About Fuzzy Differential Equations

Basil Younis Thanoon — *College of Comp. Sc. and Math.*
Asmaa Ziyad Al-Katib — *College of Basic Education*
University of Mosul

Received on: 22/4/2013 **Accepted on : 24/6/2013**

ABSTRACT

This paper deals with the fuzzy initial value problem and how to solve a linear fuzzy differential equation of first order when the initial condition is a triangle fuzzy number. This problem is then developed to the case when the initial condition is a trapezoidal fuzzy number. The paper includes also the issue of the representation of a system of linear fuzzy differential equations, a more general system of linear fuzzy differential equations is then proposed and the solution of this system is also given. An illustrative examples are given in order to consolidate the raised ideals.

Keywords: Fuzzy , Differential Equations.

حول المعادلات التفاضلية المضببة

باسل يونس ذنون — *كلية علوم الحاسوب والرياضيات*
أسماء زياد الكاتب — *كلية التربية الأساسية*
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2013/4/22 **تاريخ قبول البحث: 2013/6/24**

الملخص

يتناول هذا البحث مسألة القيمة الابتدائية المضببة وكيفية حل معادلة تفاضلية خطية مضببة من المرتبة الأولى عندما يكون الشرط الابتدائي عدداً مضبباً بشكل مثلثي. ويتم تطوير هذه المسألة إلى الحالة التي عندها يكون الشرط الابتدائي عدداً مضبباً بشكل شبه منحرف. كما يتناول مسألة تمثيل نظام من المعادلات التفاضلية الخطية المضببة، وتم اقتراح نظام تفاضلي أكثر عمومية فضلا عن حل هذا النظام. وتعطى أيضا بعض الأمثلة التوضيحية من اجل ترسيخ الأفكار المعروضة.

الكلمات المفتاحية : المضبب ، المعادلات التفاضلية.

1. المقدمة

نظراً لأهمية النظم الحركية المضببة وظهور الحاجة إلى المعادلات التفاضلية المضببة FDEs التي لها وظائف تخدم مشاكل العالم الحالي في كثير من المجالات، فقد تم تطوير حسبان التفاضل والتكامل المضبب بشكل مطرَد، وكان هناك العديد من الدراسات حول هذا الموضوع وقُدّمت العديد من العمليات والصيغ الرياضية لمعالجة مثل هذه الأنظمة، مما جعل هذا الموضوع يحقق تنمية سريعة، وكان أستاذ الرياضيات في جامعة بكين بالصين ليو باودينغ (Liu Baoding) من الّذين عملوا في هذا المجال، فقد قام ليو بدراسة المعادلات التفاضلية المضببة

ووضع صيغة جديدة للفرق بين عددين مضببينy وx بالشكل $x = y+z$ والذي يعد تعميماً للفرق الهازدورفي Hausdorff Difference، كما طرح نموذج الأسهم المضبب المعروف باسم نموذج أسهم ليو Liu's Stocks Model [11] وعرَّف العملية المضببة Fuzzy Process التي اعتمد عليها بعد ذلك الباحث [9] في تعريف مشتقة العملية المضببة Derivative of Fuzzy Process.

يتناول هذا البحث مسألة القيمة الابتدائية المضببة، لقد بيّن الباحث [2] كيفية حل المعادلة التفاضلية الخطية المضببة من المرتبة الأولى عندما يكون الشرط الابتدائي عدداً مضبباً بشكل مثلثي، وسنحاول في هذا البحث تطوير هذه المسألة عندما يكون الشرط الابتدائي عدداً مضبباً بشكل شبه منحرف. كما يتناول هذا البحث مسألة تمثيل نظام من المعادلات التفاضلية الخطية المضببة. فقد بيّن الباحث [9] كيفية حل نظام معين من المعادلات التفاضلية الخطية المضببة، وسنقوم في هذا البحث بتطوير هذا النظام إلى نظام أكثر عمومية مع ذكر بعض الأمثلة التوضيحية.

2. تعاريف أساسية Basic Definitions

يتضمن هذا المبحث بعض التعاريف الأساسية التي نحتاج اليها في المباحث اللاحقة، ويمكن الرجوع إلى المصادر [10,7,6,5] للإطلاع عليها.

