New Hybrid Quasi-Newton Algorithms for Large Scale Optimization

Abbas Y. Al-Bayati **Sawsan S. Ismail**

profabbasalbayati@yahoo.com

College of Computer Sciences and Mathematics/University of Mosul/Iraq *College of Educations University of Mosul/Iraq*

Received on: 24/4/2005 **Accepted on: 2/4/2006**

ABSTRACT

Two new hybrid algorithms have been suggested in this paper, the first one utilizes four formula of self-scaling update matrix was used. The matrix is selected according to Buckley method in each step. The new algorithm has been compared with BFGS standard algorithm by means of (10) multi-dimensional standard functions.

As for the second new hybrid algorithm, a new method is used to test the conjugate coefficient (β) which consists of Hestenes Stiefel (HS) and Dai and yuan (DY). Then it is compared with BFGS and PCG algorithms, which uses BFGS update, by means of (10) multi-dimesional standard functions.

Numerical results in general indicates the efficiency of the algorithms proposed in this paper by using this number of non-linear functions in this domain.

Keywords: Large Scale Optimization, Quasi-Newton Algorithms, self-scaling update matrix.

خوارزميات هجينية لخوارزمية شبيهة نيوتن في الأمثلية ذات القياس الواسع

عباس يونس البياتي **سوسن سامي إسماعيل**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل كلية التربية، *جامعة الموصل*

تاريخ استلام البحث:2005/4/24 **تاريخ قبول البحث:2006/4/2**

الملخص

في هذا البحث تم استحداث خوارزميتين هجينتين جديدتين، الأولى نستخدم فيها أربع صيغ للقياس الذاتي لمصفوفة التحديث ويتم اختيار المصفوفة في كل خطوة حسب مقياس Buckley . وتمت مقارنتها مع خوارزمية BFGS القياسية وباستعمال (10) دوال قياسية من ذوات الأبعاد المختلفة.

والخوارزمية الهجينية الجديدة الثانية نستخدم فيها طريقة جديدة لاختبار معامل الترافق (β) المكون من معامل الترافق Hestenes and Stiefel (HS) ومعامل الترافق Dai and Yuan (DY) وتمت مقارنتها مع خوارزميتي BFGS و PCG وباستخدام (10) دوال قياسية من ذوات الأبعاد المختلفة.

النتائج الحسابية بشكل إجمالي تشير إلى كفاءة الخوارزميات المقترحة في هذا البحث وباستعمال هذا العدد من الدوال اللاخطية في هذا المجال.

الكلمات المفتاحية: الأمثلية ذات القياس الواسع، خوارزمية شبيه نيوتن، القياس الذاتي لمصفوفة التحديث.

1. مقدمة

إن موضوع الأمثلية قديم قدم التاريخ ولكن أخذ وضعه الثابت والمفيد بعد تطور العلوم وتقدم البشرية على يد بعض كبار العلماء. ولقد اقتصر بحثنا على التركيز في حقل الأمثلية غير المقيدة التي لا يرتبط حلها بقيود جانبية تؤخذ من الوسط والمؤثرات المحيطة بهذه المشكلة. ويضمن البحث فكرتين، الفكرة الأولى تطرقنا فيها إلى تحديثات أشباه نيوتن الهجينية للأمثلية غير المقيدة وتم استحداث خوارزمية هجينة جديدة تستخدم فيها أربع صيغ لمصفوفة التحديث ذاتي القياس ويتم اختيار المصفوفة في كل خطوة حسب مقياس بكلي، وتمت مقارنتها مع خوارزمية BFGS القياسية.

الفكرة الثانية تطرقنا فيها إلى شرح بعض خوارزميات التدرج المترافق الهجينية الكفوءة، وتم استحداث خوارزمية هجينة جديدة تستخدم فيها طريقة جديدة لاختبار معامل الترافق β الناتج من HS و Dy ، وتمت مقارنتها مع خوارزميتي BFGS و PCG .

