w-Wiener polynomials of Width Distance for Cartesian Product K2 with Cycle and Wheel

Ali Aziz Ali **Asma Salah Aziz**
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 14/04/2008 **Accepted on: 11/06/2008**

ABSTRACT

The w-Wiener polynomials of the cartesian product of K_2 with a cycle C_t and with a wheel W_t are obtained in this paper , in which w does not exceed the connectivity of the product graph . The diameter and Wiener index with respect to the width distance -w for $K_2\times C_t$ and $K_2\times W_t$ are also obtained .

Keywords: w-Wiener polynomials, cycle, wheel, width distance.

متعددات حدود وينر–w للمسافة العرضية للجداء الديكارتي لـ K_2 مع دارة وعجلة

علي عزيز علي **أسماء صلاح عزيز**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:2008/4/14 **تاريخ قبول البحث:2008/6/11**

الملخص

يتضمن هذا البحث ايجاد متعددة حدود وينر-w نسبة للمسافة العرضية–w للجداء الديكارتي للبيان K_2 مع دارة C_t ومع عجلةW_t حيث ان w لايزيد على عامل الاتصال لبيان الجداء .كما تضمن البحث تحديد القطر وايجاد دليل وينر نسبة للمسافة العرضية– w لكل من البيانين $K_2\times C_t$ و $K_2\times W_t$.

الكلمات المفتاحية: متعددات حدود وينر–w ، دارة، عجلة، المسافة العرضي.

1. المقدمة

لأجل التعرف على المفاهيم والرموز التي تخص نظرية البيان إطلع على المصادر [4,5,6] ولاجل معرفة المسافة العرضية والمفاهيم المتعلقة بها اطلع على المصادر [1,2,3,7] .

تعرف متعددة حدود وينر –w نسبة لدالة المذسافة العرضية d_w [6] لبيان $G=(V,E)$ كالآتي:

$$W_w(G;x)=\sum_{u,v\in V} x^{d_w(u,v)} \qquad ..(1.1)$$

فإذا رمزنا بـ $C_w(G,k)$ لعدد الازواج غير المرتبة للرؤوس التي المسافة العرضية -w بينها تساوي k، فإن

$$W_w(G;x)=\sum_{k\ge 2}^{\delta_w} C_w(G,k)\,x^k \qquad ...(1.2)$$

اذ أن δ_w هوالقطر للبيان G بالنسبة للمسافة العرضية -w . من الواضح ان دليل وينر للبيان G نسبة للمسافة العرضية -w هو

$$W_w(G)=\frac{d}{dx}W_w(G;x)\Big|_{x=1}=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w}k\,C_w(G,k) \qquad ...(1.3)$$

ليكن v رأسا في بيان متصل G ولنفرض ان $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس G التي كل منها تبعد بمسافة عرضية -w تساوي kعن الرأس v إذ أن $k \geq 2$ و $w \geq 2$.

واضح أن

$$\sum_{v\in V}C_w(v,G,k)=2C_w(G,k) \qquad ...(1.4)$$

لكل $2 \leq k \leq \delta_w$

وتعرف متعددة حدود وينر -w بالنسبة للرأس v بـ [3]

$$W_w(v,G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w}C_w(v,G,k)\,x^k \qquad ...(1.5)$$

من (1.2),(1.4)،(1.5) نستنتج أن

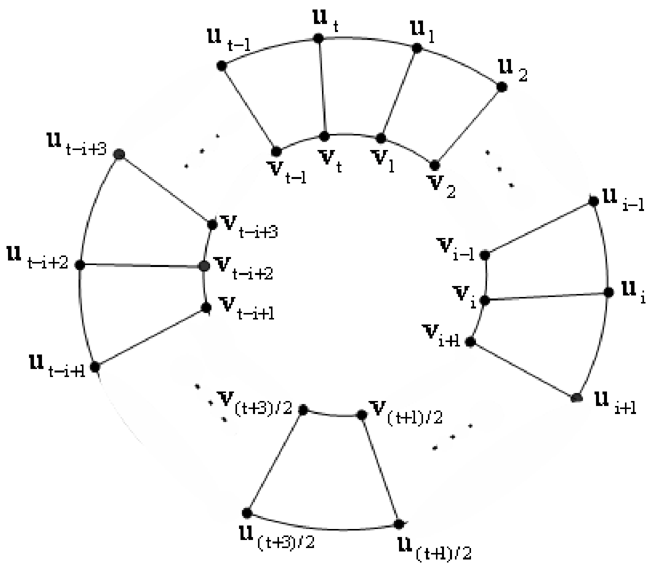
$$\sum_{v\in V}W_w(v,G;x)=2W_w(G;x) \qquad ...(1.6)$$

يقال لبيان متصل G انه **منتظم نسبة للمسافة العرضية -w** [3] اذا كان لكل k، $C_w(v,G,k)$ له القيمة نفسها لكل رأس v في G. أي ان عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية -w قيمتها k عن الرأس v هو نفسه بالنسبة لكل رأسv في G.

