A New Algorithms in Mixed Integer Programming Problems

Basim A. Hassan **Abbas Y. Al-Bayati**

basimabas39@gmial.com profabbasalbayati@yahoo.com

College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul

Received on: 7/1/2007 **Accepted on: 16/4/2007**

ABSTRACT

In this paper we have studied two new algorithms for solving mixed IPP. In the 1st algorithm we have investigated a new short technique for searching to the efficient cut in the standard cutting plane procedure to obtain the same optimal solution by using a number of test problems in this field. In the 2nd new algorithm we have put certain numerical conditions to obtain the global solution instead of the local solution by using cutting-plane and Al-Zobaidyi [1] algorithms. Our numerical results indicate that our new suggestions are efficient both numerically and theoretically compared with Al-Zobaidyi algorithm.

Keywords: Integer Programming Problems, Mixed Integer Programming, numerical results.

خوارزميات جديدة في مسائل البرمجة الصحيحة المختلطة

باسم عباس حسن **عباس يونس البياتي**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2007/1/7 **تاريخ قبول البحث: 2007/4/16**

الملخص

تم التطرق في هذا البحث إلى خوارزميتين جديدتين لحل مسائل البرمجة الصحيحة المختلطة . وقد تم التقصي بوسيلة جديدة مختصرة في إيجاد القاطع الأكفأ في خوارزمية قطع المستويات القياسية مع الحصول على النتائج العددية نفسها للمسائل المستخدمة في هذا المجال.

أما في الخوارزمية الثانية فقد تم وضع شروط عديدة للحصول على حل شامل بدلاً عن الحل الموضعي الذي يمكن الحصول عليه باستخدام خوارزميتي قطع المستويات والزبيدي [1]. النتائج العددية أثبتت كفاءة الخوارزميات المقترحة عددياً و نظرياً مقارنةً بخوارزمية الزبيدي.

الكلمات المفتاحية : مسائل البرمجة الصحيحة, البرمجة الصحيحة المختلطة, النتائج العددية.

1- المقدمة

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي مسألة برمجة خطية اعتيادية على أن تكون المتغيرات القرارية جميعها أو بعضها مقيدة وذات قيمة صحيحة أن طرق حل النماذج ذات الأعداد الصحيحة تعتمد بالأساس على مبدأين: المبدأ الأول هو أن النماذج الصحيحة تتعامل في المرحلة الأولى باستخدام الطريقة المبسطة في الحل. والمبدأ الثاني هو اعتماد النتائج النهائية التي تمثل الحل الأمثل كأساس للوصول للحل الأفضل الذي يجعل قيماً المتغيرات الأساسية قيم صحيحة (غير كسرية). ويتم بموجب ذلك اختيار قيود إضافية جديدة تشترك أو تؤمن قيم صحيحة للمتغيرات

الأصلية في النموذج. يتركز هذا البحث **أولا:** على اختيارنا قيود إضافية جديدة وبإضافة هذه القيود الجديدة يتكون لدينا نموذج جديد. **ثانيا** اختبار الحل الأمثل للبرمجة الصحيحة الخطية على أساس أن التقارب الموضعي أو التقارب الشامل للحل.

وهنا لا بد من ملاحظة أن إضافة القيود الجديدة تأتي بشكل متعاقب بحيث يتم إضافة قيد واحد إلى النموذج ثم تجري العمليات الحسابية كما هي في الطريقة (المبسطة). وعند عدم اكتمال الحل (أي عدم التوصل إلى الحل الأفضل) يتم إضافة قيد جديد أخر وهكذا لحين الوصول إلى قيم صحيحة للمتغيرات الأساسية في النموذج. [2]

2- البرمجة الرياضية MATHEMATICAL PROGRAMMING

البرمجة الرياضية (M.P) هي أحدى الأساليب المستخدمة في صياغة المسائل الإدارية والاقتصادية وحلها بوساطة عمل خطة إنتاجية للفاعلات المختلفة لزيادة الأرباح أو تقليل الكلفة, المسألة العامة للبرمجة الرياضية (M.P) هي إيجاد قيم المتغيرات التي تعظم أو تقلل قيمة دالة الهدف تبعا لقيود تمثل كمية الموارد المتاحة. [1]

الصيغة العامة لمسألة البرمجة الرياضية هي على النحو الآتي :

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ + c_n x_n \qquad \ldots(1)$$

وتكون دالة الهدف هذه خاضعة لعدد من المحددات أو القيود (أي الشروط) والتي تتخذ الشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \ \le = \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \ \le = \ge b_2 \\ \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \ \le = \ge b_m \end{array}\right\} \qquad \ldots(2)$$

ومن الملاحظ أن المتغيرات x_j هي متغيرات حقيقية (REAL VARIABLE) أي أن $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \ge 0)$

وان (a_{ij}, b_j, c_j) هي كميات ثابتة (CONSTANTS). [3]

ويستهدف من المسألة بهذه الصيغة أيجاد مجموعة من الأعداد الموجبة للمتغيرات المشمولة بالنظام بحيث تلبي القيود المشار أليها أنفاً , حيث تتضمن الأمور الآتية وهي: دالة الهدف – مجموعة القيود أو الشروط – جميع المتغيرات ذات قيم غير سالبة. [8]

3- مسألة البرمجة الخطية الصحيحة: INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