التعريف (1) [5]: لتكن X هي مجموعة شاملة، فإن **المجموعة المضببة** Fuzzy set A من X هي مجموعة كل الأزواج المرتبة بالشكل: $A=\{ (x ,A(x)) \}$ لجميع قيم $x\in X$، إذ إن **دالة العضوية** Membership Function $A(x)$ هي درجة انتماء العنصر x إلى المجموعة A وتعرَّف على النحو الآتي:

$A : X\to [0,1]$.

التعريف (2) [5]: إن مجموعة العناصر التي لها درجة انتماء أكبر من أو تساوي بعض قيم α المختارة ضمن الفترة [0,1] هي مجموعة بيّنة يرمز لها A_α والتي تسمى قطع$-\alpha$ ($\alpha-$cut) للمجموعة A، ويعبَّر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي:

$A_\alpha=\{x \in X: A(x)\geq \alpha \}$,

لجميع قيم $\alpha \in [0,1]$.

التعريف(3) [5]: إن **الداعم** (Support) للمجموعة المضببةA يُعرَّف على النحو الآتي:

$Supp (A) = \{x \in X: A(x)>0\}$.

التعريف(4) [5]: يقال لمجموعة مضببة A من X أنها محدبة Convex إذا كان لكل عنصرين $x_1,x_2 \in X$ ولكل $\lambda \in [0,1]$ يكون:

$A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min \{ A(x_1), A(x_2)\}$.

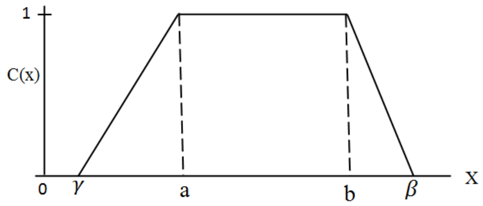
التعريف(5) [7]: إن المجموعة الجزئية المضببة C من خط الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مع دالة الانتماء $C(x): \mathbb{R}\to[0,1]$ تسمى **عدداً مضبباً** (Fuzzy Number) إذا تحقق كل مما يأتي:

1. C هي مجموعة مضببة اعتيادية Normal ، أي إنه يوجد عنصر $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث إن $C(x_0)= 1$.
2. C هي مجموعة مضببة محدبة.

3. C_α فترة مغلقة لجميع قيم $\alpha \in [0,1]$.
4. إن الداعم للمجموعة المضببة C يكون مقيداً Bounded.

التعريف(6) [10]: يُعرَّف **العدد المضبب شبه المنحرف** C (Trapezoidal Fuzzy Number) بأربعة أعداد هي $\gamma < a < b < \beta$ ، إذ إن الفترة $[\gamma, \beta]$ تمثل قاعدة شبه المنحرف وهي الداعم للعدد C. وإذا كان $a-\gamma=\beta-b$ فإن العدد C يسمى **عدد مضبب شبه منحرف متناظر** (Symmetric Trapezoidal Fuzzy Number). إن المخطط البياني لهذا العدد موضح في الشكل(1) ودالة الانتماء للعدد المضبب شبه المنحرف C تُعرَّف تحليلياً على النحو الآتي:

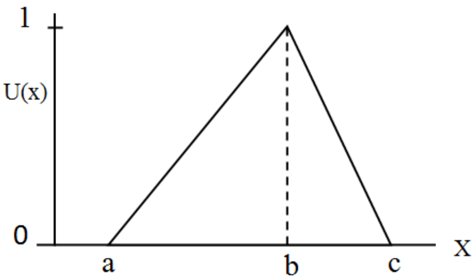
$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-\gamma}{a-\gamma} & ; \quad \gamma \le x \le a \\ 1 & ; \quad a \le x \le b \\ \frac{\beta-x}{\beta-b} & ; \quad b \le x \le \beta \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$



الشكل (1) العدد المضبب شبه المنحرف C

التعريف(7) [10]: نرمز **للعدد المضبب المثلثي** (Triangle Fuzzy Number) بالرمز U=(a,b,c)، إذ إن الفترة [a,c] هي الداعم للعدد U, وان $a < b < c$. وإذا كان b-a=c-b فان العدد U يسمى عدد مضبب مثلثي متناظر(Symmetric Triangle Fuzzy Number). إن المخطط البياني لهذا العدد موضح في الشكل(2) ودالة الانتماء للعدد المضبب المثلثي U تُعرَّف تحليلياً على النحو الآتي:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & ; \quad a \le x \le b \\ \frac{c-x}{c-b} & ; \quad b < x \le c \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$