وقدمنا استنتاجات عددية للخوارزميات المحسنة ومقارنتها مع خوارزميتي BFGS القياسية و PCG لدوال غير خطية وفي أبعاد مختلفة. كما تم اقتراح عمل مستقبلي خاص بهذه الخوارزميات.

2. الخوارزميات المقترحة

بالنسبة للخوارزمية الهجينية الأولى تستخدم فيها أربع صيغ القياس الذاتي لمصفوفة التحديث، ويتم اختيار المصفوفة في كل خطوة حسب مقياس Buckley، وتمت مقارنتها مع خوارزمية BFGS القياسية.

وكانت صيغ مصفوفات التحديث المستعملة كالآتي:

2.1 تحديثات المتري المتغير ذات القياس الذاتي من عائلة Oren

$$H_{k+1} = \left[H_k - \frac{H_k\, y_k\, y_k^T\, H_k^T}{y_k^T\, H_k\, y_k} + w_k\, w_k^T \right] \zeta_k + \frac{v_k\, v_k^T}{v_k^T\, y_k}$$

حيث أن

$$w_k = (y_k^T\, H_k\, y_k)\, v_k - (v_k^T\, y_k)\, H_k\, y_k$$

$$\zeta_k = \frac{y_k^T v_k}{v_k^T y_k}$$

حيث أن ζ_k هو مقياس ذاتي مأخوذ من شرط QN

2.2 تحديث المتري المتغير ذات القياس الذاتي (Al-Bayati, 1991)

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + w_k w_k^T + \sigma_k \left(\frac{v_k v_k^T}{v_k y_k} \right)$$

حيث أن

$$\sigma_k = \frac{1}{\zeta_k}$$

2.3 صيغة تحديث للمتري المتغير (Al-Maha, 1995) ذات القياس الذاتي

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\left(s\,c_1 * v_k - H_k y_k\right) v_k^T}{v_k^T y_k}$$

حيث أن المقياس الذاتي هو $\rho_k = s\,c_1 = \frac{y_k^T y_k}{v_k^T y_k}$

2.4 صيغة تحديث للمتري المتغير BFGS ذات القياس الذاتي

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k v_k^T + v_k y_k^T H_k}{v_k^T y_k} + \left(1 + \frac{y_k^T H_k y_k}{v_k^T y_k}\right)\left(\frac{v_k v_k^T}{v_k^T y_k}\right)$$

3. خوارزميات التدرج المترافق المشروط مسبقاً

Preconditioned Conjugate Gradient Algorithms (PCG)

إن كلاً من خوارزميات أشباه نيوتن (QN) وخوارزميات التدرج المترافق (CG) لها مزايا مفيدة ومساوئ عند تطبيقها على الدوال العامة حيث أن خوارزميات QN أسرع وتتطلب حسابات دوال أقل من خوارزميات التدرج المترافق CG .

كذلك خوارزمية QN تكوّن متتابعة من مصفوفات متناظرة وموجبة قطعاً بصورة اعتيادية. والخوارزميات المترية لا يكون استعمالها فعالاً بسبب الخزن ولهذا تم التطرق إلى صنف جديد من خوارزميات التدرج المترافق المطور تسمى خوارزميات التدرج المترافق المشروط PCG .

إن فكرة المشروط مسبقاً هي لتحويل المسألة حيث أن مصفوفة Hessian للمسألة المتحولة تملك القيم المميزة وتكون حسنة الشرط. الغرض من خوارزمية PCG هو لحفظ متطلبات الخزن من رتبة n أثناء تحسين التقارب في خوارزميات PCG .

خوارزمية CG القياسية ليست فعالة دائماً لكن الاشتراط يفرض استعمال المصفوفة المناسبة التي تعجل التقارب في خوارزمية CG عن طريق تحويل المتغيرات بينما يحافظ على الخواص الأساسية لهذه الخوارزمية. المصفوفات المشروطة أسست على تقريبات معكوس Hessian المتولدة في خوارزمية QN لذلك الفكرة الأساسية وراء هذه الطريقة هي استخدامها تحديث QN أو VM للتعجيل بخوارزمية التدرج المترافق.

