Wiener Polynomials of the Width Distance for Compound Graphs of $G_1 \boxtimes G_2$

Ali A. Ali **Asma S. Aziz**

College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 29/10/2008 **Accepted on: 23/11/2008**

ABSTRACT

For a connected vertex disjoint graphs G_1 and G_2 , we define $G_1 \boxtimes G_2$ as the graph obtained from the union of G_1 and G_2 with four edges joining the vertices of an edge of G_1 to the vertices of an edge of G_2 .In this paper we obtain Wiener polynomials of the width distance-2 for $K_s \boxtimes K_t$, $K_s \boxtimes C_t$ and $C_s \boxtimes C_t$ .The Wiener index of each such composite graph is also obtained.

Keywords: Wiener Polynomials, width distance, compound graphs

متعددات حدود وينر للمسافة العرضية

لبيانات مركبة بالصيغة $G_1 \boxtimes G_2$

علي عزيز علي **أسماء صلاح عزيز**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 28/10/٢٠٠٨ **تاريخ قبول البحث: 23 /2008/11**

الملخص

إذا كان G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين عن بعضهما فان $G_1 \boxtimes G_2$ هو بيان مكون من اتحاد G_1 و G_2 مع أربع حافات تصل رأسي حافة في G_1 مع رأسي حافة في G_2. تضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $G_1 \boxtimes G_2$ عندما يكون البيانان G_1 و G_2 تامين أو دارتين أو احدهما دارة والأخر بيان تام . كما تضمن إيجاد دليل وينر نسبة للمسافة العرضية-2 لهذه البيانات .

الكلمات المفتاحية: متعددة حدود وينر، المسافة العرضية ، دليل وينر.

1. المقدمة

للتعرف على بعض مفاهيم نظرية البيان التي وردت في هذا البحث نشير الى المصدرين [3,4] وللتعرف على مفهوم متعددة حدود وينر ودليل وينر نشير إلى المصدرين[5,6] وأخيرا للاطلاع على موضوع المسافة العرضية ومتعددة حدود وينر لهذه المسافة نشير إلى المصادر [1,2, 7] .

تعرف متعددة حدود وينر w– نسبة الى دالة المسافة العرضية d_w لبيان $G=(V,E)$ بالصيغة :

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V} x^{d_w(u,v)} \qquad \text{.....(1.1)}$$

وإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي المسافة العرضية -w بينها تساوي k، فإن

$$W_w(G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(G,k)\,x^k \qquad \text{.....(1.2)}$$

حيث أن δ_w هو قطر G نسبة للمسافة العرضية -w .لاحظ انه عندما يكون $w \geq 2$ فان المسافة العرضية -w لا تقل عن 2 .

واضح انه يمكن أن نحصل على دليل وينر نسبة للمسافة العرضية -w , والذي نرمز له $W_w(G)$ من الصيغة الآتية [2]:

$$W_w(G)=\frac{d}{dx}W_w(G;x)\Big|_{x=1}=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} k\,C_w(G,k) \qquad \text{.....(1.3)}$$

تعريف: ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين عن بعضهما بالنسبة للرؤوس. وليكن $u_1v_1 \in E(G_1)$ و $u_2v_2 \in E(G_2)$ فان **البيان المركب** $G_1 \boxtimes G_2$ هو البيان المكون من إتحاد G_1 و G_2 مع الحافات $u_1v_2, u_1u_2, v_1v_2, v_1u_2$.

من الواضح أن عامل الاتصال [4] للبيان $G_1 \boxtimes G_2$ لا يزيد على 2. وإذا كان عامل الاتصال لكل من G_1 و G_2 لا يقل عن 2 فان عامل الاتصال لـ $G_1 \boxtimes G_2$ هو 2.

سوف نجد متعددة حدود وينر بالمسافة العرضية -2 لكل من البيانات المركبة $K_s \boxtimes K_t$, $C_r \boxtimes K_t$, $C_s \boxtimes C_t$ ونحسب دليل وينر للمسافة العرضية -2 لكل من هذه البيانات المركبة .

2. البيان المركب $K_s \boxtimes K_t$:

واضح أن رتبة $K_s \boxtimes K_t$ هي s+t وان حجمه $(s^2+t^2-s-t+8)/2$ وان عامل الاتصال هو2. نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 .

عبارة 2.1: ليكن $t,s \geq 2$ فان متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $K_s \boxtimes K_t$ هي:

$$W_2(K_s \boxtimes K_t;x)=\frac{1}{2}[(s-1)(s+4)+(t-1)(t+4)]x^2+(s-2)(t-2)x^3$$

البرهان: ليكن $u_1v_1 \in E(K_s)$ و $u_2v_2 \in E(K_t)$ وأن

$$E(K_s \boxtimes K_t)=E(K_s)\cup E(K_t)\cup\{u_1u_2, v_1v_2, u_1v_2, u_2v_1\}$$

ليكن $u,v \in V(K_s \boxtimes K_t)$، فان:

$$d_2(u,v)=2 \quad , \quad \forall\, u,v \in V(K_s) \qquad \text{.....(2.1)}$$

كذلك

$$d_2(u,v)=2 \quad , \quad \forall\, u,v \in V(K_t) \qquad \text{.....(2.2)}$$

عدد أزواج الرؤوس للعلاقتين (2.1) و(2.2) هو $(s^2+t^2-s-t)/2$.

إذا كان $u \in V(K_s)-\{u_1,v_1\}$ و $v \in V(K_t)-\{u_2,v_2\}$ فانه توجد حاوية صغرى $C(u,v)$ مكونة من الدربين (u,v_1,v_2,v) و (u,u_1,u_2,v)، وعليه يكون

$$d_2(u,v)=3 \qquad \text{.....(2.3)}$$

وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $(t-2)(s-2)$.