الشكل (2) العدد المضبب المثلثي U

ملاحظة (1): إن قطع$-\alpha$ للعدد المضبب C يعرَّف على $\mathbb{R}$ على النحو الآتي:

$$C_\alpha=\{x \in \mathbb{R} : C(x) \ge \alpha \} \; ; \; \alpha \in (0,1)$$

ملاحظة(2): نرمز إلى مجموعة الأعداد المضببة بالرمز $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ وتسمى $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ **بفضاء الأعداد المضببة** Space of Fuzzy Numbers، من الواضح أن $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

التعريف(8) [6]: إن **تمثيل قطع− α** (α −Representation) للعدد المضببC هو زوج مرتب من الدوال $[L_c(\alpha), R_c(\alpha)]$ كلاهما معرَّف من الفترة [0,1] إلى$\mathbb{R}$ على النحو الأتي:

$$L_c(\alpha) = \inf\{ x : x \in C_\alpha \},$$
$$R_c(\alpha) = \sup\{ x : x \in C_\alpha \},$$

لكل $\alpha\in[0,1]$. وعلى ضوء ذلك يمكن كتابة العدد المضبب C بالشكل $C = [L_c ,R_c]$.

3. المعادلات التفاضلية الخطية المضببة: Linear Fuzzy Differential Equations

بعد ظهور المنطق المضبب بدأ استخدامه في شتى المجالات الرياضية، ومن تلك المجالات المعادلات التفاضلية. فقد طرح لطفي زادة للمرة الأولى بعض الأفكار الأولية لاستخدام المنطق المضبب في مجال المعادلات التفاضلية، وبعد ذلك قام باحثون بالتعمق بهذا الموضوع بشكل اكبر. وفي السنوات الأخير برزت أهمية المعادلات التفاضلية المضببة باعتبارها واحدة من أهم فروع الرياضيات الحديثة، وإن لديها تطبيقات واسعة في نظرية الاحتمالات، كما إنها الأداة الأساسية لتشكيل النظم الحركية المضببة، والمعادلات التفاضلية الخطية المضببة من المرتبة الأولى هي واحدة من أبسط أنواع هذه المعادلات والتي تظهر في العديد من التطبيقات [4].

التعريف(9) [9]: إن **العملية المضببة** Fuzzy Process $\{y(x) : x \in I\}$ هي عبارة عن دالة معرفة على فترة من الأعداد الحقيقية I إلى فضاء الأعداد المضببة$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ وتعرَّف على النحو الآتي:

$$y : I \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

إن مشتقة العملية المضببة y(x)، يرمز لها $y'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ ، تعرَّف بواسطة تمثيل قطع−α على النحو الآتي:

$$y'(x, \alpha) = [L_{y'}(x, \alpha) , R_{y'}(x, \alpha)], \qquad 0< \alpha\leq 1.$$

التعريف(10) [9]: إذا احتوت المعادلة الرياضية على عملية مضببة مع بعض مشتقاتها عندئذ تسمى **معادلة تفاضلية مضببة** Fuzzy Differential Equation.

التعريف(11) [3] : لتكن $D: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ وليكن $U,V \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ إذ إن

$U_\alpha =[L_U(\alpha) , R_U(\alpha)]$ و $V_\alpha =[L_V(\alpha) , R_V(\alpha)]$ فإن **مسافة هازدورف** Hausdorff Distance بين العددين U و V تعرّف على النحو الآتي:

$$D(U,V) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|L_U(\alpha) - L_V(\alpha)| , |R_U(\alpha) - R_V(\alpha)|\},$$

إن مسافة هازدورف تحقق الخصائص التالية:

1. $D(U+W ,V+W) = D(U,V), \ \forall U,V,W\in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$
2. $D(k.U ,k.V) = |k|D(U,V), \ \forall k \in \mathbb{R}, \ \forall U,V \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$
3. $D(U+V ,W+E) \leq D(U,W) + D(V,E), \ \forall U,V,W,E \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$

وبالتالي فإن $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}},D)$ يمثل فضاء متري تام complete metric space.

التعريف(12) [4] : يقال أن الدالة$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ هي **دالة مضببة مستمرة** Fuzzy Continuous Function عند النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ ، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ و يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow D(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$

التعريف(13) [2] : ليكن $x,y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. إذا كان هناك عدداً مضبباً $z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ بحيث إن: $x = y+z$، فإن z يسمى **فرق H−** H-Difference بين x و y ويرمز لذلك بالرمز $x-y$.

