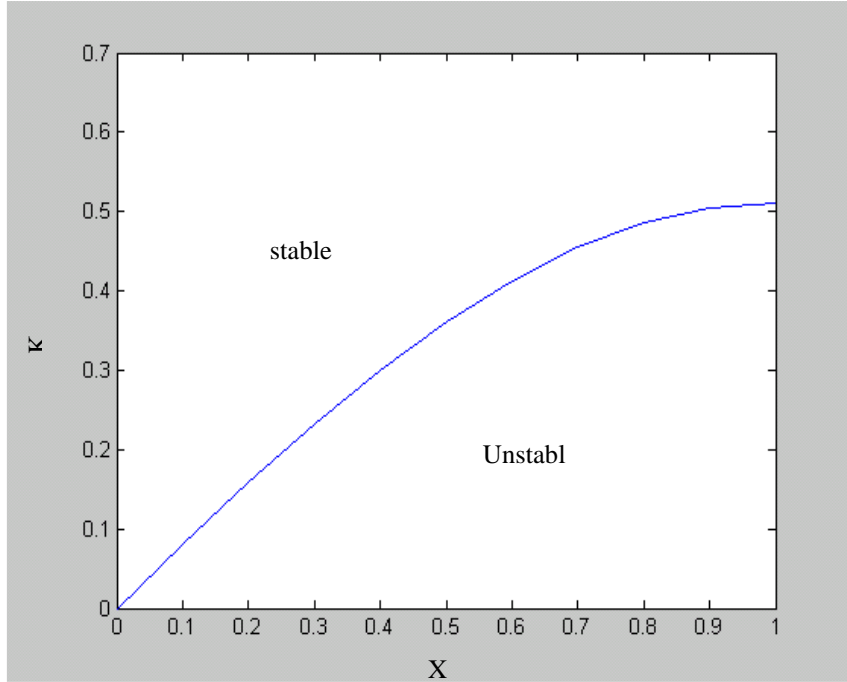
ولإيجاد منحنى الاستقرارية المتعادل (Neutral Stability Curve) نضع $c_2 = 0$ ،

ونأخذ اقل قيمة ذاتية عندما يكون $n = 1$ فنحصل من المعادلة (20) على:

$$k^2D = rL^2 - 2rL^2 A\cos(\pi X)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{rL^2 - 2rL^2 A \cos(\pi X)}{D}} \quad \dots(21)$$

حيث أن $r > 0$ و $D > 0$ وان $k > 0$ ، $L^2 > 0$ ، $A > 0$ وقسيم المنطوق
 $0 \leq X \leq 1$: هي X ل



الشكل (1)

يمثل منحنى الاستقرار المتعادل للمعادلة (21)

عندما $A = 0.5$ ، $L^2 = 1$ ، $r = 1$ ، $D = 1$.

6. تحليل الاستقرار في حالة السعة المتغيرة (حالة الاضطراب):

سوف تتم في هذا البند دراسة الاستقرار في حالة السعة المتغيرة وبطريقتين، الأولى دراسة
 الاستقرار بطريقة تحليلية ، والثانية دراسة الاستقرار بطريقة عددية باستخدام طريقة Galerkin
 العددية .

نفرض أن

$$u_2(X, T) = F(X)e^{ik(x-ct)} \quad \dots(22)$$

حيث أن $k > 0$ هي قيمة حقيقية لا بعدية لطول الموجة ، $F(X)$ تمثل سعة الموجة (Amplitude) ، وتكون في هذه الحالة متغيرة أي دالة بدلالة X [6] .

بتعويض المعادلة (22) في المعادلة (15) نحصل على :

$$-ikcF(X)e^{ik(x-ct)} = -k^2F(X)e^{ik(x-ct)} + i2kF'(X)e^{ik(x-ct)} + F''(X)e^{ik(x-ct)} + \frac{rL^2}{D}F(X)e^{ik(x-ct)} - \frac{2rL^2}{D}u_1(X)F(X)e^{ik(x-ct)}$$