كما نلاحظ أن

$$d_2(u_1,v)=d_2(v_1,v)=2 \quad , \quad \forall v \in V(K_t) \qquad .....(2.4)$$

وبالمثل فان

$$d_2(u_2,v)=d_2(v_2,v)=2 \quad , \quad \forall v \in V(K_s)-\{u_1,v_1\} \qquad .....(2.5)$$

وأن عدد أزواج الرؤوس التي تحقق العلاقة (2.4) هو $2t$ والتي تحقق (2.5) يساوي $2(s-2)$.

ومن العلاقات (2.5)−(2.1) وأعداد أزواج الرؤوس التي تحققها نحصل على

$$C_2(K_s \boxtimes K_t,2)=[(s-1)(s+4)+(t-1)(t+4)]/2$$

$$C_2(K_s \boxtimes K_t,3)=(s-2)(t-2)$$

وبهذا يتم البرهان. #

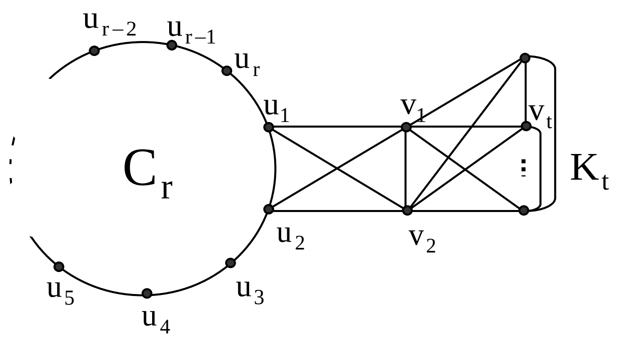
النتيجة الآتية مباشرة من العبارة 2.1

نتيجة 2.2: دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان المركب $K_s \boxtimes K_t$ هو:

$$W_2(K_s \boxtimes K_t)=(s-1)(s+4)+(t-1)(t+4)+3(s-2)(t-2)\,. \quad \#$$

3.البيان المركب $C_r \boxtimes K_t$:

ليكن K_t بيانا تاما برتبة t حيث أن $t \geq 3$ وليكن $v_1v_2 \in E(K_t)$، كما نفرض أن C_r هي دارة برتبة r حيث أن $r \geq 4$ وأن $u_1u_2 \in E(C_r)$. عليه يكون البيان $C_r \boxtimes K_t$ برتبة $r+t$ وحجم $(r+t(t-1)/2+4)$ والشكل التالي يوضح البيان المركب $C_r \boxtimes K_t$.



الشكل3.1 البيان $C_r \boxtimes K_t$

عبارة 3.1: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $C_r \boxtimes K_t$ هي:

$$W_2(C_r \boxtimes K_t;x)=\begin{cases} [(t/2)(t+3)+1]x^2+(r+2)x^{(r+1)/2}-(t-2)x^{(r+3)/2}-x^{r-1} \\ \quad -(r+4)x^r+(2t+r)\displaystyle\sum_{k=(r+3)/2}^{r}x^k \ , \ r,t \geq 3, \ \text{عندما } r \text{ فردي} \\ [(t/2)(t+3)+1]x^2+(r/2)x^{r/2}+(r+4)(x^{r/2+1}-x^r) \\ \quad -x^{r-1}+(2t+r)\displaystyle\sum_{k=r/2+2}^{r}x^k \ , \ r \geq 4\,, t \geq 3, \ \text{عندما } r \text{ زوجي} \end{cases}$$

البرهان: لأجل التبسيط سوف نرمز للبيان $C_r \boxtimes K_t$ بالحرف $\overline{G}$. من الشكل 3.1 نجد أن:

$$d_2(u,v)=2 \quad , \quad \forall u,v \in V(K_t)$$

عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $t(t-1)/2$. إذا

$$g_1(x)=\sum_{u,v\in V(K_t)} x^{d_2(u,v)}=t(t-1)x^2/2$$

كما نجد أن لكل رأسين مختلفين $u,v\in V(C_r)$ باستثناء الزوج $\{u_1,u_2\}$، فان:

$$d_2(u,v|\overline{G})=d_2(u,v|C_r)$$

فضلا عن أن

$$d_2(u_1,u_2)=2$$

ويمكن أن نعبر عن ذلك بمتعددة الحدود الجزئية الآتية:

$$g_2(x)=\sum_{u,v\in V(C_r)} x^{d_2(u,v)}=W_2(C_r;x)-x^{r-1}+x^2$$

كما نلاحظ من الشكل 3.1 أن

$$d_2(u_1,v)=d_2(u_2,v)=2 \quad , \quad \forall\, v\in V(K_t)$$

عدد أزواج الرؤوس التي تحقق ذلك هو 2t. عليه

$$g_3(x)=\sum_{v\in V(K_t)}(x^{d_2(u_1,v)}+x^{d_2(u_2,v)})=2t\,x^2$$

نفرض أن $A=V(C_r)-\{u_1,u_2\}$. تكون المسافة العرضية−2 لكل رأس $u\in A$، نسبة لأي من الرأسين v_1 و v_2 كالأتي:

$$d_2(v_2,u|\overline{G})=d_2(v_2,u|C_{r+1})$$
$$d_2(v_1,u|\overline{G})=d_2(v_1,u|C_{r+1})$$

