Some Results in the Theory of Fractional Order Integro-Differential Equation with Boundary Conditions

Azzam S.Younes
College of Education
University of Mosul, Iraq

Received on: 12/01/2010 **Accepted on: 29/06/2010**

ABSTRACT

This paper deals with the existence and uniqueness of the solution for a boundary value problem of fractional order integro-differential equation, when $0<\alpha<1$ using Banach fixed point theorem and Shafer's fixed point theorem. This investigation based on the well known Riemann-Liouville fractional differential operator.

Keywords: integro-differential equation, boundary conditions, fractional order, Riemann-Liouville fractional differential operator.

بعض النتائج في نظرية المعادلات التكاملية- التفاضلية ذات الرتب الكسرية مع شروط حدودية

عزام صلاح الدين يونس
كلية التربية، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2010/01/12 **تاريخ قبول البحث: 2010/06/29**

الملخص

تناولنا في هذه الدراسة وجود و وحدانية الحل لمعادلة تكاملية – تفاضلية ذات رتبة كسرية α عندما $0<\alpha<1$ مع شروط حدودية و ذلك باستخدام مبرهنتي بناخ وشافير للنقطة الثابتة. واعتمدنا في تعريف الرتبة الكسرية على المؤثر المعروف بمؤثر ريمان- ليوفيل للمشتقة الكسرية.

الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية – تفاضلية ، شروط حدودية ، رتب كسرية ، مؤثر ريمان- ليوفيل .

أولاً: مقدمة تاريخية

لقد ارتبط حساب التفاضل و التكامل الكسري بالعديد من العلماء لعل أشهرهم .Leibnitz ,Hospital L و.Riemann B. , G.W Liouville J. [3] الذين أعطوا التعاريف الأساسية للمشتقة الكسرية، ومن بعد هؤلاء استمرت الأبحاث في هذا المجال وباتجاهات مختلفة. إذ وسع الباحث .M.A Bassam. [2] تعريف Holmgren-M.Riesz وطبق النتائج التي حصل عليها على بعض نظريات الوجود للمعادلات التفاضلية الاعتيادية. ودرس كل من الباحثين AL-Abdeen A.Z و.Arora H.L [1] وجود ووحدانية الحل للمعادلة التفاضلية ذات الرتب الكسرية الآتية :

$$x^{\alpha}(t)=f(t,x) \qquad x^{\alpha-1}(t_0)=x_0, \qquad 0<\alpha<1$$

مستخدمين في ذلك طريقة بناخ للنقطة الثابتة. كذلك درس [4] و[5] وجود ووحدانية الحل لمعادلات تفاضلية ذات رتب كسرية مع شروط حدودية.

في هذا البحث تناولنا وجود ووحدانية الحل لمعادلة تفاضلية- تكاملية ذات رتبة كسرية مع شروط حدودية و باستخدام المؤثر التفاضلي لريمان- ليوفل و من الشكل التالي :

$${}^{R}D^{\alpha}y(t)= f(t,y(t),\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(s,y(s))), \quad t\in[0,T] \qquad \ldots(1)$$

مع الشرط الحدودي

$$a\, y^{\alpha-1}(0)+b\, y^{\alpha-1}(T)=c \qquad \ldots(2)$$

حيث f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[0,T]\times R\times R$ و a,b,c ثوابت و أن $a+b\neq 0$ ، كذلك ${}^{R}D^{\alpha}$ هو المؤثر التفاضلي لريمان− ليوفل.

ثانياً: تعاريف ومبرهنات

سنقدم في هذا البند بعض التعاريف التي سنستخدمها في هذا البحث.

ليكن $C[0,T]$ فضاء بناخ للدوال الحقيقية المستمرة على الفترة $[0,T]$ مع المعيار:

$$\|y\|_{\infty}=\sup\left\{|y(t)|:t\in[0,T]\right\}$$

تعريف:

لتكن الدالة f معرفة دائما تقريبا على الفترة $[a,b]$ وقابلة للقياس حسب مفهوم ليبيك ولتكن $\alpha>0$ فيعرف التكامل من الرتبة α للدالة f الشكل

$$\overset{b}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f=\frac{1}{\Gamma\alpha}\int_{a}^{b}(b-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

بشرط أن يكون التكامل موجودا.