تتطلب أكثر التطبيقات العلمية لمسائل البرمجة الخطية (LP) حلا متمثلا بأعداد صحيحة فمثلا في مسائل الإنتاج فانه من غير الممكن أن يتمم إنتاج سيارة ونصف سيارة أو حقيبة جلدية وربع الحقيبة وعلى هذا الأساس ظهرت البرمجة الخطية الصحيحة (ILP) [1] التي هي مسألة البرمجة الخطية بحيث تكون جميع المتغيرات القرارية (الحقيقة) أو بعضها المقيدة لتكون ذات قيمة صحيحة , بدقة أكثر هي مسألة (تكبير أو تصغير) دالة خطية (دالة الهدف) ثابتة لمتغيرات ذات قيمة صحيحة وتحقق المعادلة (2)، بشكل عام مسألة البرمجة الصحيحة هي أكثر صعوبة في الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية لأنه يمكننا حل مسألة البرمجة الصحيحة بحل متتابعة من مسائل البرمجة الخطية. في مسألة البرمجة الصحيحة سوف نسمي أية قيمة صحيحة من المتغيرات التي تحقق (2) بالحل الموجب (FEASIBLE SOLUTION) ويمكننا أن نسمي مجموعة الحل الموجبة بالمنطقة الموجبة (FEASIBLE REGION) لمسألة البرمجة الصحيحة، لذلك MIN(MAX) مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي مسألة أيجاد الحل

الموجب حيث تكون دالة الهدف اكبر (اصغر) أو تساوي قيمة كل الحلول الموجبة الأخرى الموجودة، فيسمى ذلك الحل بالحل الأمثل (OPTIMAL SOLUTION) والذي هو هدفنا الرئيس.

تحل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة أولا بتجاهل شروط المتغيرات لأخذ قيم صحيحة، ثم تحل المسألة على إنها مسألة برمجة خطية لإيجاد الحل الحقيقي الأمثل، بعد ذلك نستخدم خوارزميات مسألة البرمجة الخطية الصحيحة للتحرك من الحل الحقيقي باتجاه إيجاد الحلول الموجبة الصحيحة أي الحلول التي تكون فيها كل المتغيرات صحيحة، خوارزميات البرمجة الخطية الصحيحة تحاول أيجاد الحل الموجب الصحيح وبعد ذلك تبحث عن حل أخر أفضل. [4]

4- طرائق لحل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (ILP)

هناك العديد من الطرائق التي تطورت لحل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة (ILP) واغلب هذه الطرائق تقوم على أساس تجاهل قيد العدد الصحيح للتوصل إلى حل المسألة ومن ثم يتم معالجة القيم الكسرية للمتغيرات في حالة وجودها والسبب يعود في كون عملية التوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (ILP) يتم من خلال الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية (LP)، تقارب القيم المثلى للحل الأمثل للمسألتين وفي بعض الأحيان تساويها وان هذا يؤدي إلى تقليل العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة. [4]
وأكثر الطرائق استخداما هي:

1-4- طريقة قطع المستويات THE CUTTING - PLANES METHOD

هي طريقة فريدة من نوعها لحل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة والتي نشرت عن طريق العالم [6] RALPH E. GOMORY وقد سميت على باسمه GOMORY , CUTTING PLANES METHOD الفكرة الأساسية لطريقة قطع المستويات بسيطة لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة، مسألة البرمجة الخطية هي بالضبط مسألة البرمجة الصحيحة ولكن بدون الشروط على المتغيرات والتي تكون صحيحة الحل . إذا كان الحل متكوناً من قيم صحيحة فقط فسيكون الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة وألا يزداد قيد جديد لمسألة البرمجة الصحيحة . هذا القيد الجديد يضاف بحيث أن كل الحلول الصحيحة للقيد القديم تحقق القيد الجديد ويبقى الحل الأمثل غير الصحيح لا يحقق هذا القيد . وفي الحل الهندسي, القيد الجديد المضاف لمسألة البرمجة الخطية سوف يقطع الحل غير الصحيح فقط وليس النقاط الصحيحة التي من الممكن أن تكون حلولا موجبة لمسألة البرمجة الصحيحة, نظريا (القطع) للحل غير الصحيح بإضافة قيد واحد كل مرة وتتكرر إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل المتكون من القيم الصحيحة. [4]

خوارزمية قطع المستويات:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (1) على أنها مسألة برمجة خطية بالطريقة الفردية Simplex Method متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات x_j , $j \in I$ لها قيم ، توقف، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

فإن

$$x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_j \ , \ j \in \mathrm{I} \qquad \ldots(3)$$

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \le 0$$

القيد الجديد

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0 \qquad \ldots(4)$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ $0 \le f_{ij} \prec 1, a_{ij}$

$f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ $0 \le f_i \prec 1, b_i$

δ متغير منحل جديد ممكن وصحيح .

الخطوة 4: (اختبار القاطع الأكفأ) نختبر القواطع التي نحصل عليها من الخطوة (3) لنحصل على القاطع الأكفأ في الوصول إلى الحل الأمثل بأقل عدد من الخطوات وذلك بالتعويض عن قيم المتغيرات الخاملة (Slack Variable) التي نحصل عليها من قيود المسألة الأصلية في قيود قطع المستويات التي حصلنا عليها للحصول على مستقيمات تقطع منطقة الحلول الممكنة ثم يتم اختيار القاطع الذي يقطع جزءاً أكبر من تلك المنطقة.

الخطوة 5: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (4) للجدول الأخير من حل الطريقة الفردية وقم بالحل على أنها مسألة البرمجة الخطية، إذا كانت جميع المتغيرات $x_j \ , \ j \in \mathrm{I}$ صحيحة فالمسألة انتهت، وإلا اذهب إلى الخطوة 2. [5]

2-4- خوارزمية البرمجة الصحيحة (*الزبيدي*)

فلسفة طريقة البرمجة الصحيحة (*الزبيدي*) تعتمد على اختبارين اثنين الاختبار الأول يتمثل باختبار دالة الهدف من حيث كون قيمة دالة الهدف لمسألة البرمجة الصحيحة (ILP) أقل أو تساوي قيمة دالة الهدف في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي قيمة دالة الهدف في حالة التقليل لمسألة البرمجة الخطية (LP) والاختبار الثاني يتمثل باختبار تحقق القيود [1]. وفي ما يأتي خطوات هذه الخوارزمية:

الخطوة 1: إيجاد الحل الأمثل للمسألة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح

الخطوة 2: نختار القيود المؤثرة في الأنموذج والتي تكون قيم أسعار الظل لها عبارة عن قيم غير صفرية.