من هاتين العلاقتين نحصل على الدالة $g_4(x)$ وهي:

$$g_4(x)=\sum_{u\in A}(x^{d_2(v_1,u)}+x^{d_2(v_2,u)})=2W(v_1,C_{r+1};x)-4x^r$$

والآن نفرض أن $B=V(K_t)-\{v_1,v_2\}$، وليكن $v\in B$ نلاحظ أن

$$d_2(u,v|\overline{G})=d_2(u,v|C_{r+3}) \ , \quad \forall u\in A$$

عندئذ نحصل على العلاقة الآتية لرأس معين $v\in B$

$$\sum_{u\in A} x^{d_2(u,v)}=W_2(v,C_{r+3};x)-2x^{r+2}-2x^{r+1}$$

ولما كان $|B|=(t-2)$ لذا نأخذ المجموع لكل v فنحصل على:

$$g_5(x)=\sum_{v\in B,u\in A} x^{d_2(u,v)}=(t-2)[W_2(v,C_{r+3};x)]-2(t-2)(x^{r+1}+x^{r+2})$$

ومما تقدم نستنتج أن

$$W_2(\overline{G};x)=\sum_{i=1}^{5} g_i(x)=[(t/2)(t+3)+1]x^2-x^{r-1}[1+4x+2(t-2)(x^2+x^3)]$$
$$+W_2(C_r;x)+2W_2(v_1,C_{r+1};x)+(t-2)W_2(v,C_{r+3};x)$$

وبما أن [1]

$$W_2(C_r;x)=\begin{cases} r\sum\limits_{i=(r+1)/2}^{r-1}x^i \ , & \text{فردي } r \text{ عندما} \\ r\sum\limits_{i=r/2+1}^{r-1}x^i+\frac{r}{2}x^{r/2} \ , & \text{زوجي } r \text{ عندما} \end{cases}$$

وأن

$$W_2(v,C_k;x)=\frac{2}{k}W_2(C_k;x)$$

حيث $(r+3)$ أو $k=(r+1)$.

وبعد التعويض وإجراء بعض التبسيط نحصل على متعددة الحدود كما هي معطاة في نص المبرهنة. #

نتيجة 3.2: دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $C_r \boxtimes K_t$ هو:

$$W_2(C_r\boxtimes K_t)=\begin{cases} t(t+\frac{3}{4})+\frac{r}{2}(\frac{3}{4}r^2-r-\frac{23}{4})+\frac{t\,r}{2}(\frac{3r}{2}-1)+7 \ , \ r,t\ge 3, & \text{فردي } r \text{ عندما} \\ t(t+1)+r(\frac{3}{8}r^2-\frac{r}{2}-3)+\frac{t\,r}{2}(\frac{3r}{2}-1)+7 \ , \ r\ge 4,\ t\ge 3, & \text{زوجي } r \text{ عندما} \end{cases}$$

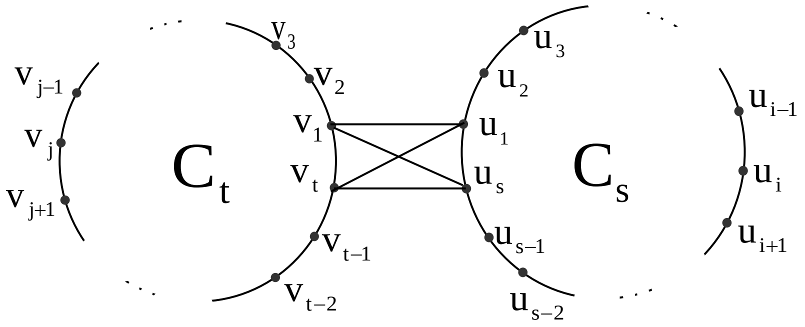
#

4. البيان المركب $C_s \boxtimes C_t$

لتكن C_s و C_t دارتين منفصلتين وان

$$V(C_s)=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_s\}$$
$$V(C_t)=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_t\}$$

البيان المركب $C_s \boxtimes C_t$ يتكون من اتحاد C_t و C_s مع الحافات $\{u_1v_1,u_1v_t,u_sv_1,u_sv_t\}$ كما موضح في الشكل 4. 1



الشكل 4. 1 بيان $C_s \boxtimes C_t$

ليكن $6\le s\le t$ ، لإيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان $C_s \boxtimes C_t$ نعالج الحالات الآتية:

(أولا) ليكن s و t عددين زوجين

بالنسبة لأزواج الرؤوس لدينا الحالات الآتية:

(1) إذا كان u و v أي رأسين في C_s باستثناء الزوج $\{u_1, u_s\}$ ، فان

$$d_2(u,v \mid C_s \boxtimes C_t) = d_2(u,v \mid C_s)$$

وان

$$d_2(u_1,u_s \mid C_s \boxtimes C_t) = 2 \quad , \quad d_2(u_1,u_s \mid C_s) = s-1$$

وعليه

$$F_1(x) = \sum_{u,v \in V(C_s)} x^{d_2(u,v)} = W_2(C_s;x) + x^2 - x^{S-1}$$

(2) بالمثل نحصل على

$$F_2(x) = \sum_{u,v \in V(C_t)} x^{d_2(u,v)} = W_2(C_t;x) + x^2 - x^{t-1}$$

(3) نلاحظ من الشكل 4.1 أن

$$d_2(u_s,v_1) = d_2(u_1,v_t) = d_2(u_s,v_t) = d_2(u_1,v_1) = 2$$

وهذا يؤدي إلى

$$F_3(x) = 4x^2$$

(4) نلاحظ انه لكل $u_i \in V(C_s)$ حيث $2 \le i \le s/2$ ولكل $v_j \in V(C_t)$ حيث $2 \le j \le t/2$. فان الحاوية $C(u_i, v_j)$ ذات اصغر طول تتكون من الدربين الآتيين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots , u_1, v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \dots , v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots , u_s, v_1, v_2, v_3, \dots , v_j$$

إذاً

$$\ell(P_1) = t+i-j, \quad \ell(P_2) = s+j-i$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$d_2(u_i,v_j) = \max\{t+i-j, s+j-i\}$$

حيث $2 \le i \le s/2$ و $2 \le j \le t/2$

إذا كان $s+j-i \le t+i-j$ ، فان $2 \le j \le \frac{\alpha}{2} + i$ ، حيث أن $\alpha = t-s$

هذه العلاقة تعطي قيم j التي تجعل المسافة العرضية

$$d_2(u_i,v_j) = \ell(P_1) = t+i-j$$

ولبقية القيم لـ j أي $\alpha/2 + i + 1 \le j \le t/2$ فان المسافة العرضية−2 هي

$$d_2(u_i,v_j) = s+j-i \ , \ i \ne s/2$$

ومنها نحصل على العلاقة الاتية:

$$\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}$$

هذه العلاقة صحيحة لكل رأس u_i حيث $2 \le i \le s/2-1$ أما لـ $i = s/2$ فان المجموع الثاني $\sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}$ يكون صفراً.