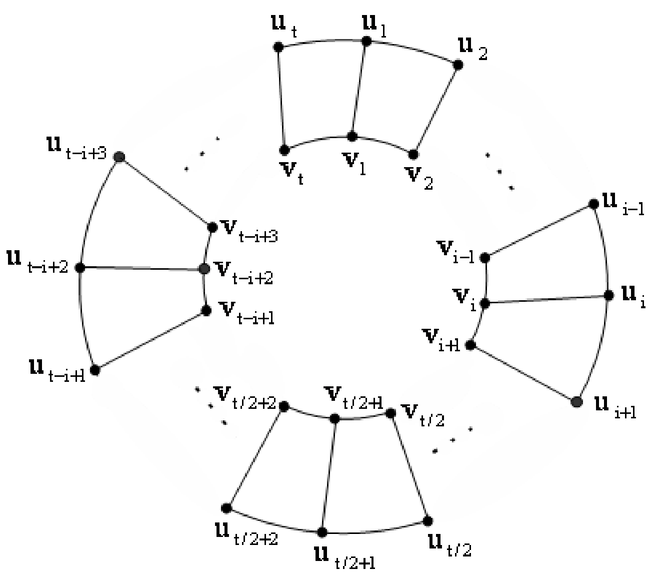
في البحث[2] اوجدنا متعددة حدود وينر ودليل وينر نسبة للمسافة العرضية-w للجداءات الديكارتية $K_2\times S_t$, K_2xK_p $K_2xK_{r,s}$, K_2xP_r. وفي هذا البحث نجد متعددة حدود وينر ودليل وينر نسبة للمسافة العرضية−w لكل من الجداءين K_2xC_t وK_2xW_t.

2. الجداء الديكارتي لدارة C_t و K_2 :

لتكن C_t دارة رؤوسها بالترتيب هي $u_1,u_2,\ ...\ ,u_t$ وأن C'_t نسخة منها ورؤوسها بالترتيب نفسه $v_1,v_2,...,v_t$ ، فان $K_2\times C_t$ والذي سوف نرمز له اختصارا بـ R_t ، يتكون من إتحاد C_t مع C'_t ومجموعة الحافات $\{u_iv_i : i=1,2,...,t\}$ كما هو مبين في الشكل 2.1. من الواضح أن عامل الاتصال للبيان R_t هو 3 وبذلك فان w =2,3 . كما نلاحظ أن R_t منتظم بالنسبة للمسافة العرضية−w للرؤوس، أي أن متعددة الحدود بالنسبة للمسافة العرضية−w للرؤوس هي نفسها لكل رأس في R_t .



الشكل 2.1 –البيان R_t ، t عدد فردي



الشكل 2.2 – البيان R_t ، t عدد زوجي

عبارة 2.1: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان R_t للرأس V_1 هي

$$W_2(v_1,R_t;x)=\begin{cases}2x^2+x^3+4\sum_{i=3}^{(t+1)/2}x^i+2x^{(t+1)/2}, & \text{if } t \text{ is odd}, t\ge 5\\ 2x^2+x^3+4\sum_{i=3}^{t/2+1}x^i+x^{t/2}-x^{t/2+1}, & \text{if } t \text{ is even}, t\ge 4\end{cases}$$

البرهان:

بالنسبة لقيم t لدينا حالتان

(أ) إذا كان t عددا فرديا و$t\ge 5$ ، نلاحظ من الشكل 2.1 أن لكل $2\le i\le (t-1)/2$

$$d_2(v_1,v_i)=d_2(v_1,v_{t-i+2})=\max\{i-1,i+1\}=i+1 \qquad ...(2.1)$$

$$d_2(v_1,v_{\frac{t+1}{2}})=d_2(v_1,v_{\frac{t+3}{2}})=\max\left\{\frac{t-1}{2},\frac{t+1}{2}\right\}=\frac{t+1}{2} \qquad ...(2.2)$$

وعليه، فان

$$\sum_{i=2}^{t}x^{d_2(v_1,v_i)}=2\sum_{i=2}^{(t-1)/2}x^{i+1}+2x^{(t+1)/2}=2\sum_{i=3}^{(t+1)/2}x^i+2x^{(t+1)/2} \qquad ...(2.3)$$

ولكل $2\le i\le (t+1)/2$ فان

$$d_2(v_1,u_i)=d_2(v_1,u_{t-i+2})=i \qquad ...(2.4)$$

فضلا عن أن

$$d_2(v_1,u_1)=3$$

وهكذا نحصل على

$$\sum_{i=1}^{t}x^{d_2(v_1,u_i)}=x^3+2\sum_{i=2}^{(t+1)/2}x^i \qquad ...(2.5)$$

وبجمع العلاقتين (2.5) و(2.4) نحصل على

$$W_2(v_1,R_t;x)=2x^2+x^3+4\sum_{i=3}^{(t+1)/2}x^i+2x^{(t+1)/2} \qquad ...(2.6)$$

حيث t عدد فردي و $t\ge 5$

(ب) إذا كان t عددا زوجيا و $t\ge 4$، فاننا نلاحظ من الشكل 2.2 أن لكل $2\le i\le t/2$

$$d_2(v_1,v_i)=d_2(v_1,v_{t-i+2})=\max\{i-1,i+1\}=i+1 \qquad ...(2.7)$$

ومن الواضح أن

$$d_2(v_1, v_{t/2+1}) = t/2$$

وبالاعتماد على ما تقدم نحصل على متعددة الحدود الاتية:

$$\sum_{i=2}^{t} x^{d_2(v_1,v_i)} = 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{i+1} + x^{t/2} = 2\sum_{i=3}^{t/2+1} x^{i} + x^{t/2} \quad ...(2.8)$$

ونلاحظ من الشكل أيضا أن لكل $2 \le i \le t/2$

$$d_2(v_1,u_i) = d_2(v_1,u_{t-i+2}) = i \quad ...(2.9)$$

ونجد أن

$$d_2(v_1,u_{t/2+1}) = t/2+1$$

وكما ذكرنا في حالة (أ) فان

$$d_2(v_1,u_1) = 3$$

وهكذا نحصل على

$$\sum_{i=1}^{t} x^{d_2(v_1,u_i)} = x^3 + 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{i} + x^{t/2+1} \quad ...(2.10)$$

وبجمع العلاقتين (2.8) و(2.10) نحصل على

$$W_2(v_1,R_t;x) = 2x^2 + x^3 + 4\sum_{i=3}^{t/2+1} x^{i} + x^{t/2} - x^{t/2+1} \quad ...(2.11)$$

إذ أن t عدد زوجي و $t \ge 4$.