الخطوة 3: في حالة كون الحل الأمثل يتمثل بقيم كسرية أعلى لمتغيرات القرار يتم اختيار المتغير ذو القيمة الكسرية الأقل وليكن (x).

الخطوة 4: المرحلة الأولى: تتمثل بإعطاء x قيمة تتمثل بأصغر عدد صحيح أكبر من القيمة غير الصحيحة له مع إعطاء بقية المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة قيم تتمثل بأكبر عدد صحيح أقل من القيم غير الصحيحة لها.

الخطوة 5: حساب قيمة Z_1 للمرحلة الأولى بتعويض القيم المختارة في الخطوة 4 بدالة الهدف.

الخطوة 6: حساب $\overline{Z} = Z - Z_1$ بحيث قيمة $\overline{Z}$ يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر في حالة التعظيم وأقل أو تساوي الصفر في حالة التقليل وعكس ذلك نتوقف وننتقل إلى المرحلة الثانية .

الخطوة 7: بعد حساب $\overline{Z}$ نختبر تحقق القيود المؤثرة في الأنموذج من خلال ضرب معاملات الجانب الأيسر للقيود في الزيادة أو النقصان لقيم المتغيرات الناتجة من الخطوة 4.

الخطوة 8: في حالة كون إشارة القيد أصغر أو يساوي فإن القيم المحسوبة في الخطوة 7 يجب أن تكون أقل أو تساوي صفراً وأكبر أو تساوي الصفر في حال كون إشارة القيد اكبر أو يساوي وعكس ذلك ننتقل إلى المرحلة الثانية.

الخطوة 9: نختار القيد ذا القيمة غير الصفرية الأعلى الناتجة من الخطوة 7 في حال كون إشارة القيد أصغر أو يساوي أما في حالة كون إشارة القيد أكبر أو يساوي فنختار القيد ذا القيمة غير الصفرية الأقل ولنفترض أن القيمة هي (k) .

الخطوة 10: حساب قيمة Q للقيد والتي تمثل معاملات الجانب الأيسر للقيد الأقل من أو تساوي $|k|$ في حال كون إشارة القيد أصغر أو يساوي وأقل من أو تساوي k في حالة كون إشارة القيد أكبر أو يساوي وكذلك الاختلاف بين معاملات الجانب الأيسر للقيد التي تحقق الشرط وسنفترض أن قيم Q هي:

$$Q = (a_{11}, a_{12} - a_{11})$$

الخطوة 11: في حال عدم وجود قيم لـ Q فإن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل .

الخطوة 12: حساب قيم $\overline{Q}$ والتي تمثل معاملات دالة الهدف بحيث أن :

إشارة القيد أصغر أو يساوي $\overline{Q} = (c_1, c_2 - c_1)$

إشارة القيد أكبر أو يساوي $\overline{Q} = (-c_1, c_1 - c_2)$

الخطوة 13 : اختبار قيم $\overline{Q}$ الأكبر من الصفر والتي تكون اصغر أو تساوي $\overline{Z}$ في حالة التعظيم ومن ثم اختيار القيمة الأعلى منها أما في حالة التقليل فيتم اختيار قيم $\overline{Q}$ الأصغر من الصفر والتي تكون أكبر أو تساوي $\overline{Z}$ وعكس ذلك فإن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل.

الخطوة 14: بافتراض أن قيمة $\overline{Q}$ المختارة في الخطوة 13 هي $(c_2 - c_1)$ فإن هذا يعني أن ننتقل إلى مرحلة لاحقة تمثل زيادة قيمة المتغير x_2 ونقصان قيمة المتغير x_1 وحدة واحدة مع ثبات قيم المتغيرات الأخرى.

الخطوة 15: يعاد حساب الخطوات السابقة ابتداءاً من الخطوة 4.

الخطوة 16: المرحلة الثانية: تتمثل بإعطاء x قيمة تمثل أكبر عدد صحيح أصغر من القيمة غير الصحيحة لـ x مع إعطاء بقية المتغيرات قيماً تتمثل بأصغر عدد صحيح أكبر من القيم غير الصحيحة لها ويعاد حساب الخطوات السابقة.

الخطوة 17: في حال كون المرحلة الأولى والثانية لا تمثل الحل الأمثل يتم إعطاء قيم لـ x والمتغيرات تتمثل بأكبر عدد صحيح أقل من قيمها غير الصحيحة.

ويعاد حساب الخطوات السابقة.

5- خوارزميات البرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة

New Mixed INTEGER LINEAR PROGRAMMING

طريقة البرمجة الصحيحة المختلطة تتطلب لصياغتها إجراء بعض التعديل في المسألة أو (الخوارزمية) كإضافة بعض الشروط الدالية أو استخدام بعض المتغيرات الإضافية [6] نود الإشارة إلى أن البرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة ناتجة من إضافة شروط إلى خوارزمية قطع المستويات وخوارزمية *البرمجة الصحيحة الزبيدي*.