وبأخذ المجموع لهذه العلاقة لقيم i المذكورة نحصل على:

$$\sum_{i=2}^{s/2}\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{i=2}^{s/2-1}\left(\sum_{j=2}^{\alpha/2+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}\right) + \sum_{j=2}^{t/2} x^{t+(s/2)-j} \qquad .....(4.\ 1)$$

وبهذا وجدت متعددة الحدود للرؤوس u_i ، $2 \le i \le s/2$ ، مع الرؤوس v_j ، $2 \le j \le t/2$ وهي متعددة الحدود ذاتها للرؤوس u_i ، $2 \le i \le s/2$ ، مع الرؤوس v_j ، $t/2+1 \le j \le t-1$. أي نضرب العلاقة (4.1) بالعدد 2.

كما أنه وبعد أن وجدنا متعددة الحدود للرؤوس في نصف الدارة الأولى C_s نسبة إلى كل رؤوس الدارة الثانية C_t عدا v_t, v_1 وبمجرد النظر إلى البيان يتأكد لنا أن الرؤوس في النصف الثاني من الدارة الأولى C_s أي الرؤوس u_i ، $s/2+1 \le i \le s-1$ لها العلاقة نفسها نسبة إلى رؤوس الدارة C_t كلها عدا v_t, v_1 وبهذا سوف تضرب العلاقة (4. 1) بالعدد 2 مرة أخرى. وعندها نحصل على

$$F_4(x) = \sum_{u\in U,\ v\in U'} x^{d_2(u,v)} = 4\sum_{i=2}^{s/2-1}\left(\sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}\right) + 4\sum_{j=2}^{t/2} x^{t+(s/2)-j}$$

حيث $U = V(C_s) - \{u_1, u_s\}$ و $U' = V(C_t) - \{v_1, v_t\}$

(5) الان نجد المسافات العرضية−2 لكل من الرأسين u_1 و u_s نسبة إلى v_j ، $2 \le j \le t-1$ ونلاحظ من الشكل 4.1 أن

$$d_2(u_1, v_j \mid C_s \boxtimes C_t) = d_2(u_1, v_j \mid C_{t+1})$$

وكذلك

$$d_2(u_s, v_j \mid C_s \boxtimes C_t) = d_2(u_s, v_j \mid C_{t+1})$$

وهذه تؤدي إلى متعددة الحدود

$$F_5(x) = 2\,W_2(u_1, C_{t+1}; x) - 4x^t$$

(6) بالمثل المسافات العرضية−2 لكل من الرأسين v_1 و v_t نسبة إلى الرؤوس u_i ، $2 \le i \le s-1$ نجد أن

$$d_2(v_1, u_i \mid C_s \boxtimes C_t) = d_2(v_1, u_i \mid C_{s+1})$$
$$d_2(v_t, u_i \mid C_s \boxtimes C_t) = d_2(v_t, u_i \mid C_{s+1})$$

وهذه تؤدي إلى متعددة الحدود

$$F_6(x) = 2\,W_2(v_1, C_{s+1}; x) - 4x^s$$

واضح من الحالات (6) − (1) أن

$$W_2\ (C_s \boxtimes C_t; x) = \sum_{k=1}^{6} F_k(x)$$

وبالتعويض عن $W_2(C_t; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ ، $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ ، $W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ وبالتبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4. 1: إذا كان s و t عددين زوجين وكان $6 \le s \le t$ فان :

$$W_2\,(C_s \boxtimes C_t;x) = 6x^2 + s/2\,x^{s/2} + t/2x^{t/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4)\sum_{k=s/2+1}^{s-1} x^k + (t+4)\sum_{k=t/2+1}^{t-1} x^k$$
$$+4\sum_{k=(s+t)/2}^{t+s/2-2} x^k + 4\sum_{i=2}^{s/2-1}\left(\sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}\right).\ \ \#$$

ملاحظة : الحالات الجزئية (1) ، (2) ، (3) ، (5) ، (6) عندما يكون كل من s و t زوجياً تصح أيضا في الحالات الأخرى لكل من s و t . أما الحالة الجزئية (4) فهي تختلف عنها عندما يكون s و t فردين أو أحدهما فردي والاخر زوجي، وهذه سوف نعالج فيما يأتي (ثانيا) و (ثالثا) و (رابعاً).