وبهذا يتم برهان العبارة. #

وبما أن R_t منتظم بالنسبة للمسافة العرضية-w، w =2,3، فان

$$W_w(R_t;x) = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(R_t)} W_w(v,R_t;x) = \frac{1}{2}(2t)W_w(v_1,R_t;x)$$

$$= t\,W_w(v_1,R_t;x) \quad ...(2.12)$$

ومن العبارة2.1 والعلاقة (2.12) نحصل على المبرهنة الاتية:

مبرهنة 2.2: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان R_t هي:

$$W_2(R_t;x) = \begin{cases} 2tx^2 + tx^3 + 4t\sum_{i=3}^{(t+1)/2} x^{i} + 2tx^{(t+1)/2}, & \text{if } t \text{ is odd}, t \ge 5 \\ 2tx^2 + tx^3 + 4t\sum_{i=3}^{t/2+1} x^{i} + tx^{t/2} - tx^{t/2+1}, & \text{if } t \text{ is even}, t \ge 4 \end{cases}$$

#

ملاحظة: إذا كان $t=3$ فان متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان R_t هي

$$W_2(R_3;x)=3(4x^2+x^3)$$

نتيجة 2.3: دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان R_t هو

$$W_2(R_t)=\begin{cases} t(t^2+6t-5)/2\ , & \text{if } t \text{ is odd}\ , t\ge 5\\ t(t^2+6t-4)/2\ , & \text{if } t \text{ is even}\ , t\ge 4\end{cases}$$

#

نتيجة 2.4: معدل المسافة العرضية−2 للبيان R_t هو

$$\mu_2(R_t)=\begin{cases} (t^2+6t-5)/(4t-2)\ , & \text{if } t \text{ is odd}\ , t\ge 5\\ (t^2+6t-4)/(4t-2)\ , & \text{if } t \text{ is even}\ , t\ge 4\end{cases}$$

#

والان نجد متعددة الحدود للمسافة العرضية−3 للبيان R_t

مبرهنة 2.5: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−3 للبيان R_t هي:

$$W_3(R_t;x)=\begin{cases} tx^3+tx^{t/2+2}+2tx^t-tx^{t/2+1}+4t\sum\limits_{k=t/2+1}^{t-1}x^k, & \text{if } t \text{ is even}, t\ge 4\\ tx^3+2tx^{(t+3)/2}+2tx^t+4t\sum\limits_{k=(t+3)/2}^{t-1}x^k\ , & \text{if } t \text{ is odd}\ , t\ge 5\end{cases}$$

البرهان:

لدينا حالتان بالنسبة لقيم t فردية أو زوجية.

(أ) نفرض أن t عدد زوجي:

إذا كان $2\le i\le t/2$ فان

$$d_3(v_1,v_i)=\max\{i-1,i+1,t-i+1\}=t-i+1 \qquad ...(2.13)$$

كما أن

$$d_3(v_1,v_{t/2+1})=t/2+2$$

وفيما يتعلق بـ $v_{t/2+2}, v_{t/2+3}, \dots, v_{t-1}, v_t$ ومسافاتها العرضية−3 عن الرأس v_1 يمكن استنتاجها من العلاقة الاتية:

$$d_3(v_1,v_i)=d_3(v_1,v_{t-i+2})$$

لكل $2 \le i \le t/2$

وعليه نحصل على

$$\sum_{i=2}^{t} x^{d_3(v_1,v_i)} = 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{t-i+1} + x^{t/2+2} \qquad ...(2.14)$$

والآن نجد المسافة العرضية-3 بين الرأس v_1 وكل من الرؤوس $u_1, u_2, \ldots, u_t$ فإذا كان $2 \le i \le t/2+1$ ، فان

$$d_3(v_1,u_i) = \max\{i, i, t-i+2\} = t-i+2 \qquad ...(2.15)$$

وواضح أن

$$d_3(v_1,u_1) = 3 \qquad ...(2.16)$$

وأيضا لدينا، لكل $2 \le i \le t/2$

$$d_3(v_1,u_i) = d_3(v_1,u_{t-i+2}) \qquad ...(2.17)$$

ومن (2.15)، (2.16) و(2.17) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{t} x^{d_3(v_1,u_i)} = x^3 + 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{t-i+2} + x^{t/2+1} \qquad ...(2.18)$$

وبجمع العلاقتين (2.14) و(2.18) نحصل على:

$$W_3(v_1,R_t;x) = x^3 + 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{t-i+1} + 2\sum_{i=2}^{t/2} x^{t-i+2} + x^{t/2+2} + x^{t/2+1}$$
$$= x^3 + 4\sum_{i=2}^{t/2-1} x^{t-i+1} + 2x^t + x^{t/2+2} + 3x^{t/2+1}$$

وبتعويض $k = t-i+1$ وبتبسيط المقادير نحصل على

$$W_3(v_1,R_t;x) = x^3 + x^{t/2+2} + 2x^t - x^{t/2+1} + 4\sum_{k=t/2+1}^{t-1} x^k$$

حيث أن t زوجي، $t \ge 4$

وبالاعتماد على العلاقة (2.12) نحصل على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-3 للبيان R_t وكما هي معطاة في نص المبرهنة عندما يكون t عددا زوجيا، $t \ge 4$ ،.

