

Stability Analysis of a fluid in Horizontal and Inclined Channels

Ala'a Abdul-raheem Ahmed Hammodat

Taghred Hamdoon Shuker

College of Education

University of Mosul

Received on : 23/9/2013

Accepted on: 12/2/2014

ABSTRACT

This paper is devoted to analysis the stability of horizontal and inclination in a glazing cavities of equations that we expose to disturbance. This analysis is done by finding the eigenvalues of the system which enable us to investigate the grow of disturbance after setting glazing cavities equations in linearization form. We obtain from our results that the equations are stable when the real part of wave velocity is negative , and unstable when it is positive .

Keywords: Stability , Reynold Number, Wave Number , Rayleigh Number.

تحليل الاستقرار لمائع في التجاويف الزجاجية الأفقية والمائلة

تغريد حمدون شكر

علاء عبدالرحيم احمد حمودات

كلية التربية، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2014/2/12

تاريخ استلام البحث: 2013/9/23

المخلص

هذا البحث مكرس لتحليل الاستقرار من النوع الأفقي والمائل لمنظومة من المعادلات عرضناها لاضطراب في التجاويف الزجاجية . هذا التحليل تم عن طريق إيجاد القيم الذاتية للمنظومة التي تمكنا من إيجاد نمو الاضطراب من عدمه وذلك بعد جعل تلك المعادلات خطية . وتبين من النتائج إن هذه المعادلات تكون في حالة استقرار عندما يكون الجزء الحقيقي لسرعة الموجة كمية سالبة وفي حالة عدم استقرار عندما تكون هذه الكمية موجبة .

الكلمات المفتاحية: الاستقرار ، عدد رينولد ، العدد الموجي ، عدد رايلي.

1. المقدمة

يعد ميكانيك الموائع إحدى العلوم الهندسية التي تكون أساسيات العلوم الهندسية الأخرى كلها ، وهذا العلم يتفرع إلى تخصصات مختلفة مثل الديناميكا الهوائية والهندسة الهيدروليكية وهندسة السفن وغيرها .

ونظرا لان المائع يتحرك تحت تأثير قوة غير متزنة تؤثر عليه ، فطبيعة جريان مائع حقيقي معقدة جدا حيث إن القوانين الأساسية التي تصف الحركة الكاملة لمائع لم توضع بطريقة سهلة والحلول الرياضية تحتاج إلى الاستعانة بالتجارب العملية .

إن دراسة حركة المائع تقودنا إلى دراسة استقرارية هذا المائع ، فإذا تعرض مائع جاري إلى إزعاج فقد يزول هذا الإزعاج بمرور الزمن ويتلاشى وتعود خصائص المائع إلى وضعها السابق ، وقد يزداد هذا الإزعاج مع مرور الزمن فيتحول إلى مائع مضطرب وقد يزداد هذا الاضطراب ويؤدي إلى تغيير كامل في خصائص المائع وهو ما يسمى بالفوضوية .

يعد نظام التجويف الزجاجي (Glazing Cavity System) احد أهم مكونات منتجات نسق النوافذ والأبواب في مبنى ، اذ يتكون عادة من لوحين زجاجيين (Glass Panes) بينهما مادة بينية (Spacer) ، توضع هذه المادة البينية عند نهايتي اللوحين الزجاجيين في الأعلى والأسفل مكونة نظام التجويف الزجاجي . [2]