(ثانيا) ليكن s و t عددين فرديين وأن $7 \le s \le t$:

كما ذكرنا فان اختلاف هذه الحالة عن الحالة (أولاً) عندما يكون s و t زوجيان هو في الفقرة (4) منها وفيها نلاحظ أن لكل $u_i \in V(C_s)$ ، $2 \le i \le \frac{s-1}{2}$ ، ولكل $v_j \in V(C_t)$ ، $2 \le j \le \frac{t-1}{2}$ ، فان الحاوية $C(u_i, v_j)$ ذات اصغر طول تتكون من الدربين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2},\ \dots\ , u_1, v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \dots , v_j$$
$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2},\ \dots\ , u_s, v_1, v_2, v_3, \dots\ , v_j$$

إذاً

$$\ell\,(P_1) = t + i - j,\quad \ell\,(P_2) = s + j - i$$

وبذلك فان

$$d_2(u_i, v_j) = \max\,\{t + i - j, s + j - i\}\ \ ,\ 2 \le i \le (s-1)/2\ \ ,\ \ 2 \le j \le (t-1)/2$$

إذا كان $s + j - i \le t + i - j$ ، فان $2 \le j \le \frac{\alpha}{2} + i$ ، حيث أن $\alpha = t - s$ وهذه العلاقة تعطي قيم j التي تجعل المسافة العرضية.

$$d_2(u_i, v_j) = t + i - j = \ell(P_1)$$

ولبقية قيم j أي القيم $(\alpha/2 + i + 1) \le j \le (t-1)/2$ فان

$$d_2(u_i, v_j) = s + j - i\,,\ i \ne (s-1)/2$$

وبذلك نحصل على

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \qquad \dots..(4.\ 2)$$

والتي تتحقق لكل رأس u_i ، حيث أن $2 \le i \le (s-3)/2$. أما بالنسبة إلى $i = (s-1)/2$ ، فان المجموع الثاني $\sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{(t-1)/2} x^{s+j-i}$ يصبح صفراً. وعليه فان

$$\sum_{i=2}^{(s-1)/2}\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{(s-3)/2}\left(\sum_{j=2}^{i+\alpha/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+1+\alpha/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i}\right) + \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+(s-1)/2-j} \dots..(4.3)$$

وبهذا وجدنا متعددة الحدود للمسافة العرضية−2 لكل رأسين u_i, v_j ، حيث $i = 2,3,4,..., (s-1)/2$ و $j = 2,3,4,..., (t-1)/2$ ، ونلاحظ أننا نحصل على متعددة الحدود نفسها للمسافة العرضية بين كل رأس u_i ، حيث $i = 2,3,4,..., (s-1)/2$ مع كل رأس v_j ، وحيث $j = \frac{t+3}{2}, \frac{t+5}{2}, \frac{t+7}{2}, ..., t-1$ وبناء على ذلك نضرب المجموع في (4.3) في 2 للحصول على متعددة الحدود للمسافة العرضية لكافة أزواج الرؤوس $\{u_i, v_j\}$ حيث $2 \le i \le (s-1)/2$ ، $j = 2,3,4, \dots, \frac{t-1}{2}, \frac{t+3}{2}, \frac{t+5}{2}, \dots, t-1$.

أما المسافة العرضية للرؤوس في النصف السفلي من الدارة C_s أي u_i ، $\frac{s+3}{2} \le i \le s-1$ ، نسبة إلى الرؤوس v_j أيضا ، $j = 2,3,4, \dots, \frac{t-1}{2}, \frac{t+3}{2}, \frac{t+5}{2}, ..., t-1$ فان متعددة الحدود التي تمثل المسافة العرضية لهذه الرؤوس مساوية أيضا لمتعددة الحدود في(3 .4) ولهذا تضرب بالعدد 2 مرة اخرى.

بقي في هذه الحالة أن نجد

(أ) المسافات العرضية للرأس $u_{(s+1)/2}$ نسبة إلى كل الرؤوس v_j ، $j = 2, 3, 4, \dots, t-1$ وأن نجد.

(ب) المسافات العرضية للرأس $v_{(t+1)/2}$ نسبة إلى كل الرؤوس u_i ، $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{s-1}{2}, \frac{s+3}{2}, \dots, s-1$

ففي حالة (أ) فان الحاوية $C(u_{(s+1)/2}, v_j)$ بأصغر طول تتكون من الدربين :

$$P_1 : u_{(s+1)/2}, u_{(s+3)/2}, u_{(s+5)/2}, \dots, u_s, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_{(s+1)/2}, u_{(s-1)/2}, u_{(s-3)/2} \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

من الواضح أن

$$\ell(P_1) = \frac{s+1}{2} + t - j, \ \ell(P_2) = \frac{s-1}{2} + j$$

إذا كان $\frac{s-1}{2} + j \le \frac{s+1}{2} + t - j$ ، فان $j \le \frac{t+1}{2}$

لذا فان

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = \frac{s+1}{2} + t - j, \quad 2 \le j \le \frac{1}{2}(t+1)$$

وأن

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = \frac{s-1}{2} + j, \quad \frac{1}{2}(t+3) \le j \le (t-1)$$

وهكذا نحصل على متعددة الحدود

$$\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_{(s+1)/2}, v_j)} = \sum_{j=2}^{(t+1)/2} x^{(s+1)/2 + t - j} + \sum_{j=(t+3)/2}^{t-1} x^{(s-1)/2 + j} \qquad \dots\dots(4.4)$$

في حالة (ب) وبإتباع الطريقة نفسها نجد متعددة الحدود للمسافة العرضية−2 للرأس $v_{\frac{t+1}{2}}$ نسبة إلى الرؤوس u_i حيث $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{s-1}{2}, \frac{s+3}{2}, \dots, s-1$ (باستثناء $i = \frac{s+1}{2}$ لان المسافة العرضية بين الرأسين $v_{\frac{t+1}{2}}$ و $u_{\frac{s+1}{2}}$ قد ذكرت في الحالة (أ)) وتكون الحاوية $C(v_{(t+1)/2}, u_i)$ بأصغر طول مكونة من الدربين

$$P_1 : v_{\frac{t+1}{2}}, v_{\frac{t+3}{2}}, v_{\frac{t+5}{2}}, \dots, v_t, u_s, u_{s-1}, \dots, u_i$$
$$P_2 : v_{\frac{t+1}{2}}, v_{\frac{t-1}{2}}, v_{\frac{t-3}{2}}, \dots, v_1, u_1, u_2, \dots, u_i$$

