The Minimal Blocking Set Of Size 22 In PG (2 , 13)

Farah H.Kadoo
Farahalkadoo@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on : 06/09/2009 **Accepted on: 11/04/2010**

ABSTRACT

A blocking set B in projective plane PG (2, q) in a set of points such that every line in the plane intersect B in at least one point and there exist a line intersect B in only one point, we say that B is minimal if B has no minimal blocking subset. In this project we proved the non-existence of minimal blocking set of size 22 contains 8-secant and not contains 9-secant in PG (2, 13). Also we have proved the existence of minimal blocking set of the size 22 of redei-type. Also we give some properties of such blocking set.

Keyword : Blocking Sets - (k , n) – arcs , fundamental theorem of projective geometry

المجاميع القالبية الأصغرية ذات حجم 22 في المستوي PG (2, 13)

فرح حازم قدو
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2009/9/6 **تاريخ قبول البحث: 2010/4/11**

الملخص

المجموعة القالبية B في المستوي الاسقاطي PG (2, q) هي مجموعة نقاط بحيث أن كل خط في المستوى يقطع B بما لا يقل عن نقطة واحدة ويوجد خط يقطع B بنقطة واحدة فقط، نقول أن B أصغريه إذا لم تحتوي بداخلها على أي مجموعة أصغريه، في هذا البحث تم إثبات عدم وجود مجاميع قالبيه أصغريه في المستوي PG (2, 13) من الحجم (22) تمتلك قاطعاً ثمانياً ولا تمتلك قاطعاً تساعياً، كذلك أثبتنا وجود مجموعة قالبيه أصغريه من نوع – ريدي ذات حجم 22 في المستوي PG (2, 13) وأعطينا بعض خواص المجموعات القالبية الأصغرية ذات حجم 22 في المستوى المذكور.

الكلمات المفتاحية : المجاميع القالبية , الاقواس – (k , n) , المبرهنة الاساسية في الهندسة الاسقاطية .

1- المقدمة

يقال للمجموعة B القالبية – t إنها أصغرية أو غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية تتشكل منها مجموعة قالبية – t ، وبصورة خاصة عندما t = 1 فأن B تسمى مجموعة قالبية. Richardson [5] هو أول من بحث في المستويات ذات الرتب الكبيرة، كما أنه أثبت أن أصغر حجم للمجموعة القالبية في المستوي(PG (2, 3 هو (6). وبعد (13) سنة قدم الباحث Dipaola [2] فكرة عن المثلث الاسقاطي الذي يعد مثالاً للمجموعة القالبية ذات الحجم 2 / (q + 1) 3 في المستويات الديزاركية ذات الرتب الفردية.

2- المجاميع القالبية في المستوي الاسقاطي PG (2, 13)

(2-1) الإسقاط الدوار على GF (13):

لتكن $F(x) = X^3 - X^2 - 2$ متعددة حدود على الحقل GF (13) فأن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

هي إسقاط دوار على المستوي (2,13) PG، المستوي الاسقاطي (2,13) PG يحتوي على (183) نقطة و(183) خطاً وكل خط يحوي (14) نقطة، وكل نقطة يمر بها (14) خطاً. كما مبين في الجدول (1) و(2).

لتكن $P1 = (1, 0, 0)$ هي النقطة الابتدائية فأن باقي نقاط المستوي يمكن إيجادها بمدار واحد باستخدام العلاقة الآتية:

$$p_i = p_{i-1}\ T\ ,\forall\ i = 2 ,\dots\dots\dots ,q^2 + q + 1$$

(2-2) مبرهنة: [3]

في المستوي الإسقاطي $PG\ (2,q)$, $q \geq 4$ توجد مجموعة قالبية ذات الحجم b حيث أن:

$$2q - 1 \leq b \leq 3q - 3$$

ملاحظة: لتكن B مجموعة قالبية ذات حجم K ولتكن n قاطع لـ B حيث $n = 1,2,3,\dots\dots\dots\dots,q$. فإذا كانت $n = q + 1$ فان B تسمى تافهة.

(2-3) مبرهنة:

لتكن B مجموعة قالبية أصغريه ذات الحجم 22 في الفضاء الاسقاطي $PG\ (2,13)$ وليكن L قاطعاً لـ B بـ n من النقاط فأن:

$$1 \leq n \leq 9$$

البرهان:

ليكن L هو قاطع لـ B ولتكن $P = (x, y, z)$ نقطة في الفضاء الاسقاطي $PG\ (2,q)$ ، $P \in L \backslash B$.