5-1- طريقة الأولى البرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة (NEW 1):

هي تقنية ناجحة جدا في حل مجموعة واسعة من مسائل البرمجة الصحيحة وهي توفير ضمانة الوصول إلى الحل الأمثل. وسوف نقوم بتوضيح كيفية أداء هذه التقنية. عدد كبير من مسائل البرمجة الخطية الصحيحة ممكن حلها بوساطة الطريقة الجديدة والتي تكون خوارزميتها متكونة بالضبط من التركيب ما بين طريقة قطع المستويات وطريقة البرمجة الصحيحة الزبيدي, وهي تعمل كسابقتها في حل سلسلة (متتابعة) من مسائل البرمجة الخطية.يتم اختبار القاطع الأكفأ في طريقة قطع المستويات بطريقتين أولا: استخدام السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها اكبر جزء كسري (من الحل الأمثل) ومنه نقوم بتوليد قيد قطع المستويات. ثانيا عن طريق الحل الهندسي حيث أن القيد الجديد المضاف لمسالة البرمجة *الخطية* سوف (يقطع) الحل غير الصحيحة فقط وليس النقاط الصحيحة التي من الممكن أن يكون الحلول الموجبة لمسألة البرمجة الصحيحة. نظريا للحل غير الصحيح بإضافة قيد واحد كل مرة وتتكرر إلى حين الحصول على الأمثل المتكون من القيم الصحيحة. الطريقة الجديدة مكافئة للحالة الأولى وأفضل من الحالة الثانية وذلك لان عملية رسم المستقيمات ذات المتغيرتين تكون سهلة وإذا كان أكثر من المتغيرتين فيكون من صعب رسم المستقيمات, وقد يكون غير دقيق وهذا يؤدي إلى تقارب بطيء وربما لا تؤدي إلى الحل الأمثل.

الخوارزمية الأولى للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (1) على أنها مسألة البرمجة الخطية بالطريقة الفردية Simplex Method متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات x_j , $j \in I$ لها قيم صحيحة، توقف، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي فإن

$$x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_j \ , \ j \in I$$

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \le 0$$

القيد الجديد

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0 \qquad \ldots(5)$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij}, $0 \le f_{ij} \prec 1$

$f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i, $0 \le f_i \prec 1$

δ متغير منحل جديد ممكن وصحيح.

الخطوة 4: بعد توليد قيود قطع المستويات اختبر تحقق القيود المؤثرة في الأنموذج من خلال ضرب معاملات الجانب الأيسر للقيود في الزيادة أو النقصان لقيم المتغيرات الناتجة من الخطوة 2.

الخطوة 5: في حالة كون إشارة القيد أصغر أو يساوي فإن القيم المحسوبة في الخطوة 4 يجب أن تكون أقل أو تساوي صفر وأكبر أو تساوي الصفر في حال كون إشارة القيد اكبر أو يساوي.

الخطوة 6: اختر القيد ذا القيمة غير الصفرية الأعلى الناتجة من الخطوة 4 في حال كون إشارة القيد أصغر أو يساوي أما في حالة كون إشارة القيد أكبر أو يساوي فاختر القيد ذا القيمة غير الصفرية الأقل.

الخطوة 7: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد الذي حصلنا عليه من الخطوة 6 للجدول الأخير من حل الطريقة الفردية وقم بالحل على أنها مسألة البرمجة الخطية، إذا كانت جميع المتغيرات $x_j\ ,\ j \in \mathrm{I}$ صحيحة فالمسألة انتهت، وألا اذهب إلى الخطوة 2 .

من الخطوات (4) إلى (7) يتم اختيار القاطع الجديد للتكرار التالي ولا يعتمد على طريقتي اختبار القاطع الأكفأ المستخدم في خوارزمية قطع المستوي.

2-5- طريقة ثانية للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة (NEW 2):

ندرج فيما يأتي الخطوات التكرارية المطلوبة في الخوارزمية المقترحة الجديدة على النحو الأتي:

الخوارزمية الثانية للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة:

الخطوة 1: إيجاد الحل الأمثل للمسألة بدون الأخذ بعين الاعتبار قيد العدد الصحيح

الخطوة 2: نختار القيود المؤثرة في الأنموذج والتي تكون قيم أسعار الظل لها عبارة عن قيم غير صفرية.

الخطوة 3: في حالة كون الحل الأمثل يتمثل بقيم كسرية أعلى لمتغيرات القرار يتم اختيار المتغير ذي القيمة الكسرية الأقل وليكن (x).

الخطوة 4: المرحلة الأولى: تتمثل بإعطاء x قيمة تتمثل بأصغر عدد صحيح أكبر من القيمة غير الصحيحة له مع إعطاء بقية المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة قيماً تتمثل بأكبر عدد صحيح أقل من القيم غير الصحيحة لها.

الخطوة 5: حساب قيمة Z_1 للمرحلة الأولى بتعويض القيم المختارة في الخطوة 4 بدالة الهدف.

الخطوة 6: حساب $\overline{Z} = Z - Z_1$ بحيث أن قيمة $\overline{Z}$ يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر في حالة التعظيم وأقل أو تساوي الصفر في حالة التقليل وعكس ذلك نتوقف وننتقل إلى المرحلة الثانية.

الخطوة 7: بعد حساب $\overline{Z}$ نختبر تحقق القيود المؤثرة في الأنموذج من خلال ضرب معاملات الجانب الأيسر للقيود في الزيادة أو النقصان لقيم المتغيرات الناتجة من الخطوة 4.

الخطوة 8: في حالة كون إشارة القيد أصغر أو يساوي فإن القيم المحسوبة في الخطوة 7 يجب أن تكون أقل أو تساوي صفراً وأكبر أو تساوي الصفر في حال كون إشارة القيد اكبر أو يساوي وعكس ذلك ننتقل إلى المرحلة الثانية.

الخطوة 9: نختار القيد ذا القيمة غير الصفرية الأعلى الناتجة من الخطوة 7 في حال كون إشارة القيد أصغر أو يساوي أما في حالة كون إشارة القيد أكبر أو يساوي فنختار القيد ذا القيمة غير الصفرية الأقل ولنفترض أن القيمة هي (k).