ونجد أن

$$\ell(P_1) = \frac{t+1}{2} + s - i\,,\ \ell(P_2) = \frac{t-1}{2} + i$$

فإذا كان $\frac{t+1}{2} + s - i \ \le\ \frac{t-1}{2} + i$ ، فأن $i \le \frac{s+1}{2}$

وبما أن $i = \frac{s+1}{2}$ قد استثنيت فان

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = \ell(P_1)\ , \qquad 2 \le i \le \frac{s-1}{2}$$

وأن

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = \ell(P_2)\ , \frac{s+3}{2} \le i \le s-1$$

وهكذا نحصل على

$$\sum_{u_i} x^{d_2(u_i, v_{(t+1)/2})} = \sum_{i=2}^{(s-1)/2} x^{(t+1)/2+s-i} + \sum_{i=(s+3)/2}^{s-1} x^{(t-1)/2+i} \qquad \dots\dots(4.5)$$

حيث ان المجموع في الطرف الايسر يؤخذ على كل راس u_i في $V(C_s) - \{u_{\frac{s+1}{2}}, u_1, u_s\}$

واخيرا ، بجمع متعددات الحدود في (1)،(2)، (3) ،(5)، (6) في (اولا) مع متعددات الحدود في (4.5) و (4.4) ومع اربع مرات تلك في (4.3) ومن ثم التعويض عن $W_2(C_t; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ ، $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ و $W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ والتبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4.2 : إذا كان $7 \le s \le t$ وكان t,s عددين فرديين فان

$$W_2(C_s \boxtimes C_t; x) = 6x^2 + (s+2)x^{(s+1)/2} + (t+2)x^{(t+1)/2} - 4x^{t+(s-3)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + 5\sum_{k=(t+s)/2}^{(2t+s-3)/2} x^k$$
$$+ \sum_{k=(t+s+2)/2}^{(t+2s-3)/2} x^k + (s+4+x^{(t-1)/2}).\sum_{k=(s+3)/2}^{s-1} x^k + (t+4+x^{(s-1)/2})\sum_{k=(t+3)/2}^{t-1} x^k$$
$$+ 4\sum_{i=2}^{(s-3)/2}\Big(\sum_{k=2}^{i+\alpha/2} x^{t+i-k} + \sum_{k=i+1+\alpha/2}^{(t-1)/2} x^{s+k-i}\Big)$$

(ثالثا) ليكن $s < t$ ، s عددا زوجيا و t عددا فرديا :

إن هذه الحالة تختلف عن (أولا) في الحالة الجزئية (4) فقط وهي التي سوف نعالجها فيما يلي

إذا كان $2 \le i \le s/2$ و $2 \le j \le (t-1)/2$ ، فان الحاوية $C(u_i, v_j)$ الصغرى تتكون من الدربين الآتيين :

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_1, v_2, \dots, v_j$$

ونجد أن

$$\ell(P_1) = t + i - j, \ell(P_2) = s + j - i$$

لذلك فان

$$d_2(u_i, v_j) = \max\{s + j - i, t + i - j\}$$

إذ أن $2 \le i \le s/2$ و $2 \le j \le (t-1)/2$

فإذا كان $s + j - i \le t + i - j$ ، فان

$$j \le \frac{t\text{-}s}{2} + i \qquad \dots..(4.6)$$

بما أن $j \ge 2$ عدد صحيح وان t-s عدد فردي فان المتباينة (4.6) تؤدي إلى $2 \le j \le \dfrac{t-s-1}{2} + i$

وهي قيم j التي تحقق المسافة العرضية −2

$$2 \le i \le s/2 \;\; d_2(u_i, v_j) = t + i - j \;\; ,$$

ولقيم j الأخرى التي هي $(t-s+1)/2 + i \le j \le (t-1)/2$ فان المسافة العرضية −2 هي

$$2 \le i \le (s/2) - 1 \;\; d_2(u_i, v_j) = s + j - i \;\; ,$$

وعليه ، ولرأس معين u_i ، $2 \le i \le \dfrac{s}{2} - 1$ ، فان متعددة الحدود المقابلة له هي

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \qquad \dots..(4.7)$$

أما بالنسبة للرأس $u_{s/2}$ فان لدينا

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_{s/2}, v_j)} = \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+s/2-j} \qquad \dots..(4.8)$$

وبأخذ المجموع لمتعددة الحدود (4.7) ،لقيم $2 \le i \le (s/2) - 1$ ، وإضافة متعددة الحدود في (4.8) ، نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s/2} \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \right) + \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+(s/2)-j} , \qquad \dots..(4.9)$$

سوف نبين أن (4.9) هي نفسها لكل رأس u_i ، $2 \le i \le s/2$ ، مع كل رأس v_j ، $(t+3)/2 \le j \le t-1$ ، وذلك باستخدام دربين مختلفين عن الحالة المذكورة سابقا وهما :

$$P_1^* : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$P_2^* : u_i , u_{i+1} , u_{i+2} , \ldots , u_s , v_t , v_{t-1} , \ldots , v_j$$

واضح أن

$$\ell(P_1^*) = i + j - 1 \quad , \quad \ell(P_2^*) = t + s - i - j + 1 \, , \, 2 \le i \le s/2 \, , \, (t+3)/2 \le j \le t\text{-}1$$

من الشكل 4.1 نلاحظ التناظر بين الرأسين v_j و v_{t-j+1} ، $2 \le j \le (t-1)/2$ وإذ نستطيع أن نقول أن طول الدرب P_1 يؤدي إلى طول الدرب P_1^* عندما نستبدل j بـ $t-j+1$ لكل $2 \le j \le \frac{1}{2}(t-1)$ ، وبالمثل، فان طول P_2 يؤدي إلى طول الدرب P_2^* عندما نستبدل j بـ $t-j+1$ لكل $2 \le j \le (t-1)/2$ ، وبهذا نستنتج أن لكل $i = 2,3,4,\ldots,s/2$ و $j = 2,3,4,\ldots,(t\text{-}1)/2$ فان $d_2(u_i , v_j) = d_2(u_i , v_{t-j+1})$. وبهذا تضرب متعددة الحدود في (4.9) بالعدد 2 ، وعندها نكون قد وجدنا المسافات العرضية لكل الرؤوس u_i ، $2 \le i \le s/2$ نسبة إلى كل الرؤوس v_j ، لأجل $t\text{-}1$ $\frac{t+3}{2}$, , … , $\frac{t-1}{2}$, j=2 , 3 , 4 ,…, .