(ب) نفرض أن t عدد فردي:

إذا كان $2 \le i \le (t-1)/2$ ، فاننا نلاحظ من الشكل 2.1 أن

$$d_3(v_1,v_i) = t-i+1 \qquad ...(2.19)$$

والمسافة العرضية-3 للرأسين $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ هي

$d_3(v_1, v_{(t+1)/2}) = d_3(v_1, v_{(t+3)/2}) = (t+3)/2$ ...(2.20)

أما للرؤوس $v_t, v_{t-1}, \ldots, v_{(t+5)2}$ فنجد المسافة العرضية−3 من العلاقة

$d_3(v_1, v_i) = d_3(v_1, v_{t-i+2})\,,\quad 2 \le i \le (t-1)/2$ ...(2.21)

أما فيما يتعلق بالمسافة العرضية−3 للرأس v_1 مع الرؤوس $u_1, u_2, \ldots, u_t$ فنجد أن:

لكل $2 \le i \le (t+1)/2$

$d_3(v_1, u_i) = t - i + 2$ ...(2.22)

وفيما يتعلق بالرؤوس المتبقية $u_t, u_{t-1}, \ldots, u_{(t+3)/2}$ فنجد المسافة العرضية−3 باستخدام العلاقة

$d_3(v_1, u_i) = d_3(v_1, u_{t-i+2})$ ...(2.23)

فضلا عن ذلك فان

$d_3(v_1, u_1) = 3$ ...(2.24)

من (2.24)−(2.19) واستخدام الأسلوب الذي استخدم في حالة كون t عددا زوجيا، نحصل على

$$W_3(v_1, R_t; x) = x^3 + 2x^{(t+3)/2} + 2x^t + 4\sum_{k=(t+3)/2}^{t-1} x^k \quad ...(2.25)$$

إذ أن t فردي وأن $t \ge 5$.

وبما أن R_t منتظم بالنسبة للمسافة العرضية−3 فاننا نحصل على $W_3(R_t;x)$ بضرب الطرف الأيمن للمقدار في (2.25) في t فينتج متعددة الحدود المعطاة في نص المبرهنة عندما يكون t عددا فرديا، $t \ge 5$. وبهذا يتم البرهان.

#

ملاحظة: عندما t =3 فان متعددة حدود وينر للمسافة−3 لـ R_t هي

$W_3(R_3; x) = 15x^3$

نتيجة 2.6: دليل وينر للمسافة العرضية−3 للبيان R_t هو

$$W_3(R_t) = \begin{cases} t(3t^2 - 2t + 8)/2\,, & \text{if } t \text{ is even}\,,\ t \ge 4 \\ t(3t^2 - 2t + 9)/2\,, & \text{if } t \text{ is odd}\,,\ t \ge 5 \end{cases}$$

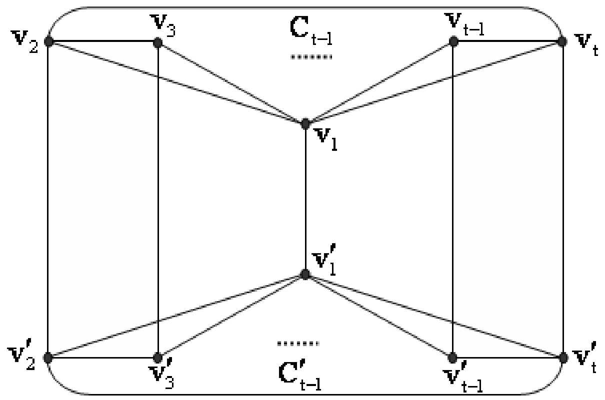
#

نتيجة 2.7: معدل المسافة العرضية−3 للبيان R_t هو

$$\mu_3(R_t) = \begin{cases} (3t^2 - 2t + 8)/2(2t-1)\,, & \text{if } t \text{ is even}\,, t \ge 4 \\ (3t^2 - 2t + 9)/2(2t-1)\,, & \text{if } t \text{ is odd}\,,\ t \ge 5 \end{cases}$$

3. الجداء الديكارتي لعجلة W_t و K_2

لتكن W_t عجلة مركزها الرأس v_1 ورؤوسها الأخرى بالترتيب هي $v_2, v_3, \dots, v_t$ ولتكن W'_t نسخة أخرى للعجلة W_t ورؤوسها $v'_1, v'_2, \dots, v'_t$ حيث أن v'_1 هو مركزها. البيان $K_2 \times W_t$ يتكون من إتحاد W_t مع W'_t ومع مجموعة الحافات $\{v_i v'_i : i = 1,2, \dots, t\}$ كما هو مبين في الشكل 3.1. ومن الواضح أن عامل الاتصال للبيان $K_2 \times W_t$ هو 4. لذلك لدينا $w = 2,3,4$. وسوف نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-w للبيان $K_2 \times W_t$ لكل من $w = 2,3,4$.



الشكل 3. 1 بيان $K_2 \times W_t$

مبرهنة 3.1: لأجل $t \geq 8$ ،

$$W_2(K_2 \times W_t; x) = 10(t-1)x^2 + (t^2 - 2t + 2)x^3 + (t^2 - 9t + 8)x^4$$

البرهان:

سوف نجد أولا المسافة العرضية-2 لكل رأسين في الدارة $C_{t-1} = W_t - v_1$. وكذلك لكل رأسين مختلفين في الدارة $C'_{t-1} = W'_t - v'_1$. ليكن v_i و v_j رأسين في C_{t-1} ، $i, j = 2,3, \dots, t$.

عندئذ نلاحظ ما يأتي:

(1) إذا كان v_i و v_j متجاورين فان

$$d_2(v_i, v_j) = 2$$

(2) إذا كان

$$d(v_i, v_j | C_{t-1}) = k \ , \ \forall \ k = 2,3$$

فان

$$d_2(v_i, v_j | K_2 \times W_t) = k$$

وعدد أزواج الرؤوس في (1)، ولكل k في (2) هو $(t-1)$ [لاحظ الشكل 3.1]

(3) وإذا كان

$$d(v_i, v_j | C_{t-1}) \geq 4$$

فان

$$d_2(v_i, v_j | K_2 \times W_t) = 4$$

لأنه في هذه الحالة توجد حاوية صغرى $C(v_i, v_j)$ تتكون من درب بطول 2 وهو (v_i, v_1, v_j) وآخر بطول 4 وهو $(v_i, v'_i, v'_1, v'_j, v_j)$ عدد أزواج الرؤوس $\{v_i, v_j\}$ في هذه الحالة هو

$$\frac{1}{2}(t-1)(t-2) - 3(t-1) = \frac{1}{2}(t-1)(t-8)$$

(4) من الواضح أن لكل $i = 2, 3, \ldots, t$

$$d_2(v_1, v_i) = 2$$

وأخيرا من (4)−(1) نستنتج أن

$$\sum_{u,v \in U} x^{d_2(u,v)} = (t-1)(3x^2 + x^3 + (t-8)x^4/2) \quad ..(3.1)$$

حيث أن $U = V(W_t)$

لاحظ أن (3.1) تصح أيضا لرؤوس W'_t، لذلك سوف تضاعف في حساب $W_2(K_2 \times W_t; x)$.