صفات عامة لخوارزمية PCG

1. تحتاج إلى خزن قليل و إلى زمن حسابات قليل.
2. ليست حساسة جداً فيما يتعلق بدقة خط البحث.
3. تملك خاصية التوقف التربيعي.

4. تحديثات أشباه نيوتن الهجينية (New I)

Hybrid Quasi-Newton Update

نقدم في هذه الخوارزمية التحديثات المتعددة لطريقة أشباه نيوتن الهجينية لمسائل الأمثلية غير المقيدة.

هذه الخوارزميات تولد عدة تحديثات أشباه نيوتن QN عند كل تكرار نقوم باستعراض فئة من تحديثات متغيرات مترية ذات القياس الذاتي القياس مختلفة من عائلة Oren’s و Al-Bayati و Al-Maha .

إن محور اهتمامنا هو التوسع الهجين لطريقة أشباه نيوتن والذي سيلائم الحل لمسائل الأمثلية ذات القياس الواسع وعند كل خطوة تقوم الخوارزمية بتحديث مصفوفة أشباه نيوتن على طول n غير معتمدة على الاتجاهات وذلك بتقييم قيم الدالة بشكل موازي والتدرج عند n من النقاط.

ولهذا السبب يعتبر هذه الخوارزمية هي خوارزمية هجينية لطريقة أشباه نيوتن بحيث عندما تنطبق هذه الخوارزميات لحل المسائل العملية ستكون الآلية التسلسلية والموازية قادرة على كشف الأشكال المختلفة لتحديثات أشباه نيوتن خلال عملية التصفير.

4.1 الخوارزمية الجديدة الأولى New 1 Algorithm

الخطوة 1: لتكن x_o نقطة ابتدائية و $\varepsilon > 0$ و n بُعد المسألة و $H_o = I$ (المصفوفة الأولية هي المصفوفة الأحادية) و $k = 1$.

الخطوة 2: $d_k = -H_k g_k$ ، حيث أن d_k اتجاه البحث الأولي في مرحلة k.

<u>الخطوة 3</u>: نصغر الدالة $F(x_k + \lambda_k d_k)$ لنجد $(x_{k+1} + \lambda_k d_k)$ حيث أن λ_k يتم الحصول عليها من خلال إجراءات البحث الخطي.

ضع $x_{k+1} = x_K + \lambda_k d_k$

جد g_{k+1}

<u>الخطوة 4</u>: احسب التقارب إذا حقق $\| g_{k+1} \| < \varepsilon$ ، توقف.

<u>الخطوة 5</u>: استخدام H_k و v_k و y_k لتكوين H_{k+1}

حيث أن $v_k = x_{k+1} - x_k$ و $y_k = g_{k+1} - g_k$

<u>الخطوة 6</u>: $II = 0$

<u>الخطوة 7</u>: $II = II + 1$

إذا كان $II > 3$ اذهب إلى d ، (BFGS)

بعكسه اذهب إلى (a , b , c)

a) H_{k+1} ذاتي القياس (Al-Bayati) اذهب إلى الخطوة (8).

b) H_{k+1} ذاتي القياس (Oren) اذهب إلى الخطوة (8).

c) H_{k+1} ذاتي القياس (Al-Maha) اذهب إلى الخطوة (8).

d) H_{k+1} ذاتي القياس (BFGS) اذهب إلى الخطوة (9).

<u>الخطوة 8</u>: استخدم مقياس الاسترجاع التالي:

إذا كان $0.01 < \left| \dfrac{g_k^T H_{k+1} g_{k+1}}{g_{k+1}^T H_{k+1} g_{k+1}} \right|$ اذهب إلى الخطوة (9). وإلا اذهب إلى الخطوة (7).