تعريف:

لتكن الدالة f معرفة دائما تقريبا على الفترة $[a,b]$ وقابلة للقياس حسب مفهوم ليبيك ولتكن $\alpha>0$ فتعرف مشتقة ريمان− ليوفل من الرتبة α للدالة f بالشكل

$$({}^{R}D_{a}^{\alpha}y)(t)=D^{n}\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{n-\alpha}y=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds$$

حيث $n=[\alpha]+1$, كما سنستخدم الرموز $y^{(\alpha)}(t)={}^{R}D_{a}^{\alpha}y(t)$, ${}^{R}D_{a}^{-\alpha}y(t)=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha}y(s)$

مبرهنة 1: [3]

لتكن f دالة قابلة للقياس على الفترة $[a,b]$ وأن $\alpha>0$, $\beta>0$ فإن

$$\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha}\overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{\beta}f=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha+\beta}f=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{\beta}\overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha}f \qquad , \qquad {}^{R}\overset{t}{\underset{a}{D}}{}^{\alpha}\overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha}f=f \quad a.e.$$

مبرهنة 2: [3]

إذا كانت $\alpha>0$ و $\beta>-1$ و $t>a$ فإن

$$\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha}\ \frac{(s-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}=\frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}$$

$$^{R}\overset{t}{\underset{a}{D}}{}^{\alpha}\ \frac{(s-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}=\frac{(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$$

وإذا كانت $\beta-\alpha\in Z^{-}$ فإن الطرف الأيمن يساوي صفراً لأن

$$\Gamma(\beta-\alpha+1)=+\infty\ (-\infty)$$

مأخوذة:

إذا كانت $0<\alpha<1$ و $y:(0,T]\rightarrow R$ دالة مستمرة. فان الدالة y تكون حلا للمعادلة التفاضلية من الرتبة الكسرية:

$$^{R}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(s,y(s))),\quad t\in[0,T] \qquad \ldots(1)$$

حيث Ψ, f دوال مستمرة على منطلقها وتحقق الشرط الحدودي

$$a\,y^{\alpha-1}(0)+b\,y^{\alpha-1}(T)=c \qquad \ldots(2)$$

إذا و فقط إذا كان y حلا للمعادلة التكاملية ذات الرتبة الكسرية

$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{1}{\Gamma\alpha}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\\&+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]\end{aligned} \qquad \ldots(3)$$

البرهان:

ليكن y حلا للمعادلة التفاضلية (1) ويحقق الشرط الحدودي (2). بأخذ التكامل لطرفي المعادلة (1) فإن

$$\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1}\ {}^{R}D^{\alpha}y(s)=y_0+\int_{0}^{t}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds$$

حيث أن y_0 هو ثابت اختياري، كما يمكن كتابتها بالشكل

$$y^{(\alpha-1)}(t)=y_0+\int_{0}^{t}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds \qquad \ldots(4)$$

ومنها نجد أن

$$y^{(\alpha-1)}(0)=y_0$$

$$y^{(\alpha-1)}(T)=y_0+\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds$$

وبتعويض قيم $y^{(\alpha-1)}(0)$ و $y^{(\alpha-1)}(T)$ في الشرط الحدودي (2) فإن

$$ay_0+b\left(y_0+\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds\right)=c$$

ومنها نحسب قيمة y_0

$$y_0 = -\frac{b}{a+b}\int_0^T f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + \frac{c}{a+b}$$

بالعودة إلى المعادلة (4) وملاحظة تكافؤ الرموز $y^{(\alpha-1)}(t) = \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha} y(s)$ فإن

$$\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha} y(s) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds$$

نشتق حدود المعادلة ونجعلها من الرتبة $1-\alpha$ وحسب المبرهنة (1) والمبرهنة (2) فإن

$$\overset{t}{\underset{0}{D}}{}^{1-\alpha}\, \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha} y(s) = \overset{t}{\underset{0}{D}}{}^{1-\alpha} y_0 + \overset{t}{\underset{0}{D}}{}^{1-\alpha} \int_0^t f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds$$

$$= y_0 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} \int_0^t f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds$$

$$= y_0 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D\int_0^t \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds$$

$$y(t) = y_0 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds$$

وبتعويض قيمة y_0 نستنتج

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + $$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]$$

مما يعني أن كل حل للمعادلة التفاضلية (1) يحقق الشرط الحدودي (2) سيكون حلا للمعادلة التكاملية (3).