ولإيجاد المسافة العرضية−2 بين رأس في W_t ورأس في W'_t نلاحظ من الشكل 3.1 ما يأتي:

$(1')$ لكل $i = 1, 2, \ldots, t$

$$d_2(v_i, v'_i) = 3$$

$(2')$ لكل $j = 2, \ldots, t$

$$d_2(v_1, v'_j) = d_2(v'_1, v_j) = 2$$

$(3')$ إذا كان v'_i و v'_j متجاورين في C'_{t-1}، حيث $i, j \neq 1$، فان

$$d_2(v_i, v'_j) = d_2(v_j, v'_i) = 2$$

عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $2(t-1)$

$(4')$ إذا كان v'_i و v'_j غير متجاورين في C'_{t-1}، حيث $i \neq j \neq 1$، فان

$$d_2(v_i, v'_j) = 3$$

حيث أن الحاوية الصغرى $C(v_i,v'_j)$ تتكون من الدربين (v_i,v_1,v_j,v'_j) و (v_i,v'_i,v'_1,v'_j) . وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $(t-1)(t-4)$.

من $(1')-(4')$ نستنتج أن

$$\sum_{u\in U,v\in U'} x^{d_2(u,v)} = 4(t-1)x^2 + (t-2)^2 x^3 \qquad ...(3.2)$$

حيث $U' = V(W'_t)$

وأخيرا بجمع (3.2) مع ضعف (3.1) نحصل على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times W_t$ كما هي معطاة في نص المبرهنة.

#

ملاحظة: فيما يتعلق بقيم $4 \le t \le 7$ فان متعددات حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times W_t$ يمكن إيجادها مباشرة وهي:

$$W_2(K_2 \times W_4;x) = 24x^2 + 4x^3$$
$$W_2(K_2 \times W_5;x) = 36x^2 + 9x^3$$
$$W_2(K_2 \times W_6;x) = 50x^2 + 16x^3$$
$$W_2(K_2 \times W_7;x) = 60x^2 + 31x^3$$

نتيجة 3.2: دليل وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $K_2 \times W_t$ ، حيث $t \ge 8$ ، هو

$$W_2(K_2 \times W_t) = 7t^2 - 22t + 18$$

#

وفيما يتعلق بـ $w=3$ فان المبرهنة الآتية تعطينا متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-3 للبيان $K_2 \times W_t$.

مبرهنة 3.3:

(1) إذا كان t عددا فرديا و $t \ge 9$ ، فان

$$W_3(K_2 \times W_t;x) = tx^3 + (t-1)\left[2x^2 + 8x^3 + 4x^4 + x^{(t+1)/2} - x^{(t-1)/2} + 4\sum_{k=4}^{(t-1)/2} x^k\right]$$

(2) إذا كان t عددا زوجيا و $t \ge 10$ ، فان

$$W_3(K_2 \times W_t;x) = tx^3 + (t-1)\left[2x^2 + 8x^3 + 4x^4 + 2x^{t/2} + 4\sum_{k=4}^{t/2-1} x^k\right]$$

البرهان:

سوف نعالج حالتين بالنسبة لرؤوس $K_2 \times W_t$

(أ) ليكن $v_i, v_j \in U$ و $v'_i, v'_j \in U'$ عندئذ يكون لدينا الحالات الاتية:

(1) إذا كان $i, j \neq 1$، وأن v_i و v_j متجاوران، فان

$$d_3(v_i, v_j) = 3$$

لأن الحاوية الصغرى $C(v_i, v_j)$ تتكون من الدروب $v_i v_j$، (v_i, v_1, v_j) و (v_i, v'_i, v'_j, v_j). وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $(t-1)$.

(2) إذا كان $i, j \neq 1$، وأن $2 \leq d(v_i, v_j | C_{t-1}) \leq 4$، فان أصغر حاوية $C(v_i, v_j)$ تتكون من الدروب $P_1 = (v_i, v_1, v_j)$، $P_2 = (v_i, v'_i, v'_1, v'_j, v_j)$ وأقصر درب $v_i - v_j$ في الدارة C_{t-1}. إذا

$$d_3(v_i, v_j) = 4$$

ومن الواضح أن عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $3(t-1)$.