الخطوة 10: حساب قيمة Q للقيد والتي تمثل معاملات الجانب الأيسر للقيد الأقل من أو تساوي $|k|$ في حال كون إشارة القيد أصغر أو يساوي وأقل من أو تساوي k في حالة كون إشارة القيد أكبر أو يساوي وكذلك الاختلاف بين معاملات الجانب الأيسر للقيد التي تحقق الشرط وسنفترض أن قيم Q هي:

$$Q = (a_{11}, a_{12} - a_{11})$$

الخطوة 11: في حال عدم وجود قيم لـ Q فإن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل

الخطوة 12: حساب قيم $\overline{Q}$ والتي تمثل معاملات دالة الهدف بحيث أن:

إشارة القيد أصغر أو يساوي $\overline{Q}=(c_1,c_2-c_1)$

إشارة القيد أكبر أو يساوي $\overline{Q}=(-c_1,c_1-c_2)$

الخطوة 13: اختبار قيم $\overline{Q}$ الأكبر من الصفر والتي تكون اصغر أو تساوي $\overline{Z}$ في حالة التعظيم ومن ثم اختيار القيمة الأعلى منها أما في حالة التقليل فيتم اختيار قيم $\overline{Q}$ الأصغر من الصفر والتي تكون أكبر أو تساوي $\overline{Z}$ وعكس ذلك فإن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل.

الخطوة 14: بافتراض أن قيمة $\overline{Q}$ المختارة في الخطوة 13 هي (c_2-c_1) فإن هذا يعني أن ننتقل إلى مرحلة لاحقة تمثل زيادة قيمة المتغير x_2 ونقصان قيمة المتغير x_1 وحدة واحدة مع ثبات قيم المتغيرات الأخرى.

الخطوة 15: يعاد حساب الخطوات السابقة ابتداءاً من الخطوة 4.

الخطوة 16: المرحلة الثانية: تتمثل بإعطاء x قيمة تمثل أكبر عدد صحيح أصغر من القيمة غير الصحيحة لـ x مع إعطاء بقية المتغيرات قيماً تتمثل بأصغر عدد صحيح أكبر من القيم غير الصحيحة لها ويعاد حساب الخطوات السابقة.

الخطوة 17: في حال كون المرحلة الأولى والثانية لا تمثل الحل الأمثل فيتم إعطاء قيم لـ x والمتغيرات تتمثل بأكبر عدد صحيح أقل من قيمها غير الصحيحة.

ويعاد حساب الخطوات السابقة.

الخطوة 18: المرحلة الثالثة : تتمثل بإعطاء $x_i, i=1,2,......,n$ أصفاراً ماعدا $i=1$, ومن ثم إعطاء x_i ما عدا $i=2$ وهكذا نستمر. ويتم حساب قيم أخرى لـx بتقسيم قيمة Z في الحل الأمثل للمسألة على معامل x الموجودة في دالة الهدف.

الخطوة 19: حساب قيمة Z_i للمرحلة الثالثة بتعويض القيم المختارة في الخطوة 18 بدالة الهدف.

الخطوة 20: حساب $\overline{Z}=Z-Z_i$ بحيث قيمة $\overline{Z}$ يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر في حالة التعظيم وأقل أو تساوي الصفر في حالة التقليل وعكس ذلك يعد الحل الذي حصلنا عليه في المرحلة الأخيرة الحل الأمثل.

الخطوة 21: بعد حساب $\overline{Z}$ نختبر تحقق القيود المؤثرة في الأنموذج من خلال ضرب معاملات الجانب الأيسر للقيود في الزيادة أو النقصان لقيم المتغيرات الناتجة من الخطوة 18.

الخطوة 22: في حالة كون إشارة القيد أصغر أو يساوي فإن القيم المحسوبة في الخطوة 21 يجب أن تكون أقل أو تساوي صفراً وأكبر أو تساوي الصفر في حال كون إشارة القيد اكبر أو يساوي, إذا تحققت القيود نقارن Z_i مع قيمة Z في الخطوة الأخيرة فإذا كان $Z_i \prec Z$ في حالة التعظيم فان قيم Z_i لا يمثل الحل الأمثل و آما في حالة التقليل يكون $Z_i \prec Z$ فان اقل قيمة لـ Z_i يمثل الحل الأمثل.

في هذه الخوارزمية من الخطوات (18)-(22) يتم الحصول على حل أمثل شامل دائماً في حين أن الخوارزمية *الزبيدي* يمكن الحصول على حل امثل محلي أو شامل.

6- أمثلة توضيحية:

تم تطبيق الطرائق المقترحة الجديدة على العديد من الأمثلة من اجل بيان كفاءتها. وفي هذه الفقرة سوف نستعرض بعض هذه الأمثلة للتوضيح:

مثال (1): حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة التالية :

$$\begin{aligned} &Max\,Z = 5x_1 + 8x_2 \\ &s.t \quad x_1 + x_2 \le 6 \\ &\qquad 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &\qquad x_1 \;,\; x_2 \ge 0 \quad and \text{ integers} \end{aligned}$$

الحل:

الطريقة الفردية Simplex Method

$$\begin{aligned} &Min U = -5x_1 - 8x_2 \\ &s.t \quad x_1 + x_2 + \delta_1 = 6 \\ &\qquad 5x_1 + 9x_2 + \delta_2 = 45 \\ &\qquad x_1, x_2, \delta_1, \delta_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الجدول (1-1)

Basic	b_i	x_1	x_2	δ_1	δ_2
x_1	9/4	1	0	9/4	-1/4
x_2	15/4	0	1	-5/4	1/4
$-U$	165/7	0	0	5/4	3/4

الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية دون الأخذ بعين الاعتبار قيد العدد الصحيح هو:

$$x_1 = 9/4 \;,\quad x_2 = 15/4 \quad,\quad Z = 41\frac{1}{4}$$

استخدام طريقة الأولى للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة

من الجدول (1-1) نحصل على:

$$\begin{aligned} &-Z - \frac{5}{4}\delta_1 - \frac{3}{4}\delta_2 = -41\frac{1}{4} \\ &x_1 + \frac{9}{4}\delta_1 - \frac{1}{4}\delta_2 = \frac{9}{4} \\ &x_2 - \frac{5}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 = \frac{15}{4} \\ &\qquad x_1, x_2, \delta_1, \delta_2 \ge 0 \end{aligned}$$