ولإثبات العكس نبدأ بالمعادلة التكاملية (3) وليكن y حلا لها. نشتق طرفي المعادلة ونجعلها من الرتبة α

$$y^{(\alpha)}(t) = D_0^{\alpha}\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma))) + $$

$$+D_0^{\alpha}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]$$

وحسب المبرهنتين (1) و(2) نستنتج

$$y^{(\alpha)}(t) = f(t, y(t), \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))$$

أي أن الدالة y تحقق المعادلة التفاضلية (1).

بقي أن نثبت أن y تحقق الشرط الحدودي (2)، بأخذ التكامل من الرتبة $1-\alpha$ لطرفي المعادلة التكاملية (3) وبملاحظة تكافؤ المؤثرين $y^{(\alpha-1)}(t) = \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha} y(s)$ فإن

$$y^{(\alpha-1)}(t) = \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha}\, \overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma))) + $$

$$+\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{1-\alpha}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s, y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]$$

وحسب المبرهنتين (1) و(2) نستنتج

$$y^{(\alpha-1)}(t)=\int_0^t f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds$$
$$+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

وتكون القيم الحدودية للدالة y :

$$y^{(\alpha-1)}(0)=\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

$$y^{(\alpha-1)}(T)=\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+$$
$$+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

$$\therefore\ ay^{\alpha-1}(0)+by^{\alpha-1}(T)=a\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$
$$+b\left[\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]\right]$$
$$=\left[\frac{-ab+b(b+a)-b^2}{(a+b)}\right]\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{(a+b)c}{(a+b)}$$
$$=c$$

لذا فإن كل حل للمعادلة التكاملية (3) سوف يكون حلا للمعادلة التفاضلية (1) ويحقق الشرط الحدودي (2)

ثالثاً: وجود ووحدانية الحل

في هذا البند سنبرهن وجود ووحدانية الحل للمسالة (1)-(2) باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة حسب مفهوم التطبيقات الانكماشية على فضاء بناخ $C[0,T]$.

مبرهنة:

إذا كانت $f:[0,T]\times R\times R\to R$ و $\Psi:[0,T]\times R\to R$ دوالاً مستمرة. وإذا كانت K_1,K_2,K_3 ثوابت موجبة بحيث أنه لكل $t\in[0,T]$ و $y_1,y_2,w_1,w_2\in R$ فإن

$$|f(t,y_1,w_1)-f(t,y_2,w_2)|\le K_1|y_1-y_2|+K_2|w_1-w_2| \qquad \ldots(5)$$
$$|\Psi(t,y_1)-\Psi(t,y_2)|\le K_3|y_1-y_2| \qquad \ldots(6)$$

وإذا كانت

$$\left[\left(\frac{K_1\Gamma(\alpha)T^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)}+\frac{K_2K_3\Gamma(\alpha)T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\right)+\frac{b}{(a+b)}\left(\frac{K_1T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{K_2K_3T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\right]<1 \qquad \ldots(7)$$

فان للمعادلة (1) مع الشرط الحدودي (2) حل وحيد على الفترة $[0,T)$.

البرهان:

لإثبات وجود ووحدانية الحل للمسألة (1)-(2) على الفترة $[0,T)$ سنستفيد من النقطة الثابتة للمؤثر:

$$T : C[0,T] \to C[0,T]$$

$$T(y)(t)=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\mathop{I}_{0}^{t}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))+$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

ولكل $y_1, y_2 \in C[0,T]$ فإن

$$\left|T(y_1)(t)-T(y_2)(t)\right|\le t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\mathop{I}_{0}^{t}{}^{\alpha}\left|f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(\sigma)))-\right.$$

$$\left.-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(\sigma)))\right|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left|f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(\sigma)))\right.$$

$$\left.-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(\sigma)))\right|ds$$