(3) إذا كان $i, j \neq 1$، وكان $d(v_i, v_j | C_{t-1}) > 4$، فان أصغر حاوية $C(v_i, v_j)$ تتكون من P_1، P_2 وأقصر درب $v_i - v_j$ في الدارة C_{t-1}. إذا

$$d_3(v_i, v_j) = d(v_i, v_j | C_{t-1}) = k$$

واضح أن عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $C(C_{t-1}, k)$ أي عدد أزواج الرؤوس في الدارة C_{t-1} والتي بمسافة k. وبالرجوع إلى المصدر [6] فان

$$C(C_{t-1}, k) = \begin{cases} t-1 \ , \ 5 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{t-2}{2} \right\rfloor \\ \dfrac{1}{2}(t-1) \ , \ k = \dfrac{t-1}{2} \ , \ t \text{ is odd} \end{cases}$$

(4) ومن الواضح أن

$$d_3(v_1, v_i) = 2 \ , \ 2 \leq i \leq t$$

وعدد أزواج الرؤوس لهذه هو $(t-1)$

وهكذا من (4)، (3)، (2) و(1) نحصل على

$$\sum_{u,v \in U} x^{d_3(u,v)} = \begin{cases} (t-1)(x^2 + x^3 + 2x^4 + [x^4 + x^5 + \ldots + x^{(t-3)/2} \\ \qquad + \dfrac{1}{2} x^{(t-1)/2}]), \text{ if } t \text{ is odd}, t \geq 9 \\ (t-1)(x^2 + x^3 + 2x^4 + [x^4 + x^5 + \ldots \\ \qquad + x^{t/2-1}]), \text{if } t \text{ is even }, t \geq 10 \end{cases} \qquad \ldots(3.3)$$

$$= \sum_{u,v \in U'} x^{d_3(u,v)}$$

لاحظ أنه في حالة t =9 يصبح القوس [ ] مكونا من $\frac{1}{2}x^4$ فقط.

(ب) ليكن $v_i \in U$ ، $v'_j \in U'$ عندئذ يكون لدينا

$(1')$ لكل $1 \le i \le t$

$$d_3(v_i, v'_i) = 3$$

وعدد أزواج الرؤوس هو t

$(2')$ لأي رأس v_i ، $2 \le i \le t$ ، مع أي رأس v'_j ، $2 \le j \le t$ ، إذا كان $d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \le 2$ فان

$$d_3(v_i, v'_j) = 3$$

وبما أن لكل v'_i يوجد رأسان على بعد 1 ورأسان على بعد 2 في الدارة C'_{t-1} عن v'_i عليه يوجد أربعة رؤوس تبعد بمسافة عرضية-3 قيمتها 3 عن الرأس v_i ، ولما كان $2 \le i \le t$ فان عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $4(t-1)$.

$(3')$ إذا كان $i, j \ne 1$ وكان $d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \ge 3$ فان هنالك حاوية صغرى $C(v_i, v'_j)$ مكونة من الدروب (v_i, v_1, v_j, v'_j) ، $(v_i, v_{i-1}, v'_{i-1}, v'_1, v'_j)$ وأقصر درب بين v'_i و v'_j في الدارة C'_{t-1} مع الحافة $v_i v'_i$.

وعليه فان

$$d_3(v_i, v'_j | K_2 \times W_t) = 1 + d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \quad ...(3.4)$$

ولغرض إيجاد عدد أزواج الرؤوس $\{v'_i, v'_j\}$ التي تحقق (3.4)، نفرض أن

$$d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) = k$$

واضح أن $3 \le k \le \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$. وأن لكل v'_i يوجد رأسان على بعد k في C'_{t-1} ، عن v'_i ، باستثناء حالة كون t عددا فرديا و $k = (t-1)/2$ حيث يوجد رأس واحد فقط على بعد $(t-1)/2$ عن الرأس v'_i في C'_{t-1} . ولما كان $2 \le i \le t$ ، وبفرض أن $d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \ge 3$ ، نحصل على

$$\sum_{i=2}^{t}\sum_{j=2}^{t} x^{d_3(v_i, v'_j)} = \begin{cases} 2(t-1)[x^4 + x^5 + \ldots + x^{(t-1)/2}] \\ \qquad\qquad + (t-1)x^{(t+1)/2} \ , \ \text{if} \quad t \quad \text{is} \quad \text{odd} \\ 2(t-1)[x^4 + x^5 + \ldots + x^{t/2}] \ , \ \text{if} \quad t \quad \text{is} \quad \text{even} \end{cases} \quad \ldots(3.5)$$

$(4')$ من الواضح أن

$$d_3(v_1, v'_j) = d_3(v'_1, v_j) = 3 \quad , \quad 2 \le j \le t$$

وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $2(t-1)$.

وأخيرا وبجمع المقادير في (3.3) و(3.5) وما ينتج من الفقرات $(1')$، $(2')$ و $(4')$ نحصل على $W_3(K_2 \times W_t;x)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة.

#

ملاحظة: فيما يتعلق بقيم $4 \le t \le 8$ فان لدينا:

$$W_3(K_2 \times W_4;x) = 12x^2 + 16x^3$$
$$W_3(K_2 \times W_5;x) = 12x^2 + 33x^3$$
$$W_3(K_2 \times W_6;x) = 10x^2 + 56x^3$$
$$W_3(K_2 \times W_7;x) = 12x^2 + 61x^3 + 18x^4$$
$$W_3(K_2 \times W_8;x) = 14x^2 + 64x^3 + 42x^4$$

نتيجة 3.4: دليل وينر للمسافة العرضية−3 للبيان $K_2 \times W_t$ هو

$$W_3(K_2 \times W_t) = \begin{cases} (t^3 - t^2 + 47t - 41)/2\ , & \text{when } t \text{ is odd}\ ,\ t \ge 9 \\ (t^3 - t^2 + 46t - 40)/2\ , & \text{when } t \text{ is even}\ ,\ t \ge 10 \end{cases}$$

#

لأجل $w = 4$ فان المبرهنة الآتية تعطينا متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−4 للبيان $K_2 \times W_t$.