ليكن L هو قاطع لـ B بعشرة نقاط وبما أنه يوجد من النقطة P ثلاثة عشر خطاً يقطع B بنقطة واحدة على الأقل فأنه بتوزيع نقاط B على الخطوط الثلاثة عشر سيظهر خط خارجي وهذا تناقض.

(2-4) مبرهنة:

يوجد على الأكثر ثلاثة عشر قاطعاً أحادياً يمر خلال نقطة لا تنتمي إلى B

البرهان:

نفرض أنه يوجد أربعة عشر قاطعاً أحدياً فأنه

$$|B| = 14 \times 1 = 14$$

وهذا تناقض لحجم B.

(2-5) مبرهنة (كاكس) : [4]

في المستوي الإسقاطي $PG\ (2,q)$، لتكن B مجموعة قالبية أصغريه ذات حجم $q + K$. إذا وجد L يقطع B في K – 1 من النقاط بالضبط، فأنه توجد نقطة Q لا تنتمي إلى B حيث أن كل خط يصل النقطة Q بنقطة من L\B يحتوي بالضبط على نقطتين من B وأن $K \geq (q + 3)/\ 2$

(2-6) مبرهنة:

لا توجد مجموعة قالبية أصغريه ذات حجم 22 في المستوي الاسقاطي $PG\ (2,13)$ تمتلك قاطعاً ثمانياً ولا تمتلك قاطعاً تساعياً.

البرهان:

لتكن P = (x, y, z) نقطة في المستوى الاسقاطي $PG\ (2,q)$ وليكن L1 قاطعاً ثمانياً. نفترض أن L1 هو خط اللانهاية (L1 : Z = 0) وليكن $L_1 / B\ = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ وبحسب مبرهنة كاكس توجد نقطة Q لا تنتمي إلى B. بحيث أن QAi ، $i = 1,\ldots\ldots\ldots,6$ هي قواطع ثنائية. وهذه الخطوط تحتوي على 12 نقطة من B ، ولتكن U1 هي النقطة الثالثة عشر وبما أن النقاط A_i تقع على قاطع ثنائي واحد وأثني عشر قواطع أحادية، فان الخطوط $U_1\ A_i$ و $i = 1\ ,\ldots\ ,6$ هي قواطع أحادية.أما الخط U_1Q فهو الخط الذي يمر خلال نقطة من نقاط $B \cap L_1$.

وباستخدام التحويليين الخطيين:

$$T_1 : (x, y, z) \rightarrow (y + z, x + 12\ z, O)$$
$$T_2 : (x,y,z) \rightarrow (12\ y + z, x + y, O)$$

فان تأثير الزمرة الخطية $S_3\ =\ \langle T_1\ , T_2 \rangle$ على خط اللانهاية يؤدي إلى ثلاثة مدارات:

المدار الأول: {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0)}

المدار الثاني: {(1, 5, 0), (1, 8, 0), (1, 4, 0), (1, 2, 0), (1, 7, 0), (1, 10, 0)}

المدار الثالث: {(1, 9, 0), (1, 3, 0)}

لتكن النقاط A1 = (1, 0, 0) ، A2 = (0, 1, 0) ، A3 = (1, 12, 0) ، A4 = (1, 5, 0) ، A5 = (1, 9, 0) A6 = (1, 11, 0). أما نقطة المصدر الثالثة فستكون Q = (0, 0, 1) ، ونقطة المصدر الرابعة ستكون U1 = (1, 1, 1).

ليكن $AG\ (2,13) = PG\ (2,13)/\ L_1$ هو المستوي الأفيني. نفترض أن $B_1 = B \setminus (L_1 U\ \{U_1, U_2\})$ والتي تحتوي على نقاط أفينية $P_i = (x, y)$ حيث $i = 0,\ldots\ ,12$.