<u>الخطوة 9</u>: $d_{k+1} = - H g_{k+1} + \beta^{HS} d_k$ حيث أن $\beta^{HS} = \dfrac{g_{k+1}^T H y_k}{y_k^T d_k}$

<u>الخطوة 10</u>: احسب مقياس استرجاع إذا كانت

$\| g_{k+1} \| < -0.8 g_{k+1}^T d_k$

و $k = n$ اذهب إلى الخطوة (1).

وإلا $k = k + 1$ واذهب إلى الخطوة (3).

5. الخوارزمية الفاعلة الهجينية المشروطة مسبقاً للتدرج المترافق

An Efficient Hybrid Preconditioning Conjugate Gradient Algorithm

تم في هذه الفقرة استحداث خوارزمية هجينية تستخدم فيها طريقة جديدة لاختبار معامل الترافق β المكون من HS و Dy وهناك ميزة أساسية ومهمة لهذه الخوارزمية هي أنها تعطي

اتجاهاً للبحث منحدراً في كل تكرار وتتقارب بشكل شامل شريطة أن يحقق البحث شروط Wolfe الضعيفة، الغرض من هذه الفقرة هو دراسة بعض الطرق المتعلقة بخوارزمية التدرج المترافق غير الخطي الهجينية الجديدة، وإيجاد خوارزميات كفوءة من بينها.

لاحظ مشكلة الأمثلية غير المقيدة التالية

$$\min_{x} F(x) \quad , \quad x \in R \qquad \ldots(1)$$

حيث أن F دالة مستقيمة (smooth) ومشتقتها متوفرة. إن طرق التدرج المترافق تعد فاعلة جداً وكفوءة لحل (1) خاصة عندما يكون بُعد الدالة كبيراً وله الصيغة الآتية:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \qquad \ldots(2)$$

$$d_k = \left\{ \begin{array}{ll} -g_k & \text{For } k = 1 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} & \text{For } k \geq 2 \end{array} \right\} \qquad \ldots(3)$$

عند تحليلات التقارب وتطبيق خوارزمية التدرج المترافق فان إحداها غالباً ما يستلزم أن يكون البحث الخطي مضبوطاً أو يحقق شروط Wolfe القوية وتحديداً:

$$F(x_k) - F(x_k + \lambda_k d_k) \geq -\delta \lambda_k g_k^T d_k \qquad \ldots(4)$$

و

$$\left| g(x_k + \lambda_k d_k)^T d_k \right| \leq -\sigma g_k^T d_k \qquad \ldots(5)$$

حيث أن $0 < \delta < \sigma < 1$.

بالنسبة للأخير نسمي البحث الخطي على أنه البحث الخطي القوي لِ Wolfe عند أخذنا لِ β_k^{Dy} نجد أن :

$$\beta_k^{Dy} = \frac{\| g_k \|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}} \qquad \ldots(6)$$

وقد ثبت أن قيمة β في هذه الطريقة تخلق اتجاهاً منحدراً عند كل تكرار وتتقارب بشكل شامل شرط أن يستوفي البحث الخطي شروط Wolfe الضعيفة وتحديداً المعادلة (4) مع

$$g(x_k + \lambda_k d_k)^T d_k \geq \sigma g_k^T d_k \qquad \ldots(7)$$

في هذه الحالة نسمي البحث الخطي بأنه البحث الخطي الضعيف لِ Wolfe .

5.1 خوارزمية هجينية للتدرج المترافق:

نرمز r_k كنسبة β_k فيما يتعلق بِ β_k^{Dy} وتحديداً:

$$r_k = \frac{\beta_k}{\beta_k^{Dy}} \qquad \ldots(8)$$

حيث ثبت أن الخوارزمية (2) و (3) مع البحث الخطي الضعيف لِ Wolfe تخلق اتجاه بحث تنازلي عند كل تكرار وتقارب شامل إذا كان المقياس β_k بالشكل:

$$- c < r_k < 1 \qquad ...(9)$$

حيث أن $c = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} > 0$

إن النتائج العددية الأولية لربط الطريقتين (6) وطريقة HS المعرفة β_k لها بالشكل:

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_k^T\, y_{k-1}}{d_{k-1}^T\, y_{k-1}} \qquad ...(10)$$

تظهر أن الخوارزميتين الهجينتين التاليتين اداؤها أفضل من طريقة PR .