وكذلك فان متعددة الحدود للمسافة العرضية للرؤوس في النصف السفلي للدارة C_s ، أي الرؤوس u_i و $1 + (s/2) \le i \le s-1$ نسبة إلى كل رؤوس الدارة C_t عدا الرأس $v_{(t+1)/2}$ مساوية لتلك المذكورة للرؤوس في نصف الدارة C_s العلوي نسبة إلى رؤوس C_t نفسها عدا $v_{(t+1)/2}$ ولهذا تضرب متعددة الحدود في (4.9) بالعدد 2 مرة أخرى، وتصبح مضروبة في 4.

أما الرأس $v_{(t+1)/2}$ ومسافاته العرضية عن u_i و $2 \le i \le s/2$ ، فنلاحظ أن الحاوية $C(u_i , v_{(t+1)/2})$ تتكون من الدربين:

$$P_1 : v_{(t+1)/2} , v_{(t-1)/2} , v_{(t-3)/2} , \ \ldots \ , v_1 , u_1 , u_2 , \ \ldots \ , u_i$$
$$P_2 : v_{(t+1)/2} , v_{(t+3)/2} , v_{(t+5)/2} , \ \ldots \ , v_t , u_s , u_{s-1} , \ \ldots \ , u_i$$

ونجد أن

$$\ell(P_1) = \frac{t-1}{2} + i , \quad \ell(P_2) = \frac{t+1}{2} + s - i$$

ولهذا فان

$$d_2(u_i , v_{(t+1)/2}) = \max\{\frac{t\text{-}1}{2} + i \, , \frac{t+1}{2} + s - i\}$$
$$= s - i + (t+1)/2 \quad , \quad i = 2,3, \ldots , \frac{s}{2}$$

وبهذا نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s/2} x^{d_2(u_i , v_{(t+1)/2})} = \sum_{i=2}^{s/2} x^{(t+1)/2+s-i} \qquad \ldots..(4.10)$$

لكل رأس u_i و $2 \le i \le s/2$

$$d_2(u_i , v_{(t+1)/2}) = d_2(u_{s\text{-}i+1} , v_{(t+1)/2})$$

وهذه العلاقة تعطي المسافات العرضية للرؤوس $u_{\frac{s}{2}+1} , u_{\frac{s}{2}+2} , \ldots , u_{s-1}$ نسبة إلى الرأس $v_{(t+1)/2}$ ولهذا تضرب العلاقة (4.10) بالعدد 2 ، ونحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1} x^{d_2(u_i, v_{(t+1)/2})} = 2\sum_{i=2}^{s/2} x^{\frac{(t+1)}{2}+s-i}$$

مما تقدم نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_i,v_j)} = 2\sum_{i=2}^{s/2} x^{\frac{(t+1)}{2}+s-i} + 4\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t-j+\frac{s}{2}}$$

$$+4\sum_{i=2}^{s/2-1}\left(\sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i}\right) \qquad .....(4.11)$$

وبجمع متعددات الحدود في (1)،(2)، (3) ،(5)، (6) في (أولا) مع متعددة الحدود في (4.11) والتعويض عن $W_2(C_s;x)$ ، $W_2(C_t;x)$ ، $W_2(u_1,C_{t+1};x)$ و $W_2(v_1,C_{s+1};x)$ وبإجراء التبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4.3: إذا كان $6 \le s < t$ وكان s عددا زوجيا و t عددا فرديا فان

$$w_2(C_s \boxtimes C_t;x) = 6x^2 + \frac{s}{2}x^{s/2} - 2x^{(t+1)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4)\sum_{k=s/2+1}^{s-1} x^k + (t+4)\sum_{k=(t+1)/2}^{t-1} x^k$$
$$+ 2x^{(t+1)/2}.\sum_{k=2}^{s/2} x^{s-k} + 4x^{s/2}.\sum_{k=2}^{(t-1)/2} x^{t-k} + 4x^{(t+s+1)/2}.\sum_{i=2}^{s/2-1}\left(\sum_{k=0}^{(t+2i-s-5)/2} x^k + \sum_{k=0}^{s/2-i-1} x^k\right)$$

(رابعا) ليكن s < t ، s عددا فرديا و t عددا زوجيا :

هذه الحالة أيضا تختلف عن (أولا) في الحالة الجزئية(4) والتي سوف نعالجها كما في (ثالثا) .