(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10), (0, 11), (0, 12)
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12)
(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (2, 12)
(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3 10), (3, 11), (3, 12)
(4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (4, 11), (4, 12)
(5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (5, 11), (5, 12)
(6, 0), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (6, 11), (6, 12)

(7, 0), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (7, 11), (7, 12)
(8, 0), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (8, 10), (8, 11), (8, 12)
(9, 0), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7), (9, 8), (9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12)
(10. 0), (10, 1), (10, 2), (10, 3), (10, 4), (10, 5), (10, 6), (10, 7), (10, 8), (10, 9), (10, 10), (10, 11), (10, 12)
(11, 0), (11, 1), (11, 2), (11, 3), (11, 4), (11, 5), (11, 6), (11, 7), (11, 8), (11, 9), (11, 10), (11, 12)
(12, 0), (12, 1), (12, 2), (12, 3), (12, 4), (12, 5), (12, 6), (12, 7), (12, 8), (12, 9), (12, 10), (12, 11), (12, 12)

باختيار الاحتمال {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0), (1, 5, 0), (1, 9, 0), (1, 11, 0)} فانه سيعطينا واحداً وعشرين احتمالاً وهي:

الحالة الأولى:

باختيار النقطتين (0 ,5) ، (0 ,10) فان النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(10,6),(0,10),(7,9),(10, 3)}.

أما النقطة (0 ,10) فستحذف النقاط:
{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}.
ليبقى لدينا نقطة واحدة (5 ,8) وهذا تناقض.

الحالة الثانية:

باختيار النقطتين (0 ,5)، (0 ,9)، فأن النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(0,16),(0,10),(7,9), (10, 3)}.

أما النقطة (0 ,9) فستحذف النقاط:
{(4, 10), (10, 11), (4, 7), (5, 3), (0, 10), (0, 7), (4, 5), (10, 12)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة (7 ,3) وهذا تناقض.

الحالة الثالثة:

باختيار النقطتين (0 ,5)، (0 ,4)، فان النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(0,16),(0,10),(7,9),(10, 3)}.

أما النقطة (0 ,4) فستحذف النقاط:
{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)}.

لنحصل على الاحتمال الوحيد وهو لا يشكل مجموعة قالبية:
{(5,0),(4,0),(0,12),(0,11),(7,6),(9,4),(12,8),(10,11),(6,2), (11, 8), (3, 7), (2, 9)}.

الحالة الرابعة:

باختيار النقطتين (0 ,5)، (0 ,12)، فان النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3, 2) ،(7, 11) ،(2, 11) ،(10, 12) ،(11, 2) ،(0, 7) ،(10, 6) ،(0, 10) ،(7, 9) ،(10, 3)}

أما النقطة (0 ,12) فستحذف النقاط:
{(9,3), (0, 12), (10, 3), (11, 8), (3, 7), (11, 2), (0, 11)}.

لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة الخامسة:

باختيار النقطتين (0 ,5)، (0 ,7)، فان النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(10,6),(0,10),(7,9), (10, 3}

أما النقطة (0 ,7) فستحذف النقاط:
{(2, 5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)}

ليبقى لدينا نقطة واحدة (8 ,11) وهذا تناقض.

الحالة السادسة:

باختيار النقطتين (0 ,5)، (0 ,3)، فان النقطة (0 ,5) ستحذف النقاط:
{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(10,6),(0,10),(7,9), (10, 3)}.

أما النقطة (0 ,3) فستحذف النقاط:
{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)}

لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة السابعة:

باختيار النقطتين (0 ,10)، (0 ,9)، فأن النقطة (0 ,10) ستحذف النقاط:
{(0, 10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}.

أما النقطة (0 ,9) ستحذف النقاط:
{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)}.

لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة الثامنة:

باختيار النقطتين (0 ,10)، (0 ,4)، فان النقطة (0 ,10) ستحذف النقاط:
{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}.

أما النقطة (0 ,4) فستحذف النقاط:
{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)}.

ليبقى لدينا نقطة واحدة (2 ,6) وهذا تناقض.

الحالة التاسعة:

باختيار النقطتين (0 ,10)، (0 ,12)، فان النقطة (0 ,10) ستحذف النقاط:
{(0, 10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}

أما النقطة (0 ,12) فستحذف النقاط:
{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)}.

لا يحتوي على أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة العاشرة:

باختيار النقطتين (0 ,10)، (0 ,7)، النقطة (0 ,10) فستحذف النقاط:
{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}.

أما النقطة (7,0) فستحذف النقاط :

{(2,5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)}.