ومن الشرط (5) و(6) نحصل على

$$\left|T(y_1)(t)-T(y_2)(t)\right|\le t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\mathop{I}_{0}^{t}{}^{\alpha}\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right|+\right.$$

$$\left.+K_2\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\left|\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(\sigma))-\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(\sigma))\right|\right)$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right|+\right.$$

$$\left.+K_2\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\left|\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_1(\sigma))-\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_2(\sigma))\right|\right)ds$$

$$\le t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\mathop{I}_{0}^{t}{}^{\alpha}\left(\frac{K_1s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right|+K_2K_3\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(\sigma)-y_2(\sigma)\right|\right)+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(\frac{K_1s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right|+K_2K_3\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(\sigma)-y_2(\sigma)\right|\right)ds$$

$$\le t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\, {}_0^t I^{\alpha}\left(\frac{K_1 s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right| + K_2K_3\, {}_0^s I^{\beta}\,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(\sigma)-y_2(\sigma)\right|\right)+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(\frac{K_1 s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(s)-y_2(s)\right| + K_2K_3\, {}_0^s I^{\beta}\,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|y_1(\sigma)-y_2(\sigma)\right|\right)ds$$

$$\le t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\, {}_0^t I^{\alpha}\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + K_2K_3\, {}_0^s I^{\beta}\,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + K_2K_3\, {}_0^s I^{\beta}\,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds\left\|y_1-y_2\right\|$$

$$= t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\, {}_0^t I^{\alpha}\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + K_2K_3\frac{s^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + K_2K_3\frac{s^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)ds\left\|y_1-y_2\right\|$$

$$= t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\left(K_1\frac{s^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + K_2K_3\frac{s^{2\alpha+\beta-1}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K_2K_3\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|$$

$$=\left(K_1\frac{\Gamma(\alpha)s^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)} + K_2K_3\frac{\Gamma(\alpha)s^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K_2K_3\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\left\|y_1-y_2\right\|$$

$$\le\left[\left(K_1\frac{\Gamma(\alpha)T^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)} + K_2K_3\frac{\Gamma(\alpha)T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K_2K_3\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\right]\left\|y_1-y_2\right\|$$

$$\therefore \left\|T(y_1)-T(y_2)\right\|\le\left[\left(K_1\frac{\Gamma(\alpha)T^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)} + K_2K_3\frac{\Gamma(\alpha)T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K_2K_3\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\right]\left\|y_1-y_2\right\|$$

ومن الشرط (7) نستنتج أن المؤثر T هو مؤثر انكماشي على الفضاء $C[0,T]$ و حسب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فان المؤثر T يمتلك نقطة ثابتة وحيدة ولتكن z أي أنه

$z(t)=T(z)(t)$

$$\therefore z(t)=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(\sigma)))-$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

$$\therefore \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(t)=\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(\sigma)))+$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right)$$

بوضع $y(t)=\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(t)$ نستنتج

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

وتكون الدالة $y(t)$ حلا للمعادلة (1) على الفترة $\left(0,T\right]$ مع الشرط (2).

بقي أن نثبت أن الدالة $y(t)$ هي الحل الوحيد للمعادلة (1) مع الشرط (2). لذا نفرض وجود حل آخر $\tilde{y}(t)$ فإن

$$\tilde{y}(t)=\frac{1}{\Gamma\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,\tilde{y}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\tilde{y}(\sigma)))ds+$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\tilde{y}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\tilde{y}(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

بوضع $\tilde{z}(t)=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\tilde{y}(t)$ فإن

$$\tilde{y}(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(t)$$

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(t)=\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(\sigma)))+$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right)$$

$$\therefore \tilde{z}(t)=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\overset{t}{\underset{0}{I}}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(\sigma)))-$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

$$\therefore \tilde{z}(t)=T\left(\tilde{z}\right)(t)$$

مما يعني أن $\tilde{z}$ تمثل نقطة ثابتة للمؤثر T، ولكن النقطة الثابتة للمؤثر وحيدة لذلك $\tilde{z}=z$ وأن

$$\tilde{y}(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{z}(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(t)=y(t)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا وحدانية الحل للمعادلة (1) والشرط (2).

ثالثا: وجود الحل

في هذا البند سنبرهن وجود الحل للمسالة (1)-(2) تحت شروط أخف من الشروط السابقة باستخدام مبرهنة شافير للنقطة الثابتة على فضاء بناخ $C[0,T]$.

مبرهنة:

إذا كانت

1- الدالة $f:[0,T]\times R\times R\to R$ مستمرة.