القاطع الأول

$$-Z - 2\delta_1 - \delta_2 + 42 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\delta_1 - \frac{1}{4}\delta_2$$

القاطع الثاني $$x_1+2\delta_1-\delta_2-2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\delta_1-\frac{3}{4}\delta_2$$

القاطع الثالث $$x_2-2\delta_1-3=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2$$

القواطع

الأول=الثالث $$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2\le 0$$

الثاني $$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\delta_1-\frac{3}{4}\delta_2\le 0$$

اختبار القاطع الأكفأ من ضمن القواطع المستخرجة من المسألة :

القاطع الأول $$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2+\delta_3=0 \quad ,\delta_3\ge 0$$

القاطع الثاني $$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\delta_1-\frac{3}{4}\delta_2+\delta_4=0 \quad ,\delta_4\ge 0$$

من المسألة الأصلية نستخرج قيم δ_1,δ_2 بالشكل الآتي:

$$\delta_1=6-x_1-x_2 \qquad \ldots(6)$$
$$\delta_2=45-5x_1-9x_2 \qquad \ldots(7)$$

نعوض المعادلات (6) و (7) في القواطع الأول والثاني لإيجاد القواطع الأساسية في المسألة والتي هي بدلالة المتغيرات في المسألة

بعد التعويض نحصل على:−

$$2x_1+3x_2\le 15 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_1$$
$$4x_1+7x_2\le 35 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_2$$

نختبر القاطع الأكفأ وذلك بتعويض مقدار الزيادة أو النقصان في قيم x_1,x_2 في القواطع وعلى النحو الآتي:

$$(-\frac{1}{4})2+(-\frac{3}{4})3=-2\frac{3}{4}$$
$$(-\frac{1}{4})4+(-\frac{3}{4})7=-6\frac{1}{4}$$

بما أن القاطع الأكفأ هو القاطع الأول، لذلك نستخدم القاطع الأول لحل المسألة

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2\le 0$$
$$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2+\delta_3=0 \quad ,\delta_3\ge 0$$
$$-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{4}\delta_2+\delta_3=-\frac{3}{4}$$

الجدول (1-2) $\Downarrow$

Basic	b_i	x_1	x_2	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	9/4	1	0	9/4	-1/4	0
x_2	15/4	0	1	-5/4	1/4	0
$-U$	165/4	0	0	5/4	3/4	0
δ_3	-3/4	0	0	-3/4	-1/4	1

$\Leftarrow$

الجدول (1-3)

Basic	b_i	x_1	x_2	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	0	1	0	0	-1	3
x_2	5	0	1	0	2/3	-5/3
$-U$	40	0	1	0	-1/3	-5/3
δ_1	1	0	0	1	1/3	-4/3

إذا الجواب $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\quad Z = 40$

استخدام طريقة ثانية للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة

الجدول (1-1) يمثل الحل الأمثل للمسالة دون الآخذ بعين الاعتبار قيد العدد الصحيح وهو

$$x_1 = 2\frac{1}{4} \quad ,x_2 = 3\frac{3}{4} \quad ,Z = 41\frac{1}{4}$$

قيم أسعار الظل هي $\delta_1 = 1\frac{1}{4}\ ,\ \delta_2 = \frac{3}{4}$ وهذا يعني أن القيدين يؤثران في الأنموذج.

المرحلة الأولى:

نختار المتغير x_2 لأنه ذو أعلى كسر أي أن

$$x_1 = 2\ ,\ x_2 = 4\ ,Z_1 = 42$$

$$\overline{Z} = Z - Z_1 = 41\frac{1}{4} - 42 = -\frac{3}{4}$$

بما أن القيمة سالبة ننتقل مباشرة إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

$$x_1 = 3\ ,\ x_2 = 3\ ,Z_2 = 39$$

$$\overline{Z} = Z - Z_2 = 41\frac{1}{4} - 39 = 2\frac{1}{4}$$

نختبر تحقق القيدين الأول والثاني وعلى النحو الآتي:

$$1)\ (\frac{3}{4})1 - (\frac{3}{4})1 = 0$$

$$2)\ (\frac{3}{4})5 - (\frac{3}{4})9 = -3$$

بما أن القيم (0,-3) اصغر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيود ومن القيم (0,-3) يتم اختبار القيد الثاني لحساب قيم Q_2 : $Q_2 = ...\,...$

الحل $x_1 = 3 \;\; , \;\; x_2 = 3 \;\; , \;\; Z = 39$

المرحلة الثالثة:

$$x_1 = 0 \; , \; x_2 = 5 \; , Z_3 = 40$$
$$\overline{Z} = Z - Z_3 = 41\frac{1}{4} - 40 = 1\frac{1}{4}$$

نختبر تحقق القيود:

$$1) \; -1(\frac{9}{4}) + 1(\frac{5}{4}) = -1$$
$$2) \; -5(\frac{9}{4}) + 9(\frac{5}{4}) = 0$$

بما أن القيم اقل أو تساوي صفر هذا يعني تحقق القيود

$$Q_1 = (a_{11}, a_{12} - a_{11}, a_{11} - a_{12})$$
$$\overline{Q_1} = ...\,.........$$

المرحلة الرابعة:

$$x_1 = 8 \; , \; x_2 = 0 \; , Z_4 = 40$$
$$\overline{Z} = Z - Z_4 = 41\frac{1}{4} - 40 = 1\frac{1}{4}$$

نختبر تحقق القيود:

$$1) \; 1(\frac{23}{4}) - 1(\frac{15}{4}) = 2$$
$$2) \; 5(\frac{23}{4}) - 9(\frac{15}{4}) = -\frac{30}{4}$$

بما إن ليست جميع القيم اقل أو تساوي صفر هذا يعني لا تحقق القيود

إذن النقطة لا تمثل حل ممكن للمسالة . إذا الحل الأمثل $x_1 = 0 \;\; , \;\; x_2 = 5 \;\; , \;\; Z = 40$