الخوارزمية الأولى تعرف بالشكل

$$\beta_k = \max\left\{- c\, \beta_k^{Dy} , \min\left\{\beta_k^{HS} , \beta_k^{Dy} \right\} \right\} \qquad ...(11)$$

وهذه الخوارزمية تحقق خواص التدرج المترافق، ومع البحث الخطي الضعيف لِ Wolfe تخلق اتجاهاً تنازلياً في كل تكرار وتتقارب بشكل شامل.

ونظراً لأنه حساب طول خطوة تستوفي شروط Wolfe الضعيفة أسهل من حساب طول خطوة تستوفي شروط Wolfe القوية فعند اختبارنا للخوارزمية (11) مع البحث الخطي الضعيف لِ Wolfe تبين أن هذه الخوارزمية اداؤها أفضل من طريقة PR مع البحث الخطي القوي لِ Wolfe .

الخوارزمية الثانية المقترحة بالشكل

$$\beta_k = \max\left\{0 , \min\left\{\beta_k^{HS} , \beta_k^{Dy} \right\} \right\} \qquad ...(12)$$

نقترح الطريقة الهجينية (12) لسببين:

<u>**الأول**</u> يتعلق باستراتيجية الاسترجاع المقترحة لِ Powell .

<u>**والسبب الآخر**</u> هو أننا نعلم أن d_k ربما تميل إلى أن تكون عكس d_{k+1} إذا كان $\beta_k < 0$. وهكذا فان التحديد $\beta_k \geq 0$ سوف يمنع اتجاهي البحث المتتابعين من أن يكونا متعاكسين. وقد أظهرت نتائجنا العددية أن الطريقة الهجينية (12) ذات اداء أفضل من الطريقة الهجينية (11).

5.2 خطوات لخوارزمية PCG الجديدة (New II)

The Out Lines of the New PCG Algorithm (New II)

<u>**الخطوة (1)**</u>: لتكن x_o نقطة بداية و $\varepsilon > 0$ و n بُعد المسألة و $H_o = I$ مصفوفة الوحدة و k رمز التكرارات، k=1 .

<u>**الخطوة (2)**</u>: اتجاه البحث الخطي $d_k = - H_k\, g_k$.

الخطوة (3): $\text{Minimiz } F(x_k + \lambda_k d_k)$ لإيجاد $(x_{k+1} + \lambda_k d_k)$ حيث أن λ_k نأخذها من البحث الخطي المضبوط (ELS) .

الخطوة (4): احسب التقارب إذا $\| g_{k+1} \| < \varepsilon$ توقف. حيث أن $\varepsilon > 0$. وإلا استمر.

الخطوة (5): احسب

$$v_k = x_{k+1} - x_k$$

$$y_k = g_{k+1} - g_k$$

الخطوة (6): قم بتحديث H_k بإضافة مصفوفة تصحيحية E_k للحصول على H_{k+1} ، أي أن

$$H_{k+1} = H_k + E_k$$

حيث أن E_k هي مصفوفة تصحيحية تحقق شرط QN والذي هو

$$H_{k+1}\, y_k = \rho_k\, v_k$$

حيث أن

$$\rho_k = \frac{y_k^T H_k y_k}{y_k^T v_k}$$

وأن

$$H_{k+1} = \underset{\text{Al-Bayati}}{\text{Update}}(H_k\; y_k\; v_k)$$

الخطوة (7):

$$c = \frac{1 - 0.1}{1 + 0.1}$$

$$\beta^{HS} = \frac{y_k^T H_{k+1} g_{k+1}}{d_k^T y_k}$$

$$\beta^{Dy} = \frac{g_{k+1}^T H_{k+1} g_{k+1}}{d_k^T y_k}$$

الخطوة (8):

$$\text{Beta} = \text{Max}\,(0\,,\ \text{Min}\,(\beta^{HS}\ ,\ \beta^{Dy}))$$

$$\text{Beta} = \text{Max}\,(-\,c\,.\ \beta^{Dy}\ ,\ \text{Min}\,(\beta^{HS}\ ,\ \beta^{Dy}))$$