فسيحتوي على عنصر واحد وهذا تناقض.

الحالة الحادي عشر:

باختيار النقطتين (0 ,10)، (0 ,3)، فان النقطة (0 ,10) ستحذف النقاط:
{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)}.

أما النقطة (0 ,3) فستحذف النقاط:
{(0,6),(10,12),(12,8),(10,11),(4,9),(0,12),(9,4),(4,5),(0,11),(6,2),(10,6),(7,9)}
فسيحتوي على عنصر واحد وهذا تناقض.

الحالة الثانية عشر:

باختيار النقطتين (0 ,9)، (0 ,4)، فان النقطة (0 ,4) ستحذف النقاط:
{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)}.

أما النقطة (0 ,4) فستحذف النقاط:

{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)}.

فستحتوي على نقطة واحدة وهي (7 ,3) وهذا تناقض.

الحالة الثالثة عشر:

باختيار النقطتين (0 ,9)، (0 ,12)، فان النقطة (0 ,9) ستحذف النقاط:
{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)}

أما النقطة (0 ,12) فستحذف النقاط:

{(9, 3), (0, 12), (10, 3), (11, 8), (3, 7), (11, 2), (0, 11)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (2 ,6) وهذا تناقض.

الحالة الرابعة عشر:

باختيار النقطتين (0 ,9)، (0 ,7)، فان النقطة (0 ,9) ستحذف النقاط:
{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)}.

أما النقطة (7,0) فستحذف النقاط :

{(2, 5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)}.

فيوجد نقطة واحدة وهذا (8 ,11) وهذا تناقض.

الحالة الخامسة عشر:

باختيار النقطتين (0 ,9)، (0 ,3)، فان النقطة (0 ,9) ستحذف النقاط:
{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (7, 11) وهذا تناقض.

الحالة السادسة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (12, 0)، فان النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (12, 0) فستحذف النقاط:

{(9,3),(0,12),(10,3),(11,8),(3,7),(11,2),(0,11),(2,11),(10,3), (7, 9), (11, 3)}

فيوجد نقطة واحدة وهي (6, 2) وهذا تناقض.

الحالة السابعة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (7, 0)، فان النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (7, 0) فتحذف النقاط:

{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (11, 3) وهذا تناقض.

الحالة الثامنة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (3, 0)، فان النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11),(12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (11, 3) وهذا تناقض.

الحالة التاسعة عشر:

باختيار النقطتين (12, 0)، (7, 0)، فان النقطة (12, 0) ستحذف النقاط:

{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)}.

أما النقطة (7, 0) فستحذف النقاط:

{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (10, 12) وهذا تناقض.

الحالة العشرون:

باختيار النقطتين (12, 0)، (3, 0)، فان النقطة (12, 0) ستحذف النقاط:

{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (10, 12) وهذا تناقض.

الحالة الحادية والعشرون:

باختيار النقطتين (7, 0)، (3, 0)، فان النقطة (7, 0) ستحذف النقاط:
{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:
{(7,9), (10,6), (6, 2), (0, 11), (4, 5), (9,4), (0,12), (4,9), (10,11), (12,8), (10,12), (0,6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (12, 2) وهذا تناقض.

(2-7) تعريف : [3]

إذا كانت B مجموعة قالبية في الفضاء الاسقاطي PG(2,q) فان B تسمى من النوع – ريدي إذا وجد خط في الفضاء الإسقاطي يحوي على K من النقاط B بحيث أن $|B| = q + k$.

3– البحث عن مجموعة قالبية أصغرية من نوع – ريدي ذات الحجم 22 في المستوي الإسقاطي PG (2, 13)

لتكن P = (x, y, z) نقطة في المستوي الاسقاطي، وليكن L خط اللانهاية والذي هو خط ريدي ولتكن B1 = B \ L وهي مجموعة نقاط أفينية $P_i = (x_i, y_i)$ ، $i = 1, \dots, 13$، ولتكن Q_i لكل $i = 1, \dots, 5$ نقاط واقعة على L\B حيث إن Q1=(1,0,0)، Q2 = (0, 1, 0) ، Q3 = (1, 12, 0) ، Q4 = (1, 5, 0) ، Q5 = (1, 9, 0) تم الحصول عليها من تأثير الزمرة $S_3 \cong < T_1, T_2 >$ حيث أن:

$T_1 : (x, y, z) \rightarrow (y + z, x + 12z, 0)$

$T_2 : (x, y, z) \rightarrow (12y + z, x + y, 0)$

والذي يقسم نقاط خط اللانهاية إلى ثلاثة مدارات:

المدار الأول: {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0)}.