2- يوجد ثابت $M>0$ بحيث أن

$$|f(t,y,z)|\le M \qquad \dots(8)$$

لكل $t\in[0,T]$ و $y,z\in R$.

فان المعادلة (1) مع الشرط الحدودي (2) تمتلك حلا واحدا على الأقل على الفترة $[0,T)$.

البرهان:

لإثبات وجود الحل للمسألة (1)-(2) على الفترة $(0,T]$ سنستفيد من النقطة الثابتة للمؤثر:

$$T:C[0,T]\to C[0,T]$$

$$T(y)(t)=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\mathop{I}_{0}^{t}{}^{\alpha} f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))+$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_{0}^{T}f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\mathop{I}_{0}^{s}{}^{\beta}\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

سوف نستخدم مبرهنة شافير للنقطة الثابتة لبرهان أن المؤثر $T(y)$ يمتلك نقطة ثابتة وسنجزئ هذا البرهان إلى عدة مراحل:

i. $T(y)$ تطبيق مستمر.

ii. صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع مقيدة في $C([0,T],R)$.

iii. صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع متساوية الاستمرارية في $C([0,T],R)$.

iv. شرط القيود الأولية (A priority bounds).

i. إثبات الجزء الأول من البرهان:

لإثبات أن التطبيق $T(y)$ مستمر لتكن $\{y_n\}$ متتابعة متقاربة في $C([T,0],R)$ ولتكن $y_n\to y$.

فلكل $t\in[0,T]$ يكون

$$\left|T(y_n)(t)-T(y)(t)\right|\le t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Bigg| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))-$$

$$-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\Bigg|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\Bigg| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))$$

$$-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\Bigg|ds$$

وباستخدام المعيار المعرف $\|y\|_{\infty}=\sup\left\{|y(t)|:t\in[0,T]\right\}$

$$\left|T(y_n)(t)-T(y)(t)\right|=t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}\Bigg| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))-$$

$$-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\Bigg|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\sup_{s\in[0,T]}\Bigg| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))$$

$$-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\Bigg|ds$$

$$\le\left\| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\right\|*$$

$$*\left[t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T ds\right]$$

$$\le\left\| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\right\|*$$

$$*\left[\frac{T}{\alpha}+\frac{b}{(a+b)}T\right]$$

وبما أن f دالة مستمرة نحصل على

$$\le\left\| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y_n(\sigma)))-f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\right\|*$$

$$*\left[\frac{T}{\alpha}+\frac{b}{(a+b)}T\right]\longrightarrow 0 \quad ,\text{عندما}\quad n\longrightarrow\infty$$

ii. إثبات الجزء الثاني:

لإثبات أن صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع مقيدة يكفي أن نبرهن أن لكل $\eta>0$ يوجد عدد ثابت موجب مثل τ بحيث أن لكل $y\in B_{\eta}=\{y\in C([0,T],R):\|y\|_{\infty}\le\eta\}$ تكون $\|T(y)\|_{\infty}\le\tau$. لكل $t\in[0,T]$ بواسطة الشرط 2 نحصل على

$$\left|T(y)(t)\right|=t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\,{}_0^tI^{\alpha}\left| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\right|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left| f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),{}_0^sI^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))\right|ds+\frac{c}{(a+b)}$$

ومن الشرط (8) نحصل على

$$|T(y)(t)| \le Mt^{1-\alpha}\, t^{\alpha}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T|b|M}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\therefore \|T(y)\|_{\infty} \le \frac{M\,T}{\alpha} - \frac{T\,|b|M}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|} = \tau$$

iii. إثبات الجزء الثالث:

لإثبات أن صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع متساوية الاستمرارية في $C([0,T],R)$ نفرض $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$ ولتكن B_η مجموعة مقيدة في الفضاء $C([0,T],R)$ وأن $y \in B_\eta$ فان:

$$|T(y)(t_2) - T(y)(t_1)| =$$

$$= \left| t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds + \right.$$

$$\left. - t_1^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds \right|$$

بإضافة وطرح الحد $t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds$

$$|T(y)(t_2) - T(y)(t_1)| =$$

$$= \left| t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds + \right.$$

$$- t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds +$$

$$+ t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds +$$

$$\left. - t_1^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds \right|$$

$$|T(y)(t_2) - T(y)(t_1)| = \left| t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds + \right.$$

$$+ t_2^{1-\alpha} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds +$$

$$- t_2^{1-\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha} y(s), \overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\sigma)))ds +$$

$$+t_2^{1-\alpha}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds+$$

$$\left.-t_1^{1-\alpha}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds\right|$$

$$\leq\left|t_2^{1-\alpha}\left[\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right)f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds\right]+$$

$$\left.+\left(t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s),\overset{s}{\underset{0}{I}}{}^{\beta}\,\Psi(\sigma,\frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\sigma)))ds\right|$$