الخطوة (9):

$$d_{k+1} = -H_{k+1} g_{k+1} + \beta_k d_k$$

الخطوة (10): إذا كان $\left| g_{k+1}^T g_k \right| > 0.2\, g_{k+1}^T g_{k+1}$ و $k = n$ فاذهب إلى الخطوة (1).

وإلا $k = k + 1$ ، واذهب إلى الخطوة (3).

6. بعض خواص خوارزميتي New I و New II

1. للدالة التربيعية مع خط بحث غير مضبوط.

a. تتوقف (terminates) على الأكثر بِ n من التكرارات مع $H_{n+1} = G^{-1}$ ، حيث أن n هو بُعد الدالة، G^{-1} هي معكوس مصفوفة Hessian .

b. تحقق شرط أشباه نيوتن (QN) وهو:

$$H_{k+1}\, y_k = v_k$$

حيث أن

$$v_k = x_{k+1} - x_k$$
$$y_k = g_{k+1} - g_k$$

c. تولد اتجاهات بحث متدرجة مترافقة عندما تكون $H_1 = I$ (حيث أن I هي مصفوفة الوحدة) و $k = n$ (حيث أن k تساوي عدد التكرارات و n بُعد الدالة).

2. للدوال العامة

a. يحافظ على المصفوفة الموجبة قطعاً H_k وبهذا تبقي على خاصية الانحدار.

b. سرعة التقارب من رتبة Super linear .

c. يحتاج إلى تكرارات بعدد $3n^2 + o(n)$.

d. تقارب شامل إذا كانت الدالة محدبة بصرامة (strictly convex)، (مع بحث خطي غير مضبوط).

7. النتائج الحسابية والاستنتاجات

Numerical Results and Conclusions

7.1 النتائج الحسابية

اختبارات المقارنة تتضمن 10 دوال اختبار معطاة بشكل واضح في الملحق مع أبعاد مختلفة، كل النتائج تم الحصول عليها باستخدام الدقة المضاعفة على حاسبة من نوع Pentium Computer وباستخدام برامج مكتوبة بلغة فورتران (Under Windows) .

أدوات تقييم هذه الخوارزميات ومقارنتها معتمدة على العدد الكلي للتكرارات (NOI) والعدد الكلي للدوال المحسوبة (NOF). خط البحث المستعمل يعتمد على التقنية التكعيبية ودالة الهدف F(x) ونقطة البداية الأولية قد تم إعطاؤها لكل مسألة اختبار. وقد تم استخدام مقياس الاسترجاع نفسه مع الخوارزميات الأصلية والجديدة.

ومقياس التوقف المستخدم لإيقاف الخوارزمية لجميع الحالات في الطريقة New I و New II هو

$\|g_{k+1}\| \le 1\times10^{-5}$

الجدول (1): الأداء المقارن لجميع خوارزميات (طريقة BFGS القياسية والخوارزمية NEW I) للمجموعة الاختبارية من الدول المستعملة في الجدول وللأبعاد n = 4 , 500 تؤكد أن الخوارزمية New I أكفأ من خوارزمية BFGS القياسية من حيث NOI و NOF

الجدول (1 A): n=4

Test Function	New I						Original BFGS	
	NOI	NOF	nou1	nou2	nou3	nou4	NOI	NOF
1	18	43	17	1	2	0	31	100
2	10	30	9	1	2	1	17	48
3	6	20	5	5	0	4	9	23
4	17	43	16	0	2	0	28	65
5	10	49	9	1	2	1	30	156
6	26	61	25	0	0	0	38	102
7	22	58	21	2	3	1	26	57
8	10	29	9	0	3	0	14	30
9	19	49	18	1	1	1	33	80
10	8	20	7	0	1	0	10	26
Total	**146**	**402**	**136**	**11**	**16**	**8**	**236**	**687**