المدار الثاني: {(1, 5, 0), (1, 8, 0), (1, 4, 0), (1, 2, 0), (1, 7, 0), (1, 10, 0)}.

المدار الثالث: {(1, 9, 0), (1, 3, 0)}.

وبتثبيت المدار الأول {Q1, Q2, Q3} مع نقطة من المدار الثاني والثالث خارج B فإننا نحصل على شروط اختيار $i = 1, \dots, 13$ وهي:

$$x_i \neq x_j$$
$$y_i \neq y_j$$
$$x_i + y_i \neq x_j + y_j$$
$$y_i - 5x_i \neq y_j - 5x_j$$
$$y_i - 9x_i \neq y_j - 9x_j$$

وبهذا سنحصل على النقاط الآتية:

{(0, 0), (1, 2), (2, 6), (3, 3), (4, 1), (5, 5), (6, 9), (7, 7), (8, 4), (9, 8), (10,10), (11,11), (12, 12)}.

وتحويلها إلى نقاط إسقاطية كما في الجدول (1):

{(0, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 7), (1, 1, 9), (1, 10, 10), (1, 1, 8), (1, 8, 11), (1, 1, 2), (1, 7, 5), (1, 11, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 6), (1, 1, 12)}.

وإضافتها إلى نقاط $L \cap B$ والتي:

{(1, 11, 0),(1, 10, 0),(1, 4, 0),(1, 1, 0),(1, 8, 0),(1, 3, 0),(1, 2, 0), (1, 6, 0), (1, 7, 0)}.

سنحصل على مجموعة قالبية ذات حجم 22 من نوع – ريدي.

(3-1) مبرهنة:

توجد مجموعة قالبية أصغريه من النوع – ريدي ذات الحجم 22 في PG (2, 13) .

وفيما يأتي بعض خواص المجاميع القالبية الأصغرية ذات الحجم 22 من النوع – ريدي في الفضاء الإسقاطي .PG(2,13)

1. لتكن B مجموعة قالبية ذات الحجم 22 وتمتلك قاطعاً تساعياً L فأنهً:

أ / يوجد على الأكثر قاطعين ثمانيين يمران خلال P، $P \in L \cap B$.

ب / لا يوجد قاطع ثماني خلال $P \in L \setminus B$.

2. لتكن B مجموعة قالبية ذات حجم 22 وتمتلك قاطعاً تساعياً L ، فأنه يوجد على الأكثر ثلاث قواطع سباعية لـ P ، $P \in L \cap B$.

3. ليكن L قاطعاً تساعياً لـB، فانه يوجد لكل نقطة P ، $P \in L \cap B$ قاطعان سداسيان على الأكثر.

4. ليكن L قاطعاً تساعياً لـB ، فأنه يوجد لكل نقطة $P \in L \cap B$ في B ثلاث قواطع خماسية على الأكثر.

5. لكل نقطة P ، $P \in B$ يمر خلالها على الأكثر قاطعين تساعيين.

6. لأي قاطعين تساعيين لـB، فأن نقطة تقاطعهما تكون داخل B.

7. لأي قاطعين سباعيين لـB، فأن نقطة تقاطعهما تكون في B.

البرهان:

1. نفرض وجود ثلاث قواطع ثمانية في $P \in L \bigcap B$ فان: $|B| \geq 1+6+3*7=28$ وهذا تناقض.

2. نفرض وجود أربعة قواطع سباعية فان: $|B| \geq 4*6+1=25$ وهذا تناقض.

3. نفرض وجود ثلاث قواطع سداسية $P \in L \bigcap B$ فان: $|B| \geq 3*5+8+1=24$ وهذا تناقض.

4. نفرض وجود أربعة قواطع خماسية في $P \in L \bigcap B$ فان: $|B| \geq 1+4*4+8=25$ وهذا تناقض.

5. نفرض وجود ثلاث قواطع تساعية من نقطة $P \in B$ فان: $|B| \geq 1+3*8=25$ وهذا تناقض.