وحسب الشرط (8)

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)|\leq Mt_2^{1-\alpha}\left[\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\right]+$$

$$+M\left(t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}ds$$

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)|\leq\frac{Mt_2^{1-\alpha}}{\alpha}\left[\left(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\right)-(t_2-t_1)^{\alpha}+(t_2-t_1)^{\alpha}\right]$$

$$+\frac{M\Gamma(\alpha)\left(t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)t_1^{\alpha}}{\alpha}$$

$$=\frac{M}{\alpha}\left[t_2^{1-\alpha}\left(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\right)+\left(t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)t_1^{\alpha}\right]$$

وعندما $t_1\to t_2$ فإن الطرف الأيمن من المتباينة أعلاه يقترب من الصفر من غير أن يعتمد على اختيار الدالة y مما يعني أن المجموعة B_η متساوية الاستمرارية.

الآن من النتائج التي حصلنا عليها من i. وii. وiii. نستنتج حسب مبرهنة Arzela-Ascoli أن $T:C([0,T],R)\to C([0,T],R)$ تطبيق كامل الاستمرارية (completely continuous).

iv. إثبات الجزء الرابع:

لإثبات شرط القيود الأولية يجب أن نثبت أن المجموعة

$$\rho=\{y\in C([0,T],R):y=\lambda T(y),\quad for\ some\ \ 0<\lambda<1\}$$

مقيدة.

لكل $y\in\rho$ يوجد $0<\lambda<1$ بحيث $y=\lambda T(y)$

الآن لكل $t\in[0,T]$ نحصل على

$$|y(t)|=\lambda|T(y)(t)|$$

ومن برهان ii. نستنتج

$$\|y\|_\infty = \lambda\|T(y)\|_\infty \le \lambda\left(\frac{M\,T}{\alpha} - \frac{T\,|b|M}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}\right)$$
$$\le \frac{M\,T}{\alpha} - \frac{T\,|b|M}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|} = \tau$$

و هذا يبين لنا أن المجموعة ρ مقيدة.

الآن وحسب مبرهنة شافير للنقطة الثابتة.نستنتج أن المؤثر T يمتلك نقطة ثابتة ولتكن z أي أن

$$z = T(z)$$

$$\therefore z(t) = t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\,{}_0^t I^\alpha f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(\sigma))) -$$
$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(t) = {}_0^t I^\alpha f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(\sigma))) +$$
$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s, \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, \frac{\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right)$$

بوضع $y(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(t)$ نستنتج

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, y(\sigma)))ds +$$
$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s, y(s), {}_0^s I^\beta\, \Psi(\sigma, y(\sigma)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]$$

وتكون الدالة $y(t)$ حلا للمعادلة (1) على الفترة $\left(0,T\right]$ مع الشرط (2).

المصادر

[1] AL-Abedeen, A.Z.and Arora, H.L :A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equation of generalized order, Canada. Math. Ball. 21(1978),276-271.

[2] Bssam,M.A :Some properties of Holmgren-Riesz transform, Ann. Scuola, Norm. Sup. Pisa. 15(1961), 1-24.

[3] Gorenflo Rudolf, Mainardi Francesco: Essentials Of Fractional Calculus. MaPhySto Cinter, preliminary version (2000).

[4] Mouffak B, Boualem A. S. Existence And Uniqueness Of Solutions To Impulsive Fractional Differential Equations. Issn: 1072-6691, Electronic Journal Of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 10, pp. 1–11.

[5] Sotiris K.N Mouffak B, Samira H.. Boundary Value Problem For Differential Equation With Fractinal Order, Volume 3(2008) ISSN 1842-6298(Electronic), 1843-7265 (Print).