أن الرؤوس u_i و $2 \le i \le \frac{s-1}{2}$ تكون مسافاتها العرضية −2 نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \le j \le t/2$ هي كما ذكرت في (ثالثا)، أي

$$d_2(u_i, v_j) = \max\{t+i-j, s+j-i\}$$

فإذا كان $s+j-i \le t+i-j$ ، فان $j \le i+(t-s)/2$

ولما كان $j \ge 2$ عددا صحيحا فان هذه تؤدي إلى

$$2 \le j \le \frac{t-s-1}{2} + i$$

وهي قيم j التي تحقق

$$d_2(u_i, v_j) = t+i-j \ , \ i = 2,3, \ldots ,(s-1)/2$$

ولبقية قيم j أي $\frac{t-s+1}{2} + i \le j \le t/2$ فان

$$d_2(u_i, v_j) = s+j-i$$

ومنها نحصل على

$$\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i}$$

هذه العلاقة لكل رأس u_i و $2 \le i \le \frac{s-1}{2}$ وبأخذ المجموع لقيم i نحصل على

$$\sum_{i=2}^{(s-1)/2}\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i,v_j)} = \sum_{i=2}^{(s-1)/2}\Big(\sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i}\Big) \qquad \ldots..(4.12)$$

وكما حصلنا في الحالة (ثالثا) عندما يكون s عددا زوجيا و t عددا فرديا فانه عندما نأخذ الحاوية $C(u_i, v_j)$ ، $2 \le i \le \frac{s-1}{2}$ و $\frac{t}{2}+1 \le j \le t-1$ المكونة من الدربين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \ldots, u_1, v_1, v_2, \ldots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_s, v_t, v_{t-1}, \ldots, v_j$$

نجد أن

$$\ell(P_1) = i + j - 1, \ell(P_2) = s + t - i - j + 1$$

نلاحظ من الشكل 4.1 وأطوال الدروب فيه أن لكل رأس u_i و $2 \le i \le (s-1)/2$ يكون طول الدرب P_1 الذي يصل إلى الرأس v_j مساويا لطول احد الدربين بين الرأس u_i نفسه والرأس v_{t-j+1}. وكذلك طول الدرب P_2 الذي يصل u_i والرأس v_j يساوي طول الدرب الآخر الذي يصل u_i نفسه والرأس v_{t-j+1} وعليه فان

$$d_2(u_i, v_j) = d_2(u_i, v_{t-j+1})$$

ولهذا تضرب متعددة الحدود في (4.12) بالعدد 2 وعندها نكون قد وجدنا متعددة الحدود للمسافة العرضية 2− لكل أزواج الرؤوس $\{u_i, v_j\}$ حيث $2 \le i \le (s-1)/2$ ، $2 \le j \le t-1$ أما متعددة الحدود للرؤوس u_i ، $\frac{s+3}{2} \le i \le s-1$ نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \le j \le t-1$ فهي نفسها (4.12) ولهذا تضرب بالعدد 2 مرة أخرى .

يبقى الرأس $u_{\frac{s+1}{2}}$ ومسافاته العرضية نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \le j \le t-1$ ، فنجد أن الحاوية ذات اصغر طول $C(u_{(s+1)/2}, v_j)$ تتكون من الدربين

$$P_1 : u_{(s+1)/2}, u_{(s-1)/2}, u_{\frac{s-3}{2}}, \ldots, u_1, v_1, v_2, \ldots, v_j$$

$$P_2 : u_{(s+1)/2}, u_{(s+3)/2}, u_{\frac{(s+5)}{2}}, \ldots, u_s, v_t, v_{t-1}, \ldots, v_j$$

واضح أن

$$\ell(P_1) = \frac{s-1}{2} + j, \ell(P_2) = t - j + (s+1)/2$$

وعليه ، لكل $j = 2,3,4, \ldots, \frac{t}{2}$ ، فان

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = t - j + (s+1)/2$$

كما أن

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = d_2(u_{(s+1)/2}, v_{t-j+1}) \quad , \quad 2 \le j \le t/2$$

ولهذا فان

$$\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_{(s+1)/2},v_j)} = 2\sum_{j=2}^{t/2} x^{t-j+(s+1)/2} \quad .....(4.13)$$

وبجمع متعددة الحدود في (4.13) مع أربع مرات متعددة الحدود في (4.12) نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_i,v_j)} = 2\sum_{j=2}^{t/2} x^{t-j+(s+1)/2} + 4\sum_{i=2}^{(s-1)/2}\Big(\sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i}\Big) \quad .....(4.14)$$

وأخيرا نجمع متعددات الحدود في (1)،(2)، (3) ،(5)، (6) في (أولا) مع متعددة الحدود (4.14) ونعوض عن $W_2(C_s;x)$ ، $W_2(C_t;x)$ ، $W_2(u_1,C_{t+1};x)$ و $W_2(v_1,C_{s+1};x)$ ونجري التبسيط لنحصل على المبرهنة الآتية :

مبرهنة 4.4 : إذا كان $7 \le s < t$ وكان s عددا فرديا و t عددا زوجيا فان:

$$w_2(C_s \boxtimes C_t;x) = 6x^2 + \frac{t}{2}x^{t/2} - 2x^{(s+1)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4)\sum_{k=(s+1)/2}^{s-1} x^k + (t+4)\sum_{k=t/2+1}^{t-1} x^k$$
$$+ 2x^{(s+1)/2}.\sum_{k=2}^{t/2} x^{t-k} + 4x^{(s+t+1)/2}\sum_{i=2}^{(s-1)/2}\Big(\sum_{k=0}^{(t+2i-s-5)/2} x^k + \sum_{k=0}^{(s-2i-1)/2} x^k\Big)$$

REFERENCES

[1] A.A.Ali ,and A.S.Aziz (2007),"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs " Raf .J.of Comp.Sci. ,Vol.4, Nol.2.

[2] A.S.Aziz (2007) ," the Width Distance and the w- Wiener Polynomial of a Graph", M.Sc. Thesis , Mosul University ,Mosul.

[3] F. Buckley and F. Harary ; (1990), Distance in Graphs , Addison-Wesley, Redwood

[4] G. Chartrand and L. Lesniak ; (1986), Graphs and Digraphs, Wadsworth Inc. Belmont, California .

[5] I. Gutman ; (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial",Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.

[6] W.A.M. Saeed ; (1999), Wiener Polynomials of Graphs , Ph.D. Thesis, Mosul University, Mosul.

[7] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang ; (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.