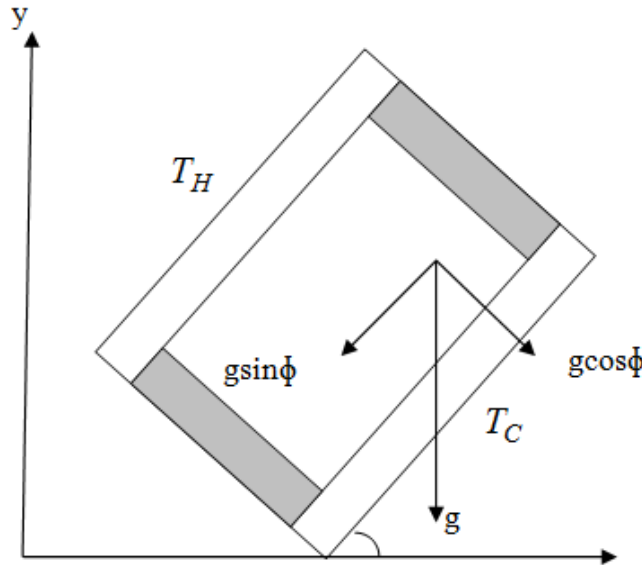
2. نبذة تاريخية

لقد أجريت دراسات عديدة حول موضوع الاستقرار وانتقال الحرارة في التجاويف الزجاجية وفيما يلي بعض الأعمال السابقة في هذا المجال :

ناقش [8] مسألة الحمل الحراري الطبيعي لمائع محتوي في تجويف طويل مغلق أفقي لمقطع مستطيل الشكل محدد بجدارين احدهما ساخن والأخر بارد , وقد تم حل معادلتي الحرارة والحركة عدديا كون السائل دائرا . درس [4] عدد رايلي (Rayleigh) الحرج بالاتجاه العمودي والمائل باستخدام تجويف ذو مقطع نسبي 44 (Aspect ratio) , بالإضافة إلى مناقشة النمط الرئيسي للجريان بالاتجاه المائل . وأجريت [3] دراسة عملية على ستة مقاطع نسبية بين 5 و 11 وعدد رايلي (Rayleigh) بمعدل 10^2 إلى 2×10^7 لاختبار تأثير الزاوية المائلة والمقطع النسبي في معدل انتقال الحرارة وطور العلاقة عند الزاوية المائلة 60° وقد وجد أيضا اندراجا خطيا بين الزاويتين 60° و 90° . ناقش [5] الحل التحليلي باستخدام المحاكاة العددية ووجد أن الحل الملائم لشق عمودي يكون عدد رايلي (Rayleigh) كبيرا ، ودرس [7] التجاويف ذات المقاطع النسبية 1 و 3 و 4 وبينت النتائج لهذه المقاطع النسبية أن نقطة الانتقال لنمط الجريان يذهب إلى زاوية كبيرة من الميلان عندما يزداد عدد رايلي (Rayleigh) . وقام [2] بدراسة الحمل الحراري الطبيعي داخل تجويف زجاجي ووجد الزاوية الملائمة لتكون ذات قابلية أعلى لعزل المحيط الخارجي عن المحيط الداخلي .

3. النموذج

يتكون النموذج الرياضي من جدارين عموديين موصلين للحرارة اللذين يمثلان الطبقة الداخلية للوحين الزجاجيين (Glass Panes) اللذين يكونان التجويف الزجاجي , احد هذين الجدارين يكون حار ونرمز لدرجة حرارته T_H والأخر يكون بارد ونرمز له T_C ويكونان موازيين للمحور Y كما يتكون من جدارين أفقيين عازلين للحرارة ويكونان موازيين للمحور X وان المسافة بين الجدارين الموصلين هي L , والمسافة بين الجدارين العازلين هي H . ويملا هذا التجويف بمائع غير قابل للانضغاط ومع وجود التشتت في اللزوجة . وكما مبين في الشكل (1)



الشكل (1) يوضح النموذج الرياضي

وعليه يمكن تمثيل المعادلات التي تتحكم بهذا النموذج وكالاتي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots(3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \beta g (T - T_0) \cos \varphi \quad \dots(3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + \beta g (T - T_0) \sin \varphi \quad \dots(3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \dots(3.4)$$

حيث أن $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ والشروط الحدودية عند الجدارين الجانبيين هي :

$$T(0, y) = T_H$$

$$T(L, y) = T_C$$

وعند السطحين العلوي والسفلي هي:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} = 0$$

بينما الشروط الحدودية للسرعة تكون:

$$u(0, y) = v(0, y) = 0$$

$$u(L, y) = v(L, y) = 0$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

$$u(x, H) = v(x, H) = 0$$

4. التحليل البعدي (Dimensional Analysis):