التعريف(14) [2] : لتكن (a,b) فترة حقيقية والدالة $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ وكان $x_0 \in (a,b)$. تكون الدالة f **قابلة للاشتقاق بقوة** Strongly Generalized Differentiable عند النقطة x_0، إذا وجد عدد $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ بحيث يتحقق أيٍ من الشروط الآتية:

1. لكل عدد صغير بما فيه الكفاية $h>0$ يوجد عددان $f(x_0+h)- f(x_0)$ و $f(x_0)- f(x_0-h)$ والغايتان:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x0+h)- f(x0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x0)- f(x0-h)}{h} = f'(x_0)$$

2. لكل عدد صغير بما فيه الكفاية $h>0$ يوجد عددان $f(x_0)- f(x_0+h)$ و $f(x_0-h)- f(x_0)$ والغايتان:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x0)- f(x0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x0-h)- f(x0)}{-h} = f'(x_0)$$

3. لكل عدد صغير بما فيه الكفاية $h>0$ يوجد عددان $f(x0+h)- f(x0)$ و $f(x0-h)- f(x0)$ والغايتان:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x0+h)- f(x0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x0-h)- f(x0)}{-h} = f'(x_0)$$

4. لكل عدد صغير بما فيه الكفاية $h>0$ يوجد عددان $f(x0)- f(x0+h)$ و $f(x0)- f(x0-h)$ والغايتان:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x0)- f(x0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x0)- f(x0-h)}{h} = f'(x_0)$$

التعريف(15) [2] : لتكن $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ وليكن $x_0 \in (a,b)$. تعرّف **مسألة القيمة الابتدائية المضببة** Fuzzy Initial Value Problem على النحو الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

حيث أن $y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

إذا كانت كل من $\{y_n(x)\}$ و$\{y'_n(x)\}$ متتالية من الدوال ومشتقاتها على التوالي فإن **التكرار المتعاقب** Successive Iterations يعطى بالعلاقة الآتية:

$$y(x_0) = y_0$$
$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t,y_n(t))\, dt$$

كذلك

$$y'(x_0) = y_0$$
$$y'_{n+1}(x) = y_0 - (-1) . \int_{x0}^{x} f(t,y'_n(t))\, dt.$$

4. حل المعادلات التفاضلية المضببة

لقد بين الباحث [2] كيفية حل المعادلة التفاضلية الخطية المضببة من المرتبة الأولى بالشكل:

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = ay(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

حيث أن $a \in \mathbb{R}$ و $y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ والدالة $b:(x_0,x_1) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. وقد اعتبر[2] أن الأعداد المضببة في المعادلة التفاضلية أعداد مثلثية الشكل، وقد اعتمد على فكرة أن العدد المضبب المثلثي U مثلاً له الخاصية الآتية:

$L_U(1) = R_U(1) = U(1)$. فإذا رمزنا للعدد المضبب المثلثي U بالرمز U=(a,b,c)، فإن العدد U تحدد قيمته بالأعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، إذ إن الفترة [a,c] هي الداعم للعدد U وأن $c > b > a$، وإنه لجميع قيم $\alpha \in [0,1]$ فإن:

$$L_U(\alpha) = (b-a)\alpha + a$$
$$R_U(\alpha) = c - (c-b)\alpha$$

وبالتالي يكون $L_U(1) = R_U(1) = U(1) = b$.

النتيجة الآتية تبين الشرط الكافي لكي يكون فرق−H بين العددين المضببين المثلثين U,V موجود.

النتيجة (1) [2]: ليكن V و U عددين مضببين مثلثين بحيث إن:

$$U(1) - L_U(0) > 0,\ R_U(0) - U(1) > 0,$$
$$R_V(0) - L_V(0) \leq \min\{U(1) - L_U(0),\ R_U(0) - U(1)\}.$$

فإن فرق−H U-V يكون موجوداً.

المبرهنة الآتية تبين كيفية حل للمعادلة التفاضلية المضببة (1) وتسمى **مبرهنة تغيير الثوابت للمعادلة التفاضلية المضببة** Variation of Constants Formula for Fuzzy Differential Equations .