6. نفرض L_2, L_1 قاطعان تساعيان يلتقيان $P \notin L \bigcap B$ فان: $|B| \geq 2*9+12*1=30$ وهذا تناقض.

7. نفرض L_2, L_1 قاطعان سباعيان يلتقيان في $P \notin B$ فان: $|B| \geq 2*7+12*1=26$ وهذا تناقض.

الجدول (1)

i	P_i	i	P_i	i	P_i	i	P_i	i	P_i
1	(1, 0, 0)	40	(1, 0, 12)	79	(1, 5, 4)	118	(1, 4, 8)	157	(1, 9, 7)
2	(0, 1, 0)	41	(1, 6, 7)	80	(1, 5, 6)	119	(1, 9, 4)	158	(1, 1, 3)
3	(0, 0, 1)	42	(1, 1, 0)	81	(1, 12, 2)	120	(1, 5, 0)	159	(1, 11, 5)
4	(1, 0, 7)	43	(0, 1, 1)	82	(1, 10, 10)	121	(0, 1, 5)	160	(1, 4, 12)
5	(1, 1, 7)	44	(1, 0, 1)	83	(1, 2, 1)	122	(1, 0, 11)	161	(1, 6, 5)
6	(1, 1, 8)	45	(1, 7, 7)	84	(1, 7, 8)	123	(1, 3, 7)	162	(1, 4, 5)
7	(1, 9, 3)	46	(1, 1, 1)	85	(1, 9, 5)	124	(1, 1, 10)	163	(1, 4, 10)
8	(1, 11, 2)	47	(1, 7, 1)	86	(1, 4, 4)	125	(1, 2, 9)	164	(1, 2, 2)
9	(1, 10, 0)	48	(1, 7, 4)	87	(1, 5, 1)	126	(1, 8, 10)	165	(1, 10, 1)
10	(0, 1, 10)	49	(1, 5, 3)	88	(1, 7, 3)	127	(1, 2, 10)	166	(1, 7, 12)
11	(1, 0, 9)	50	(1, 11, 10)	89	(1, 11, 6)	128	(1, 2, 11)	167	(1, 6, 10)
12	(1, 8, 7)	51	(1, 2, 3)	90	(1, 12, 9)	129	(1, 3, 0)	168	(1, 2, 6)
13	(1, 1, 2)	52	(1, 11, 3)	91	(1, 8, 12)	130	(0, 1, 3)	169	(1, 12, 5)
14	(1, 10, 4)	53	(1, 11, 11)	92	(1, 6, 3)	131	(1, 0, 5)	170	(1, 4, 3)
15	(1, 5, 5)	54	(1, 3, 1)	93	(1, 11, 8)	132	(1, 4, 7)	171	(1, 11, 12)
16	(1, 4, 1)	55	(1, 7, 2)	94	(1, 9, 2)	133	(1, 1, 11)	172	(1, 6, 8)
17	(1, 7, 9)	56	(1, 10, 12)	95	(1, 10, 6)	134	(1, 3, 10)	173	(1, 9, 9)
18	(1, 8, 11)	57	(1, 6, 2)	96	(1, 12, 10)	135	(1, 2, 0)	174	(1, 8, 1)
19	(1, 3, 5)	58	(1, 10, 2)	97	(1, 2, 5)	136	(0, 1, 2)	175	(1, 7, 11)
20	(1, 4, 6)	59	(1, 10, 3)	98	(1, 4, 2)	137	(1, 0, 4)	176	(1, 3, 2)
21	(1, 12, 3)	60	(1, 11, 0)	99	(1, 10, 8)	138	(1, 5, 7)	177	(1, 10, 11)
22	(1, 11, 9)	61	(0, 1, 11)	100	(1, 9, 6)	139	(1, 1, 12)	178	(1, 3, 11)
23	(1, 8, 4)	62	(1, 0, 11)	101	(1, 12, 11)	140	(1, 6, 0)	179	(1, 3, 3)
24	(1, 5, 8)	63	(1, 2, 7)	102	(1, 3, 4)	141	(0, 1, 6)	180	(1, 11, 1)
25	(1, 9, 0)	64	(1, 1, 9)	103	(1, 5, 9)	142	(1, 0, 6)	181	(1, 7, 6)
26	(0, 1, 9)	65	(1, 8, 2)	104	(1, 8, 8)	143	(1, 12, 7)	182	(1, 12, 0)
27	(1, 0, 2)	66	(1, 10, 9)	105	(1, 9, 1)	144	(1, 1, 6)	183	(0, 1, 12)
28	(1, 10, 7)	67	(1, 8, 9)	106	(1, 7, 5)	145	(1, 12, 6)		
29	(1, 1, 4)	68	(1, 8, 6)	107	(1, 4, 9)	146	(1, 12, 8)		
30	(1, 5, 12)	69	(1, 12, 12)	108	(1, 8, 0)	147	(1, 9, 11)		
31	(1, 6, 11)	70	(1, 6, 1)	109	(0, 1, 8)	148	(1, 3, 8)		
32	(1, 3, 12)	71	(1, 7, 10)	110	(1, 0, 3)	149	(1, 9, 8)		
33	(1, 6, 12)	72	(1, 2, 8)	111	(1, 11, 7)	150	(1, 9, 10)		
34	(1, 6, 4)	73	(1, 9, 12)	112	(1, 1, 5)	151	(1, 2, 12)		
35	(1, 5, 11)	74	(1, 6, 9)	113	(1, 4, 11)	152	(1, 6, 6)		
36	(1, 3, 9)	75	(1, 8, 3)	114	(1, 3, 6)	153	(1, 12, 1)		
37	(1, 8, 5)	76	(1, 11, 4)	115	(1, 12, 4)	154	(1, 7, 0)		
38	(1, 4, 0)	77	(1, 5, 10)	116	(1, 5, 2)	155	(0, 1, 7)		
39	(0, 1, 4)	78	(1, 2, 4)	117	(1, 10, 5)	156	(1, 0, 8)		