لغرض إيجاد المعادلات اللابعديّة للمعادلات (3.1) ، (3.2) ، (3.3) و (3.4) سوف نفرض بعض القيم اللابعديّة [9]:

$$u^* = \frac{u}{U}$$

$$v^* = \frac{v}{V}$$

$$U = \frac{\alpha}{L} \sqrt{Ra Pr} = \sqrt{g \beta \Delta T L}$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_1 - T_0) L^3}{\mu \alpha}$$

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$$

$$t^* = \frac{tU}{L}$$

$$q = T_1^4 \sigma Q$$

$$P = P^* \rho U^2$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلات (3.1) ، (3.2) ، (3.3) و (3.4) نحصل على المعادلات اللابعديّة

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad \dots(4.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] - (E - H\theta) \cos \varphi \quad \dots(4.2)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] + (E - H\theta) \sin \varphi \quad \dots(4.3)$$

$$\sqrt{\text{Ra Pr}} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right] = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right] + \text{Pr Ec} \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] \quad \dots(4.4)$$

والشروط الحدودية في الحالة اللابعدية تصبح بالشكل التالي :

$$\theta(0, y^*) = \theta_H$$

$$\theta(L, y^*) = \theta_C$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right|_{y^*=H} = 0$$

$$u(0, y^*) = v(0, y^*) = 0$$

$$u(L, y^*) = v(L, y^*) = 0$$

$$u(x^*, 0) = v(x^*, H) = 0$$

$$u(x^*, H) = v(x^*, 0) = 0$$

5. تحليل الاستقرارية (Stability Analysis)

لغرض تحليل الاستقرارية للمعادلات (4.1), (4.2), (4.3), و (4.4) نجزأ كلا من u^*, v^*, p^*, θ باستخدام المعادلات التالية :

$$\left. \begin{aligned} u^*(x, y, t) &= u_1^*(x, y) + u_2^*(x, y, t) \\ v^*(x, y, t) &= v_1^*(x, y) + v_2^*(x, y, t) \\ p^*(x, y, t) &= p_1^*(x, y) + p_2^*(x, y, t) \\ \theta(x, y, t) &= \theta_1(x, y) + \theta_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.1)$$

حيث ان $u_1^*(x, y), v_1^*(x, y), p_1^*(x, y), \theta_1(x, y)$ تمثل الأجزاء المستقرة وتكون صغيرة جدا مقارنة بالجزء الأخر الغير مستقر وهو الجزء المهم فسي حساب الاستقرارية $u_2^*(x, y), v_2^*(x, y), p_2^*(x, y), \theta_2(x, y)$ [1].
الآن وبعد تعويض المعادلة (5.1) في المعادلات (4.1), (4.2), (4.3), و (4.4) وبتجزئتها وتحويلها إلى حالتها الاستقرارية والاضطراب نحصل على :

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} = 0 \quad \dots(5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^{*2}} \right] + H\theta_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad \dots(5.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \\ & = -\frac{\partial p_2^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial y^{*2}} \right] - H\theta_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad \dots(5.4)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\text{Ra Pr}} \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial \theta_2}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial \theta_1}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial \theta_2}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial \theta_2}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial \theta_1}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial \theta_2}{\partial y^*} \right] \\ & = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^{*2}} + \text{Pr Ec} \left[\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial x^{*2}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad \dots(5.5)$$

ولتحويل المعادلات (5.1) , (5.2) , (5.3) و (5.4) إلى معادلات خطية نقوم بحذف الحدود اللاخطية منها لنحصل على :

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} = 0 . \quad \dots(5.6)$$

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^{*2}} \right] + H\theta_2 \cos \varphi . \quad \dots(5.7)$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p_2^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial y^{*2}} \right] - H\theta_2 \sin \varphi . \quad \dots(5.8)$$

$$\sqrt{\text{Ra Pr}} \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial t^*} \right] = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^{*2}} + \text{Pr Ec} \left[\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial x^{*2}} \right)^2 \right] . \quad \dots(5.9)$$