بعد تبسيط المقدار نحصل على:

$$-ikcF(X) = -k^2F(X) + i2kF'(X) + F''(X) + \frac{rL^2}{D}F(X) - \frac{2rL^2}{D}u_1(X)F(X) \quad \dots (23)$$

$$\Rightarrow -ikc_1F(X) + kc_2F(X) = -k^2F(X) + i2kF'(X) + F''(X) + \frac{rL^2}{D}F(X) - \frac{2rL^2}{D}u_1(X)F(X)$$

بعد فصل الجزء الحقيقي والجزء الخيالي نحصل على:

$$-ikc_1F(X) = i2kF'(X)$$

$$kc_2F(X) = -k^2F(X) + F''(X) + \frac{rL^2}{D}F(X) - \frac{2rL^2}{D}u_1(X)F(X)$$

$$\Rightarrow F''(X) + \left(\frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D}u_1(X) \right) F(X) = 0 \quad \dots (24)$$

والشروط الحدودية (9) تصيح:

$$F'(X) = 0 \quad \text{at } X = 0 \quad \text{and } X = 1 \quad \dots (25)$$

Analytical Solution

أولاً: الحل التحليلي

يمكن كتابة المعادلة (24) بالشكل الآتي :

$$F''(X) + \lambda F(X) = 0 \quad \dots (26)$$

حيث أن

$$\lambda = \frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D}u_1(X) \quad \dots (27)$$

إن الحل العام للمعادلة (26) يكون بالصيغة الآتية:

$$F(X) = a \cos \sqrt{\lambda}X + b \sin \sqrt{\lambda}X \quad \dots (28)$$

بتعويض الشروط الحدودية (2 5) يمكن أن نحصل على

$$b\sqrt{\lambda} = 0 \quad \dots(29)$$

$$-a\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + b\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0 \quad \dots(30)$$

من المعادلة (29) ، بما أن $\lambda > 0$ لذلك فإن $b = 0$.
إذاً المعادلة (30) تصبح:

$$-a\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

$$\lambda > 0$$

حيث

إما $a = 0$ وهذا يؤدي إلى الحل التافه.

أو

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = (n\pi)^2$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

من المعادلة (27) نحصل على :

$$\frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D}u_1(X) = (n\pi)^2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-k^2D - 2rL^2u_1(X) - (n\pi)^2D + rL^2}{kD} \quad \dots(31)$$

بما أن c_2 هي التي تؤدي إلى تحديد حالة الاستقرار، وإن هناك ثلاثة حلول لا زمنية $u_1(X)$ لمعادلة Fisher ، لذلك فإن هناك ثلاث حالات للمعادلة (31) هي:

1. الحل اللازمي الأول:

عندما $u_1 = 0$ فإن المعادلة (31) تصبح:

$$c_2 = \frac{-k^2D - (n\pi)^2D + rL^2}{kD} \quad \dots(32)$$

وبذلك يكون الحل $u_1 = 0$ مستقراً (Stable) إذا كان :

$$k^2D + (n\pi)^2D > rL^2$$

$$L^2 > 0, D > 0, r > 0$$

حيث

2. الحل اللازمي الثاني:

عندما $u_1 = 1$ فإن المعادلة (31) تصبح:

$$c_2 = \frac{-k^2 D - rL^2 - (n\pi)^2 D}{kD}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-[k^2 D + rL^2 + (n\pi)^2 D]}{kD}$$

بما أن $k > 0, (n\pi)^2 > 0, L^2 > 0, D > 0, r > 0$ فإن $c_2 < 0$ دائماً، وبذلك يكون الحل $u_1 = 1$ مستقراً دائماً.

3. الحل اللازمي الثالث:

عندما $u_1(X) = A \cos(n\pi X)$ فإن المعادلة (31) تصبح:

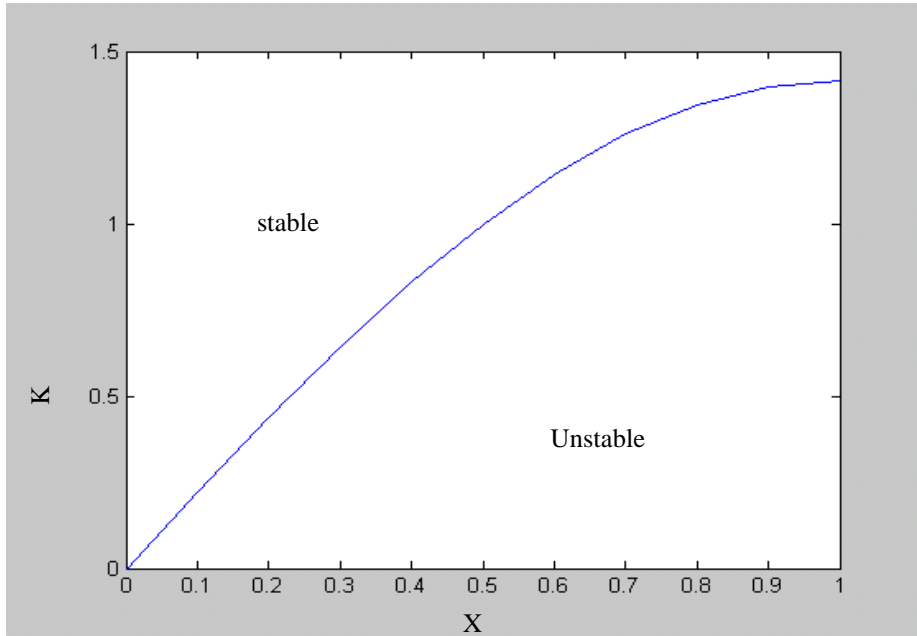
$$c_2 = \frac{-k^2 D - 2rL^2 A \cos(n\pi X) - (n\pi)^2 D + rL^2}{kD} \quad \dots(33)$$

ولإيجاد منحنى الاستقرارية المتعادل (Neutral stability curve) نضع $c_2 = 0$ ونأخذ اقل قيمة ذاتية عندما $n = 1$ فنحصل من المعادلة (33) على:

$$k^2 D = -2rL^2 A \cos(\pi X) - (\pi)^2 D + rL^2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{rL^2}{D} - \frac{2rL^2 A \cos(\pi X)}{D} - 9.8696} \quad \dots(34)$$

حيث أن $A > 0, L^2 > 0, k > 0, D > 0, r > 0$ وقيم المنطق لـ X هي $0 \leq X \leq 1$



الشكل (2)

يمثل منحنى الاستقرارية المتعادل للمعادلة (34)

عندما $A = 0.00652, L^2 = 1, r = 10, D = 1$.

ثانياً: تقنية Galerkin العددية

سوف يتم إيجاد حل عددي للمعادلة (24) مع الشروط الحدية (25) باستخدام طريقة Galerkin العددية [1].

نفرض أن الحل للمعادلة (26) بالشكل الآتي :

$$F(X) = \sum_{v=1}^{\infty} (A_v \cos \lambda_v X + B_v \sin \lambda_v X) \quad \dots(35)$$

بأخذ أحد حدود الحل السابق للمعادلة (35) نحصل على :

$$F(X) = A_v \cos \lambda_v X + B_v \sin \lambda_v X \quad \dots(36)$$

وباستخدام الشروط الحدية (25) نجد أن:

$$B_v \lambda_v = 0 \quad \dots(37)$$

$$-A_v \lambda_v \sin \lambda_v + B_v \lambda_v \cos \lambda_v = 0 \quad \dots(38)$$

من المعادلة (37) بما أن $\lambda_v \neq 0$ إذاً $B_v = 0$ لذلك فإن المعادلة (38) تصبح:

$$-A_v \lambda_v \sin \lambda_v = 0$$

بما أن $\lambda_v \neq 0$ ، إما $A_v = 0$ وهذا هو الحل التافه .

أو

$$\sin \lambda_v = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_v = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بما أن $B_v = 0$ ، إذاً الحل (36) لكي يحقق الشروط الحدية (25) يصبح :

$$F(X) = A_v \cos \lambda_v X$$

حيث أن

$$\lambda_v = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بما أن الحل (36) هو أحد حدود الحل المفروض (35)، لذلك فإن الحل (35)، ولكي يحقق

الشروط الحدية (25) يجب أن يكون بالشكل الآتي:

$$F(X) = \sum_{v=1}^{\infty} A_v \cos \lambda_v X \quad \dots(39)$$

$$\lambda_v = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بتعويض المعادلة (39) في المعادلة (24) نحصل على :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-\lambda_v^2 A_v \cos \lambda_v X) + \sum_{v=1}^{\infty} A_v \left(\frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) \right) \cos \lambda_v X = 0$$