الجدول (1 B): n=500

Test Function	New I						Original BFGS	
	NOI	NOF	nou1	nou2	nou3	nou4	NOI	NOF
1	19	50	18	2	3	0	40	142
2	11	32	10	1	3	1	18	50
3	6	20	5	5	0	4	9	23
4	24	59	23	1	3	1	36	82
5	13	79	12	2	3	1	22	100
6	39	99	38	0	0	0	44	133
7	23	60	22	2	4	1	27	60
8	19	59	18	1	1	1	25	75
9	20	74	19	2	2	1	34	83

10	9	25	8	1	2	0	10	26
Total	**183**	**557**	**173**	**17**	**21**	**10**	**265**	**774**

وأظهرت النتائج العددية ان الخوارزميات الجديدة هي كفوءة جداً.

وكمثال على مدى تحسين New I خوارزمية BFGS كنسبة مئوية وعندما تكون n=4 و n=500 نلاحظ الجدولين التاليين :

n=4

Tools	BFGS	New 1
NOI	100 %	61 %
NOF	100 %	58 %

n=500

Tools	BFGS	New 1
NOI	100 %	69 %
NOF	100 %	71 %

الجدول (2): يتضمن الجدول نتيجة المقارنة بين طريقة BFGS القياسية و PCG التي تستعمل BFGS والخوارزمية الجديدة ((New II (PCG) للمجموعة الاختبارية من الدوال المستعملة وللأبعاد n = 4 , 500

الجدول (2 A): **n = 4**

Test Function	New II PCG		PCG		BFGS	
	NOI	**NOF**	**NOI**	**NOF**	**NOI**	**NOF**
1	14	39	20	71	22	92
2	14	37	19	58	19	61
3	7	18	6	20	8	26
4	16	49	26	67	24	69
5	12	51	20	85	18	83
6	28	80	27	89	26	90
7	21	53	36	104	37	108
8	10	22	9	28	9	24
9	20	58	34	96	33	94
10	9	23	8	20	8	22
Total	**151**	**430**	**205**	**638**	**204**	**669**

الجدول (2 B): **n = 500**

Test Function	New II PCG		PCG		BFGS	
	NOI	NOF	NOI	NOF	NOI	NOF
1	15	41	45	111	51	147
2	14	37	48	115	49	121
3	8	21	6	20	8	26
4	21	59	111	277	61	143
5	13	65	22	92	19	89
6	36	102	42	126	42	129
7	22	55	778	2113	769	2238
8	22	69	34	92	34	96
9	21	60	625	1608	610	1676
10	9	23	10	25	10	27
Total	**181**	**532**	**1721**	**4579**	**1653**	**4692**

وكمقارنة لاداء الخوارزمية New II مع خوارزمية BFGS وخوارزمية PCG كنسبة مئوية نلاحظ الجدول التالي:

n = 4

Tools	BFGS	New II	PCG	New II
NOI	100 %	74 %	100 %	73 %
NOF	100 %	64 %	100 %	67 %

n = 500

Tools	BFGS	New II	PCG	New II
NOI	100 %	11 %	100 %	10 %
NOF	100 %	11 %	100 %	11 %

8. الملحق Appendix

1. Generalized Powell Function

$$F(X)=\sum_{i=2}^{n/4}[(x_{4i-3}-10\,x_{4i-2})^2+5(x_{4i-1}-x_{4i})^2+(x_{4i-2}-2\,x_{4i-1})^4\ +10\,(X_{4i-3}-x_{4i})^4]$$