6. الاضطراب الحاصل بالاتجاهين x, y

لإيجاد الحل للمعادلات (5.6) , (5.7) , (5.8) و (5.9) , نتصور أن الاضطراب حاصل بالاتجاهين x, y وان السعة متغيرة عندئذ يمكن كتابة المعادلات بالصورة الآتية [1] :

$$\left. \begin{aligned} u_2^* &= u(y)e^{ikx+at} \\ v_2^* &= v(y)e^{ikx+at} \\ p_2^* &= p(y)e^{ikx+at} \\ \theta_2 &= \theta(y)e^{ikx+at} \end{aligned} \right\} . \quad \dots(6.1)$$

إذ أن k تمثل قيمة حقيقية لا بعدية لطول الموجة بالاتجاهين x, y و a تمثل سرعة الموجة وهي قيمة معقدة (complex) $(a = a_1 + ia_2)$ وان القيمة الموجبة أو السالبة ل a_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي إلى نمو الاضطراب أو تلاشيها على التوالي . فعندما تكون $a_1 > 0$ فالمنظومة تكون غير مستقرة (unstable) وعندما تكون $a_1 < 0$ فالمنظومة تكون مستقرة (stable) .
كما أن $u(y), v(y), p(y), \theta(y)$ تمثل سعة الموجة (Amplitude functions) .

و بتعويض (6.1) في المعادلات (5.6) , (5.7) , (5.8) و (5.9) ومع فرض $\varphi = 0^\circ$ نحصل على المنظومة التالية :

$$\left. \begin{aligned} u' &= h \\ h' &= Au + Bp - C\theta \\ p' &= -Bh - Zv \\ v' &= -Eu \\ \theta' &= s \\ s' &= F\theta - Gu - Mp + Jv \end{aligned} \right\} \dots(6.2)$$

حيث ان

$$\begin{aligned} A &= a \operatorname{Re} + K^2, \quad B = ik \operatorname{Re}, \quad C = -H \operatorname{Re}, \quad Z = -(a + \frac{k^2}{\operatorname{Re}}), \quad E = -\frac{ik}{\operatorname{Re}} \\ F &= a\sqrt{Ra \operatorname{Pr}} + k^2 + \operatorname{Pr} EcH \operatorname{Re}, \quad G = -\operatorname{Pr} Ec(a \operatorname{Re} + k^2), \quad M = -ik \operatorname{Pr} Ec \operatorname{Re} \\ J &= \operatorname{Pr} Eck^2 \end{aligned}$$

وبإيجاد القيم الذاتية للمنظومة (6.2) نحصل على المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^6 + (B^2 - F - A)\lambda^4 + (AF - CG - B^2F + BCM - EZB)\lambda^2 + (EJC)\lambda + \dots \\ \dots &+ (ZECM - ZEBF) = 0 \end{aligned} \dots(6.3)$$

بينما عندما تكون $\varphi = 45^\circ$ تتكون لدينا المنظومة التالية :

$$\left. \begin{aligned} u' &= h \\ h' &= Au + Bp - C\theta \\ p' &= -Bh - Zv - (\frac{H}{\sqrt{2}})\theta \\ v' &= -Eu \\ \theta' &= s \\ s' &= F\theta - Gu - Mp + Jv \end{aligned} \right\} \dots(6.4)$$

حيث أن

$$\begin{aligned} A &= a \operatorname{Re} + k^2, \quad B = ik \operatorname{Re}, \quad C = -\frac{H \operatorname{Re}}{\sqrt{2}}, \quad Z = -(a + \frac{k^2}{\operatorname{Re}}), \quad E = -\frac{ik}{\operatorname{Re}}, \\ W &= \frac{H}{\sqrt{2}}, \quad F = a\sqrt{Ra \operatorname{Pr}} + k^2 + \frac{\operatorname{Pr} EcH \operatorname{Re}}{\sqrt{2}}, \quad G = -\operatorname{Pr} Ec(a \operatorname{Re} + k^2), \\ M &= ik \operatorname{Re} \operatorname{Pr} Ec, \quad J = \operatorname{Pr} Eck^2 \end{aligned}$$