الجدول (2)

L1	1	2	9	25	38	42	60	108	120	129	135	140	154	182
L2	2	3	10	26	39	43	61	109	121	130	136	141	155	183
L3	3	4	11	27	40	44	62	110	122	131	137	142	156	1
L4	4	5	12	28	41	45	63	111	123	132	138	143	157	2
L5	5	6	13	29	42	46	64	112	124	133	139	144	158	3
L6	6	7	14	30	43	47	65	113	125	134	140	145	159	4
L7	7	8	15	31	44	48	66	114	126	135	141	146	160	5
L8	8	9	16	32	45	49	67	115	127	136	142	147	161	6
L9	9	10	17	33	46	50	68	116	128	137	143	148	162	7
L10	10	11	18	34	47	51	69	117	129	138	144	149	163	8
L11	11	12	19	35	48	52	70	118	130	139	145	150	164	9
L12	12	13	20	36	49	53	71	119	131	140	146	151	165	10
L13	13	14	21	37	50	54	72	120	132	141	147	152	166	11
L14	14	15	22	38	51	55	73	121	133	142	148	153	167	12
L15	15	16	23	39	52	56	74	122	134	143	149	154	168	13
L16	16	17	24	40	53	57	75	123	135	144	150	155	169	14
L17	17	18	25	41	54	58	76	124	136	145	151	156	170	15
L18	18	19	26	42	55	59	77	125	137	146	152	157	171	16
L19	19	20	27	43	56	60	78	126	138	147	153	158	172	17
L20	20	21	28	44	57	61	79	127	139	148	154	159	173	18
…														
…														
…														
L183	183	1	8	24	37	41	59	107	119	128	134	139	153	4

المصادر

[1] Bruen, A. A. (1986), Arcs and multiple blocking set, combinatorica, symposia, Mathematica 28, Academic. Press, 15-29.

[2] Dipaola, J. (1969), On minimum blocking coalitions in small projective plane games, SIAMJ. Appl. Math., 17, 378-392.

[3] Hirschfeld, J. W. P. (1979), "Projective Geometries over Finite Fields", Oxford University Press, Oxford.

[4] Innamorate, S. and Storme, L. (2004), Minimal blocking sets in PG (2, 8) and maximal partial spreads in PG (3, 8) , Designs, Codes and Cryptography, 13, 15-26.

[5] Richardson, M. (1956), On finite projective games , Proc. Amer. Math, Soc., 7, 458-465.

[6] Younis, S. A., (2009) "The Packing Problem Projective Plane PG (2, 29) and Minimal blocking sets in PG (2, 11)" , M. Sc. Thesis, Mosul.