المثال (2): حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة التالية:

$$\begin{aligned} &MinZ = 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ &s.t \qquad -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \\ &\qquad\quad\; 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10 \\ &\qquad\quad\; x_1 \;\; , \;\; x_2 \;\; , \;\; x_3 \;\; \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

الطريقة الفردية Simplex Method

الجدول (2-1)

Basic	b_i	x_1	x_2	x_3	δ_1	δ_2
x_3	6/7	-5/7	0	1	2/7	-1/7
x_2	38/7	8/7	1	0	1/7	3/7
Z	132/7	23/7	0	0	9/7	6/7

الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية دون الأخذ بعين الاعتبار قيد العدد الصحيح هو:

$$x_3 = 6/7 \quad , \quad x_2 = 38/7 \quad , \quad Z = -132/7$$

استخدام طريقة الأولى للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة

من الجدول $(2-1)$ نحصل على :

$$Z + \frac{9}{7}\delta_1 + \frac{6}{7}\delta_2 + \frac{23}{7}x_1 = \frac{132}{7}$$

$$x_2 + \frac{1}{7}\delta_1 + \frac{3}{7}\delta_2 + \frac{8}{7}x_1 = \frac{38}{7}$$

$$x_3 + \frac{2}{7}\delta_1 - \frac{1}{7}\delta_2 - \frac{5}{7}x_1 = \frac{6}{7}$$

$$x_1, x_2, x_3, \delta_1, \delta_2 \geq 0$$

القاطع الأول $$Z + 3x_1 + \delta_1 - 18 = \frac{6}{7} - \frac{2}{7}x_1 - \frac{2}{7}\delta_1 - \frac{6}{7}\delta_2 \leq 0$$

القاطع الثاني $$x_2 + x_1 - 5 = \frac{3}{7} - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 \leq 0$$

القاطع الثالث $$x_3 - x_1 - \delta_2 = \frac{6}{7} - \frac{2}{7}x_1 - \frac{2}{7}\delta_1 - \frac{6}{7}\delta_2 \leq 0$$

القواطع

الأول=الثالث $$\frac{6}{7} - \frac{2}{7}x_1 - \frac{2}{7}\delta_1 - \frac{6}{7}\delta_2 \leq 0$$

الثاني $$\frac{3}{7} - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 \leq 0$$

اختبار القاطع الأكفأ من ضمن القواطع المستخرجة من المسألة:

القاطع الأول $$\frac{6}{7} - \frac{2}{7}x_1 - \frac{2}{7}\delta_1 - \frac{6}{7}\delta_2 + \delta_3 = 0 \quad , \delta_3 \geq 0$$

القاطع الثاني $$\frac{3}{7} - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 + \delta_4 = 0 \quad , \delta_4 \geq 0$$

من المسألة الأصلية نستخرج قيم δ_1, δ_2 بالشكل الآتي :

$$\delta_1 = 8 + x_1 - x_2 - 3x \qquad \ldots(8)$$

$$\delta_2 = 10 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad \ldots(9)$$

نعوض المعادلات $(8),(9)$ في القواطع الأولى والثانية لإيجاد القواطع الأساسية في المسألة والتي هي بدلالة المتغيرات في المسألة

$$2x_1 + 2x_2 \le 10 \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots c_1$$
$$x_1 + x_2 \le -5 \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots c_2$$

بعد التعويض نحصل على :-

لإيجاد القاطع الأكفأ نعوض مقدار النقصان في قيم x_1, x_2, x_3 في القواطع

$$2(0) + 2(-\frac{3}{7}) + 0 = -\frac{6}{7}$$
$$1(0) + 1(-\frac{3}{7}) + 0 = -\frac{3}{7}$$

إذا القاطع الأكفأ هو القاطع الثاني, إذن نحل السؤال باستخدام القاطع الثاني

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 \le 0$$
$$\frac{3}{7} - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 + \delta_3 = 0 \;, \delta_3 \ge 0$$
$$-\frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}\delta_1 - \frac{3}{7}\delta_2 + \delta_3 = -\frac{3}{7}$$

الجدول (2-2)

Basic	b_i	x_1	x_2	x_3	δ_1	δ_2	δ_3
x_3	6/7	-5/7	0	1	2/7	-1/7	0
x_2	38/7	8/7	1	0	1/7	3/7	0
Z	132/7	23/7	1	0	9/7	6/7	0
δ_3	3/7	-1/7	0	0	-1/7	-3/7	1

الجدول (2-3)

Basic	b_i	x_1	x_2	x_3	δ_1	δ_2	δ_3
x_3	1	-3/5	0	1	2/5	0	-5
x_2	5	4/5	1	0	-1/5	0	3/5
Z	18	3	0	0	1	0	2
δ_2	1	1/3	0	0	1/3	1	-7/3

إذا الجواب $x_1 = 0,\; x_2 = 5,\; x_3 = 1 \quad , \; Z = -18$

استخدام الطريقة الثانية للبرمجة الصحيحة المختلطة الجديدة

الجدول (2-1) يمثل الحل الأمثل للمسالة دون الآخذ بعين الاعتبار قيد العدد الصحيح وهو

$$x_1 = 0 \;\; , x_2 = \frac{38}{7} \;\; , x_3 = \frac{6}{7} \;\; , Z = \frac{-132}{7}$$

قيم أسعار الظل هي $\delta_1 = \frac{11}{7} \; , \; \delta_2 = \frac{5}{7}$ وهذا يعني أن القيدين يؤثران في الأنموذج.