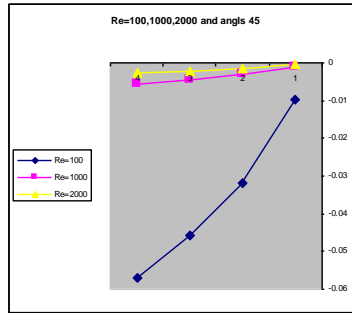
وبإيجاد القيم الذاتية للمنظومة (6.4) نحصل على المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^6 + (B^2 - F - A)\lambda^4 + (-WM)\lambda^3 + (CBM + AF - B^2F - BEZ - CG)\lambda^2 + \dots \\ \dots &+ (AMW - CEJ - BGW)\lambda + (BEZF - CEZM - BEJW) = 0 \end{aligned} \dots(6.5)$$

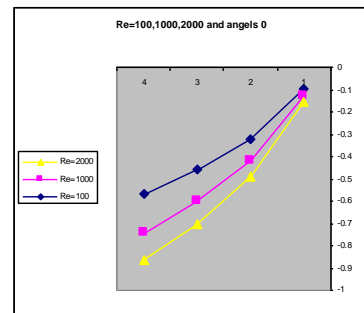
وبحل المعادلات (6.3) و(6.5) باستخدام نظام (Maple 11) [6] يتبين لدينا تأثيرات عدد رينولد (Re) وعدد برانتدل (Pr) وعدد رايلي (Ra) بالإضافة إلى تأثير الميلان وكما مبين في الأشكال (2,3,4,5,6,7,8,9,10).

7. الاستنتاجات (Conclusions)

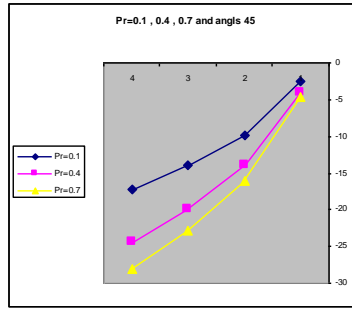
في هذا العمل قمنا بإيجاد سرعة الموجة α والتي تحدد مدى استقرارية الجريان وهي تمثل قيمة معقدة وان القيمة السالبة لجزئه الحقيقي هي من تحدد نمو الاضطراب من تلاشييه . لقد تمت تجزئة نظام المعادلات إلى جزأين جزء مستقر ويكون صغيرا جدا مقارنة بالجزء غير المستقر والذي يلعب دورا أساسيا في تحليل الاستقرارية وبعد إيجاد المحددة للمعادلات (6.3) و(6.5) استطعنا أن نوجد المعاملات التي تؤثر على الاستقرارية , حيث لوحظ انه كلما زاد عدد رينولد (Re) ابتعدنا عن الاستقرار عندما تكون الزاوية (0°) وعلى العكس تماما عندما تكون الزاوية (45°) أي كلما زاد عدد رينولد اقتربنا من الاستقرار وكما مبين في الأشكال (2,9,3). كذلك لاحظنا أن عند زيادة عدد برانتدل (Pr) كلما ابتعدنا عن الاستقرار عندما تكون الزاوية (0° و 45°) على التوالي أي أن تأثير الميلان يكون طفيفا وكما مبين في الأشكال (4,5,8). وكذلك الحال بالنسبة لعدد رايلي , أي أن كلما زاد عدد رايلي ابتعدنا عن الاستقرار في الحالتين (0° و 45°) وكما مبين في الأشكال (6,7,10).