$$x_o=(3,-1,0,1,\dots)^T$$

2. Generalized Cube Function

$$F(x)=100\,(x_2-x_1^3)^2+(1-x_1)^2$$

$$x_o=(-1.2,1)^T$$

3. Generalized Shallow Function

$$F(x) = \sum_{i=2}^{n/2} (x_{2i-1}^2 - x_{2i})^2 + (1 - x_{2i-1})^2$$

$$x_o = (-2, \dots)^T$$

4. Nondiagonal Variant of Rosenbrock Function

$$F(x) = \sum_{i=2}^{n/2} [100(x_1 - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$$

$$x_o = (-1, \dots)^T$$

5. Generalized Cantrel Function

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n/4} [(\exp(x_{4i-3}) - x_{4i-2})^4 + 100(x_{4i-2} - x_{4i-1})^6 + (\arctan(x_{4i-1} - x_{4i}))^4 + x_{4i-3}]$$

$$x_o = (1, 2, 2, 2, \dots)^T$$

6. Generalized Miele Function

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n/4} [\exp(x_{4i-3} - x_{4i-1})^2 + 100(x_{4i-2} - x_{4i-1})^6 + (\tan(x_{4i-1} - x_{4i}))^4 + x_{4i-3}^8 + (x_{4i} - 1)^2]$$

$$x_o = (1, 2, 2, 2, \dots)^T$$

7. Generalized Wood Function

$$F(x) = \sum_{i=2}^{n/4} [100(x_{4i-2} - x_{4i-3}^2)^2 + (1 - x_{4i-3})^2 + 90(x_{4i} - x_{4i-1}^2)^4 + (1 - x_{4i-1}^2)^2 + 10.1]$$

$$x_o = (-3, -1, -3, -1, \dots)^T$$

8. Generalized Dixon Function

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} [(1 - x_1)^2 + (1 - x_n)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i+1})^2]$$

$$x_o = (-1, \dots)^T$$

9. Generalized Rosenbrock Function

$$F(x) = \sum_{i=2}^{n/2} 100(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_{2i-1})^2$$

$$x_o = (-1, 2, 1, \dots)^T$$

10. Beale Function

$$F(x) = (1.5 - x_1(1 - x_2^2)) + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$$

$$x_o = (0, 0)^T$$

المصادر

[1] Al-Baali, M. (1985). ”Descent Property and Global Convergence of the Fletcher-Reeves Method with Inexact Line Search”. IMA J. Numer. Anal., pp.121-124.

[2] Al-Bayati, A. Y. (1991). ”A New Family of Self-scaling VM Algorithms for Un Constrained Optimization”. J. of Educ. & Sci. Vol(12), pp.25-54.

[3] Al-Bayati, A. Y. and Younis, M. S. (1995). ”Imperfect Self-scaling VM Algorithms for Nonlinear Un Constrained Optimization”. J. of Educ. & Sci. Vol(23), pp.174-183.

[4] Dai, Y. H. (2001). “New Properties on A Nonlinear Conjugate Gradient Method”. Numer. Math. 89. 83-98.

[5] Dai, Y. H. and Yuan, Y. (1996). “Convergence Properties of the Fletcher- Reeves Method”. IMA J. Numer. Anal., 16(2), pp.155-164.

[6] Dai, Y. H. and Yuan, Y. (1998). “Some Properties of A New Conjugate Gradient Method”. In: Advanced in Nonlinear Programming, ed Y. Yuan (Kluwer Academic, Boston) pp.251-262.

[7] Dai, Y. H. and Yuan, Y. (1999). “A Nonlinear Conjugate Gradient Method with A Strong Global Convergence Property”. SIAM J. Optimization, 10(1), 177-182.

[8] Paul Kang-Hoh Phua, Weiguo FAN, Yuelin ZENG. (1997). “Parallel Algorithms for Large-Scale Nonlinear Optimization”.

[9] Powell, M. J. D. (1977). “Non Convex Minimization Calculations and the Conjugate Gradient Method”. In: Lecture Notes in Mathematics, 1066 (Springer, Berlin, 1984) pp.122-141.

[10] Touati-Ahmed, D. and Storey, C. “Efficient Hybrid Conjugate Techniques”. Jota, 64(1990) 379-397.