مبرهنة 3.5: لأجل $t \ge 10$، فان:

$$W_4(K_2 \times W_t;x) = x^3 + (t-1)(5x^3 + 6x^4 + 6x^6) + (t-1)\begin{cases} 4\sum_{k=5}^{(t+1)/2} x^k + x^{(t-1)/2} - x^{(t+1)/2} - 2x^5\ , & \text{if } t \text{ is odd} \\ 4\sum_{k=5}^{t/2} x^k + 2x^{t/2} - 2x^5\ , & \text{if } t \text{ is even} \end{cases}$$

البرهان:

نجزئ البرهان إلى حالتين كما في برهان المبرهنة 3.3

(أ) <u>لكل رأسين $v_i, v_j \in V(W_t)$ (بالمثل لكل $v'_i, v'_j \in V(W'_t)$)</u>

من الواضح أن لكل $2 \le j \le t$

$$d_4(v_1, v_j) = 3 \qquad ...(3.6)$$

لأن الحاوية الصغرى $C(v_1, v_j)$ تتكون من الدروب (v_1, v'_1, v'_j, v_j)، (v_1, v_{j+1}, v_j)، (v_1, v_{j-1}, v_j) و v_1v_j وهي بطول 3. وأن عدد أزواج الرؤوس التي تحقق (3.6) هو $(t-1)$.

والان نفرض أن $v_i, v_j \in U$ وأن $i < j$ وليكن P_1

$P_1 : v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$

الدرب الأقصر بين v_i و v_j في الدارة C_{t-1}. وواضح أن طول P_1، $d(v_i, v_j|C_{t-1})$ هو $j-i$ وأنه لا يزيد على $\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$.

توجد حاويتان بين v_i و v_j في $K_2 \times W_t$، الحاوية الأولى تتكون من الدروب $(v_i, v'_i, v'_{i+1}, \dots, v'_{j-1}, v'_j, v_j)$، P_1، (v_i, v_1, v_j) و $(v_i, v_{i-1}, v'_{i-1}, v'_1, v'_{j+1}, v_{j+1}, v_j)$ وعليه فان طول الحاوية الأولى هو

$$\ell_1 = \max\{2, 6, d(v_i, v_j|C_{t-1}), 2 + d(v_i, v_j|C_{t-1})\}$$

$$= \max\{6, 2 + d(v_i, v_j|C_{t-1})\}$$

الحاوية الثانية تتكون من الدروب $v_i - v_j$ الاتية:

(v_i, v_1, v_j) و P_1، $(v_i, v'_i, v'_1, v'_j, v_j)$، $P_2 = (v_i, v_{i-1}, \dots, v_2, v_t, v_{t-1}, \dots, v_{j+1}, v_j)$

وواضح أن طول P_2 هو $t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})$. وعليه فان طول الحاوية الثانية هو

$$\ell_2 = \max\{2, 4, d(v_i, v_j|C_{t-1}), t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})\}$$

ولما كان $t \geq 10$، فان

$$\ell_2 = t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})$$

وعليه فان

$$d_4(v_i, v_j) = \min\{\ell_1, \ell_2\}$$

(1) إذا كان $1 \leq d(v_i, v_j|C_{t-1}) \leq 3$ فان $\ell_1 = 6$، $\ell_2 = t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})$ وعندئذ يكون

$$d_4(v_i, v_j) = \min\{6, t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})\}$$

إذا $d_4(v_i, v_j) = 6$ عندما يكون $1 \leq d(v_i, v_j|C_{t-1}) \leq 3$ وهذه الحالة تصح لـ $3(t-1)$ عدد أزواج الرؤوس $\{v_i, v_j\}$ في U.

ونلاحظ أنه لا يمكن أن يكون $t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1}) < 6$ لأن ذلك يؤدي إلى $d(v_i, v_j|C_{t-1}) > 3$.

(2) إذا كان $d(v_i, v_j|C_{t-1}) > 3$ فان

$$\ell_1 = 2 + d(v_i, v_j|C_{t-1})$$
$$\ell_2 = t-1-d(v_i, v_j|C_{t-1})$$

إذا كان $\ell_1 \leq \ell_2$، فان

$$d(v_i, v_j|C_{t-1}) \leq \left\lfloor \frac{t-3}{2} \right\rfloor$$

وعليه، إذا كان

$$3 < d(v_i, v_j | C_{t-1}) \le \left\lfloor \frac{t-3}{2} \right\rfloor$$

فان

$$d_4(v_i, v_j) = 2 + d(v_i, v_j | C_{t-1}) \quad ...(3.7)$$

وإذا كان $\ell_1 > \ell_2$ ، فان

$$d(v_i, v_j | C_{t-1}) > \frac{t-3}{2}$$

وعليه فان

$$d_4(v_i, v_j) = \ell_2 = t - 1 - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{t-1}{2} \right\rceil \quad ...(3.8)$$

عدد أزواج الرؤوس التي تحقق (3.7) هو $(t-1)$ وبذلك فان معامل x^k لكل $6 \le k \le \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor$ هو $(t-1)$. أما بالنسبة لـ (3.8) فان عدد أزواج الرؤوس التي تحققها هو 2 إذا كان t عددا زوجيا و1 إذا كان t فرديا لكل رأس v_i .

وأخيرا نحصل من (3.6)، (3.7) و(3.8) وما ينتج من الفقرة (1)على متعددة الحدود الجزئية الاتية:

$$\sum_{u,v \in U} x^{d_4(u,v)} = \begin{cases} (t-1)x^3 + 3(t-1)x^6 + (t-1)[x^6 + x^7 + \ldots + x^{(t+1)/2}] \\ \qquad + \frac{t-1}{2} x^{(t-1)/2}, \text{ if } t \text{ is odd} \\ (t-1)x^3 + 3(t-1)x^6 + (t-1)[x^6 + x^7 + \ldots + x^{t/2}] \\ \qquad + (t-1)x^{t/2}, \text{ if } t \text{ is even} \end{cases} \quad ...(3.9)$$

$$= \sum_{u,v \in U'} x^{d_4(u,v)}$$

(ب) لكل رأس $u \in U$ و $v \in U'$

لإيجاد المسافة العرضية–4 لرأس في U وأخر في U' نأخذ الحالات الاتية:

(1) لكل $v'_j \in U'$ ولكل $v_j \in U$ فان

$$d_4(v_1, v'_j) = 3 \ , \ 2 \le j \le t$$
$$d_4(v'_1, v_j) = 3 \ , \ 2 \le j \le t$$