المرحلة الأولى:

نختار المتغير x_3 لأنه ذو أعلى كسر أي أن

$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 5\ , x_3 = 1, Z_1 = -18$

$\overline{Z} = Z - Z_1 = -18\frac{6}{7} - (-18) = -\frac{6}{7}$

نختبر تحقق القيود

$-(0) - (\frac{3}{7}) + 3(\frac{1}{7}) = 0$

$3(0) - 2(\frac{3}{7}) - (\frac{1}{7}) = -1$

بما أن القيم (0,-1) اصغر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيود ومن القيم (0,-1) يتم اختبار القيد الثاني لحساب قيم Q_2 :

$Q_2 = (a_{21} - a_{22}) = 1$

$\overline{Q_2} = (c_1 - c_2) = 5$

الحل $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 5\ , x_3 = 1\ ,\ Z = -18$

المرحلة الثانية:

$x_1 = 9\ ,\ x_2 = 0\ , x_3 = 0\ , Z_2 = 18$

$\overline{Z} = Z - Z_2 = -18\frac{6}{7} - 18 = -36\frac{6}{7}$

نختبر تحقق القيدين الأول والثاني وعلى النحو الآتي:

1) $-(9) + (\frac{-38}{7}) + 3(\frac{-6}{7}) = \frac{-119}{7}$

2) $3(\frac{3}{4}) + 2(\frac{-38}{7}) - \left(\frac{-6}{7}\right) = \frac{119}{7}$

إذن لا تحقق القيود

المرحلة الثالثة:

$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 6\ , x_3 = 0\ , Z_3 = -18$

$\overline{Z} = Z - Z_2 = -18\frac{6}{7} - (-18) = -\frac{6}{7}$

نختبر تحقق القيود

1) $-(0) + (\frac{4}{7}) + 3(\frac{-6}{7}) = -2$

2) $3(0) + 2(\frac{4}{7}) - \left(\frac{-6}{7}\right) = 2$

إذن لا تحقق القيود

المرحلة الرابعة:

$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ , x_3 = 6\ , Z_4 = -18$

$\overline{Z} = Z - Z_4 = -18\frac{6}{7} - (-18) = -\frac{6}{7}$

نختبر تحقق القيود:

$$1)\ -(0)+(\frac{-38}{7})+3(\frac{36}{7})=10$$

$$2)\ 3(0)+2(\frac{-38}{7})-\left(\frac{36}{7}\right)=\frac{-112}{7}$$

إذن لا تحقق القيود

إذن الحل الأمثل هو $x_1=0\ ,\ x_2=5\ \ ,x_3=1\ \ ,Z_3=-18$

7- النتائج العددية:

بالاعتماد على خوارزمية قطع المستوي وخوارزمية *الزبيدي* خوارزميتين NEW 1, NEW2 الجديدتين ندرج فيما يأتي نتائج عدد من الدوال اللاخطية التي تم حلها بالخوارزميات المذكورة آنفاً وهذه الخوارزميات جميعا تعتمد على الحل الأمثل.

	PROBLEM	CUTTING PLANES	ALI H.	NEW 1	NEW 2
1.	$Max\,Z=5x_1+2x_2$ $s.t\quad 5x_1+4x_2\le 20$ $x_1\ ,\ x_2\ \ge 0$	20	20	20	20
2.	$MaxZ=5x_1+8x_2$ $s.t\quad x_1+x_2\le 6$ $5x_1+9x_2\le 45$ $x_1\ ,\ x_2\ \ge 0$	40	39	40	40
3.	$Max\,Z=3x_1+4x_2$ $s.t\quad 2x_1+x_2\le 6$ $2x_1+3x_2\le 9$ $x_1\ ,\ x_2\ \ge 0$	12	10	12	12
4.	$MaxZ=5x_1+4x_2$ $s.t\quad x_1+x_2\le 5$ $10x_1+6x_2\le 45$ $x_1\ ,\ x_2\ \ge 0$	23	23	23	23
5.	$MinZ=2x_1-3x_2-3x_3$ $s.t\quad -x_1+x_2+3x_3\le 8$ $3x_1+2x_2-3x_3\le 18$ $x_1\ ,x_2,\ x_3\ \ge 0$	-18	-18	-18	-18
6.	$MaxZ=4x_1+5x_2+7x_3$ $s.t\quad 3x_1+2x_2+3x_3\le 20$ $3x_1+5x_2+7x_3\le 30$ $2x_1+3x_2+4x_3\le 25$ $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ \ge 0$	33	33	33	33

المصادر

[1] الزبيدي, د.علي خليل, (2000) " الطريقة المقترحة لحل مسائل البرمجة الخطية ", المؤتمر العلمي الثالث عشر للجمعية العراقية للعلوم الإحصائية, مجلة العلوم الإحصائية الصفحة (334-348).

[2] احمد, د. خالد حسين, (2000) " بحوث العمليات أسس ومبادئ ", مطبعة وزارة التعليم العالي والبحث العلمي, الطبعة الأولى.

[3] صالح, د. بشير محمد, صالح, محمد واجد محمد, (2005) " تحسينات الطريقة الفردية المتوازنة ", مجلة الرافدين لعلوم الحاسبات والرياضيات, المجلد (2), العدد (2), الصفحة (67-72).

[4] فتوحي, نوار نجم عبد الله, (2005) " طريقة تهجينية لقطع المستويات مع طريقة التفرعات في مسائل البرمجة الصحيحة " رسالة ماجستير, غير منشورة.

[5] ADAM, N. LETCHFORD AND ANDREA LODI, (2001) "PRIMAL CUTTING PLANE ALGORITHM REVISITED " LANCASTER LA 14 YW, V, K, PP.

[6] R. S. GRAFINKEL AND G. L. NEMHAUSER, (2003) "INTEGER PROGRAMMING", MATH3902 OPERATION RESEARCH II, CHAPTER 1, PP. (1-5).

[7] RALPH, E. GOMORY, (1973) "AN ALL-INTEGER PROGRAMMING ALGORITHM", RAND REPORT, R. M. 25797, NEW YORK CHAPTER 3, PP. (46-S66).

[8] Salkim, Harrey M., (1975) "Integer programming Addision – wesley publishing Co., Inc., Reading, Mass chapter 2, pp. 34.