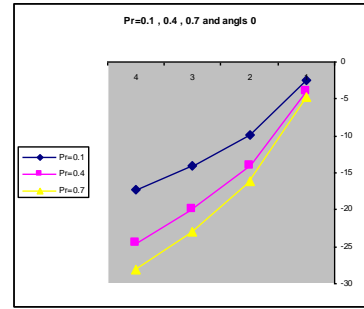
الشكل (3)



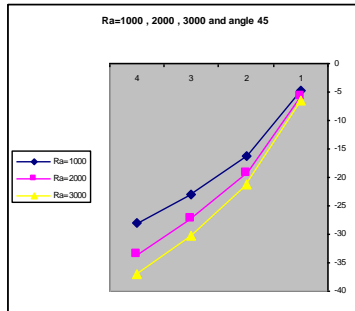
الشكل (2)



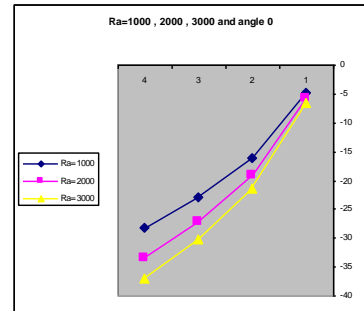
الشكل (5)



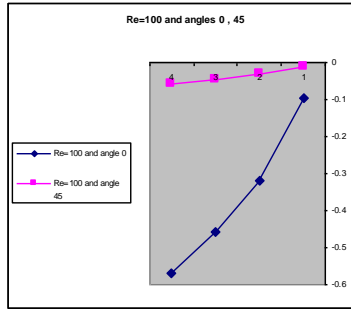
الشكل (4)



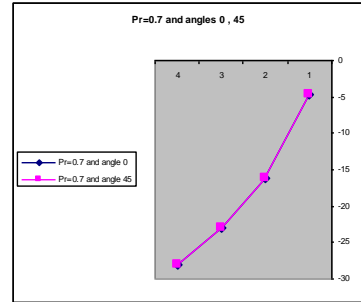
الشكل (7)



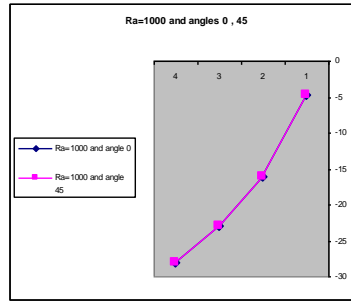
الشكل (6)



الشكل (9)



الشكل (8)



الشكل (10)

المصادر

- [1] Ala'a A.H. & Ahmed M. J. ,(2012), " A theoretical study of stability of flowing and heat transfer systems in vessels and channels " , Ph.D. Thesis , Mosul university.
- [2] Ahmed M.J. & Osama T. ,(2010), " heat transfer in a glazing cavities " , M.Sc. Thesis , Mosul university .
- [3] Elsherbiny S.M. , Raithby G.D. & Hollands k.G. ,(1982)," heat transfer by natural convection across vertical and inclined Air layers " ,transactions of the ASME , Vol.104 , p.p 96-102 .
- [4] Hollands K.G.T. & Konicek L. ,(1973), " Experimental study of the stability of differentially heated inclined Air layers " Int. J. of heat and mass transfer , Vol.16, p.p 1467-1476.
- [5] Kimura S. & Bejan A. ,(1984), " The boundary layer natural convection Regimes in rectangular cavity with uniform heat flux from the side " , J. of heat transfer , Vol. 106 , p.p 98-102 .
- [6] Monagan M.B. ,(2003)," Maple 11 Advanced programming guide " .
- [7] Soong C.Y. , Tzeng P.Y. , Chiang D. C. & Sheu T.S. ,(1996)," Numerical study on Mode-transition on natural convection in differentially heated inclined enclosure " Int. J. of Heat and Mass Transfer , Vol. 39 , No. 14 , pp. 2869-2882 .
- [8] Wilkes J.O. & Churchill S.W. ,(1966), " The finite difference computation of natural convection in a rectangular enclosure " A.I.che Journal , Vol. 12 , No. 1 , p.p 161-167 .
- [9] Yang Y. ,(2003)," Natural convection flow and heat transfer in vertical and Inclined glazing cavities " , M.Sc. Thesis , University of Massachusetts.