حسب طريقة Galerkin فان التقريب هنا لا يساوي صفرًا بل هو نسبة خطأ (Error) والذي يطلق عليه المتبقي (Residual) أي أن :

$$\sum_{v=1}^p (-\lambda_v^2 A_v \cos \lambda_v X) + \sum_{v=1}^p A_v \left(\frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) \right) \cos \lambda_v X = \epsilon$$

وحيث أن هذا الخطأ أو المتبقي (ϵ) وحسب طريقة Galerkin نسعى إلى جعله اقل ما يمكن (Minimize the error)، وان التكامل المحدد بالشروط الحدودية للمتبقي السابق مضروباً بدالة يكون مساوياً للصفر [1] لذلك فان:

$$\int_0^1 \left[\sum_{v=1}^p \sum_{m=1}^p (-\lambda_v^2 A_v \cos \lambda_v X) \varphi_m(X) + \sum_{v=1}^p \sum_{m=1}^p \left(\frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) \right) (A_v \cos \lambda_v X) \varphi_m(X) \right] dX = 0 \quad \dots(40)$$

حيث أن $\varphi_m(X)$ هي دالة مثلثية مناسبة

$$\varphi_m(X) = \sin \lambda_m X$$

$$\lambda_m = m\pi \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

من المعادلة (40) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) &= \lambda_v^2 \\ \Rightarrow \frac{rL^2}{D} - k^2 - kc_2 - \frac{2rL^2}{D} u_1(X) &= (n\pi)^2 \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{-k^2 D - 2rL^2 u_1(X) - (n\pi)^2 D + rL^2}{kD} \quad \dots(41) \end{aligned}$$

نلاحظ أن المعادلة (41) هي مطابقة للحل التحليلي (31) وهذا يدل على كفاءة طريقة Galerkin العددية وكذلك يبرهن على صحة الحل التحليلي الذي تم التوصل إليه في إيجاد شروط الاستقرارية لمعادلة Fisher في حالة السعة المتغيرة.

المصادر

- [1] Allaire, P. E. (1985) **Basics of the Finite Element Method**, Wm. C. Brown Publishers.
- [2] Fisher, R.A. (1937) “The Wave of Advance of Advantageous Genes”, **Annals of Eugenics** 7, pp. 355–369.
- [3] Fory’s, U. and A. Marciniak–Czochra, (2003) “Logistic Equations in Tumour Growth Modelling”, **Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.**, Vol. 13, No. 3, pp. 317–325.
- [4] Gourley, S.A. (2000) “Travelling Front Solutions of a Nonlocal Fisher Equation”, **J. Math. Biol.** 41, pp. 272–284.
- [5] Logan, J. D. (1987) **Applied Mathematics**, John Wiley and Sons.
- [6] Manaa, Saad A. and B.M. Ibrahim, (2004) “Stability Analysis for A Fully Developed Laminar Fluid Flow in A Rectangular Bend with Secondary Flow”, **Raf. Jour. Sci.**, Vol. 15, No.1, Math & Stati., Special Issue, pp. 146-152.
- [7] Ortega–Cejas, V.; J. Fort, and V. Mendez, (2004) “The Role of The Delay Time in The Modeling of Biological Range Expansions”, **J. Ecology**, 85 (1), pp. 258–264.
- [8] Pesin, Y. and A. Yurchenko, (2004) “Some Physical Models of The Reaction–Diffusion Equation and Coupled Map Lattices”, **Russian Math. Surveys**, Vol. 8, No. 3, pp.177-218.
- [9] Puri, S. and Wiese, K. J. (2003) “Perturbative Linearization of Reaction–Diffusion Equations”, **J. Phys.**, A36, pp.2043-2054.
- [10] Sasaki, T. (2004) “The Effect of Local Prevention in an Sis Model With Diffusion”, **Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B** , Vol. 4, No. 3 , PP. 739–746.
- [11] Smith, G. D. (1965) **Numerical Solution of Partial Differential Equations**, Oxford University Press,