حيث أن الحاوية الصغرى $C(v_1, v'_j)$ تتكون من الدروب (v_1, v'_1, v'_j)، (v_1, v_j, v'_j)، $(v_1, v_{j-1}, v'_{j-1}, v'_j)$ و $(v_1, v_{j+1}, v'_{j+1}, v'_j)$. إذا طول الحاوية هذه هو 3. وإذا كان $j = t$ فاننا نعوض عن v_{j+1} بـ v_2 وكذلك v'_{j+1} بـ v'_2 في الدرب الأخير، وإذا كان $j = 2$ فنعوض عن v_{j-1} و v'_{j-1} بـ v_t و v'_t على التوالي في الدرب الثالث المذكور. وواضح أن عدد أزواج الرؤوس في هذه الحالة هو $2(t-1)$.

(2) لكل رأسين v_i و v'_i تكون المسافة العرضية-4 هي:

$$d_4(v_i, v'_i) = 3 \ , \ i = 1,2, \dots, t$$

من الواضح أن عدد أزواج الرؤوس التي تحقق ذلك هو t

(3) لكل i و j حيث $i \neq j \neq 1$ فان المسافات العرضية-4 تكون كالأتي:

$$d_4(v_i, v'_j) = \begin{cases} 1 + d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \ , \text{ when } 4 \le d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) \le \lfloor (t-1)/2 \rfloor \\ 4 \ , \qquad \text{when } d(v'_i, v'_j | C'_{t-1}) < 4 \end{cases}$$

حيث أن الحاوية الصغرى $C(v_i, v'_j)$ و $i \neq j \neq 1$ تتكون من دربين بطول $1 + d(v'_i, v'_j | C'_{t-1})$ ودربين كل منهما بطول 4.

ولكل رأس v_i يوجد رأسان من رؤوس C'_{t-1} كل منهما يبعد بمسافة عرضية-4 قيمتها k، $5 \le k \le \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$، عن v_i ورأس واحد في حالة $k = \frac{t+1}{2}$ و t عدد فردي. ويوجد ستة رؤوس تبعد عن v_i بمسافة عرضية-4 قيمتها 4. وإذا أخذنا المجموع لكل $2 \le i \le t$ يكون لدينا $2(t-1)$ من أزواج الرؤوس التي تبلغ المسافة العرضية-4 بينها القيمة k، $5 \le k \le \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$، و $6(t-1)$ من أزواج الرؤوس التي تبلغ المسافة العرضية-4 بينها القيمة 4 كما يوجد $(t-1)$ من أزواج الرؤوس التي المسافة العرضية-4 بينها قيمتها $(t+1)/2$ إذا كان t فرديا.

استنادا إلى الحالات المذكورة في(1)، (2) و(3) وعدد أزواج الرؤوس التي تمثلها نحصل على متعددة الحدود الجزئية الاتية:

$$\sum_{u \in U, v \in U'} x^{d(u,v)} = \begin{cases} (3t-2)x^3 + 2(t-1)[3x^4 + x^5 + \dots + \frac{1}{2} x^{(t+1)/2}], \text{ if } t \text{ is odd} \\ (3t-2)x^3 + 2(t-1)[3x^4 + x^5 + \dots + x^{t/2}], \qquad \text{if } t \text{ is even} \end{cases} \qquad \dots(3.10)$$

وأخيرا بأخذ مجموع متعددتي الحدود في (3.9) و(3.10) وإجراء بعض التبسيط الجبري نحصل على $W_4(K_2 \times W_t; x)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة.

#

ملاحظة: ولأجل إيجاد متعددات الحدود $W_4(K_2 \times W_t;x)$ لقيم $4 \le t \le 9$ نستخدم طريقة مباشرة فنحصل على:

$$W_4(K_2 \times W_4;x) = 28x^3$$
$$W_4(K_2 \times W_5;x) = 33x^3 + 12x^4$$
$$W_4(K_2 \times W_6;x) = 26x^3 + 40x^4$$
$$W_4(K_2 \times W_7;x) = 31x^3 + 48x^4 + 12x^5$$
$$W_4(K_2 \times W_8;x) = 36x^3 + 56x^4 + 14x^5 + 14x^6$$
$$W_4(K_2 \times W_9;x) = 41x^3 + 56x^4 + 24x^5 + 32x^6$$

نتيجة 3.6: لكل $t \ge 10$ فان دليل وينر للمسافة العرضية−4 للبيان $K_2 \times W_t$ هو

$$W_4(K_2 \times W_t) = \begin{cases} 3 + (t-1)(t^2 + 4t + 51)/2, & \text{when } t \text{ is odd} \\ 3 + (t-1)(t^2 + 4t + 50)/2, & \text{when } t \text{ is even} \end{cases}$$

#

المصادر

[1] A.A.Ali ,and A.S.Aziz (2007),"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs " Al-Rafiden.J. ,Vol.4, Nol.2.

[2] A.A.Ali and A.S.Aziz ,"w- Wiener Polynomials of the Width Distance for Cartesian Product of K_2 with Special Graphs", submitted for publication

[3] G. Chartrand and L. Lesniak ; (1986), **Graphs and Digraphs** , Wadsworth Inc. Belmont, California.

[4] R. Diestel ; (2000), **Graph Theory** , Springer-Verlag ,New York.

[5] A. A. Dobrynin; (1993) ," On Decomposition of the Wiener Index for Graphs of Catacondensed Hexagonal System" , Graph Theory Notes of New York, XXV , The New York Academy of Sciences , 19-22.

[6] I. Gutman ; (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial", Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.

[7] H. Hosoya; (1988)," On Some Counting Polynomials in Chemistry", Discrete Applied Math., 19 ,239-257.

[8] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang ; (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.