المبرهنة (1) [2]: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية المضببة (1) فإنه توجد إحدى الحالتين الآتيتين:

1. إذا كان a>0 فإن:

$$y(x) = e^{a(x-x0)}\left[y_0 + \int_{x0}^{x} b(t) \cdot e^{-a(t-x0)}\, dt\right]$$

هو حل للمعادلة التفاضلية المضببة (1) وإن y(x) دالة قابلة للاشتقاق بقوة من النوع (1) حسب التعريف (14).

2. إذا كان a<0 وكان فرق−H للمقدار

$$\int_{x0}^{x}(-b(t)) \cdot e^{-a(t-x0)}\, dt \ - \ y_0$$

موجود فإن:

$$y(x) = e^{a(x-x0)}\left[y_0 - \int_{x0}^{x}(-b(t)) \cdot e^{-a(t-x0)}\, dt\right]$$

هو حل للمعادلة التفاضلية المضببة (1) وإن y(x) دالة قابلة للاشتقاق بقوة من النوع (2) حسب التعريف (14).

5. حل المعادلات التفاضلية المضببة عندما يكون الشرط الابتدائي عدد مضبب بشكل شبه منحرف

سنحاول في هذا المبحث تطوير مسألة حل المعادلات التفاضلية المضببة عندما يكون الشرط الابتدائي عدداً بشكل شبه منحرف. فلو رمزنا للعدد المضبب شبه المنحرف U بالرمز $U = (a,b,\gamma,\beta)$ إذ إن الفترة $[a-\gamma, b+\beta]$ هي الداعم للعدد U ، وان b>a، وإنه لجميع قيم $\alpha \in [0,1]$ فان:

$$L_U(\alpha) = \gamma\alpha + a - \gamma$$
$$R_U(\alpha) = b + \beta - \beta\alpha$$

النتيجة الآتية تعود للباحثة وهي تبين الشرط الكافي لكي يكون فرق−H بين العددين المضببين U و V بشكل شبه منحرف موجود.

النتيجة (2): ليكن V و U عددين مضببين بشكل شبه منحرف بحيث إن:

$$L_U(1) - L_U(0) > 0,\ R_U(0) - R_U(1) > 0,$$
$$R_V(0) - L_V(0) \leq \min\{L_U(1) - L_U(0),\ R_U(0) - R_U(1)\}.$$

فإن فرق−H U-V موجود.

البرهان: بما أن U عدد شبه منحرف فإنه حسب تعريف العدد المضبب بشكل شبه منحرف يكون:

$R_U(1) > L_U(1)$

ليكن

$U(1) = \frac{R_U(1)+L_U(1)}{2}$

وبالتالي فإن:

$R_U(1) > U(1) > L_U(1)$

ولما كان

$L_U(1) - L_U(0) > 0 \quad , R_U(0) - R_U(1) > 0$

فإن:

$U(1) - L_U(0) > 0 \ , \ R_U(0) - U(1) > 0$

كذلك

$\min\{ L_U(1) - L_U(0) , R_U(0) - R_U(1)\} \leq \min\{ U(1) - L_U(0) , R_U(0) - U(1)\}$

ولما كان

$R_V(0) - L_V(0) \leq \min\{ L_U(1) - L_U(0) , R_U(0) - R_U(1)\}$

وبالتالي فإن:

$R_V(0) - L_V(0) \leq \min\{ U(1) - L_U(0) , R_U(0) - U(1)\}$

أي أن شروط النتيجة (1) تتحقق وبالتالي فإن فرق- H بين U-V موجود.

ملاحظة: إذا كان Uعدداً مضبباً بشكل شبه منحرف $U=(a,b,\gamma,\beta)$ وكان V عدداً حقيقياً فإنه يمكن كتابة Vبشكل عدد شبه منحرف على النحو الاتي: $V=(V,V,0,0)$ وبالتالي يكون فرق- H بين U وV موجود دائماً.

المثال (1): إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية المضببة الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = -3y(x) +9\, x \\ y(0) = (3,4,1,1) \end{array}\right\} \qquad \ldots(2)$$

نلاحظ أن $a = -3 < 0$ كذلك فإن فرق-H للمقدار $y_0 - \int_{x0}^{x}[-b(t)]\, e^{-a(t-x0)}\, dt$ يكون على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} y_0 - \int_{x0}^{x}[-b(t)]\, e^{-a(t-x0)}\, dt &= (3,4,1,1) - \int_{0}^{x}(-9t)\, e^{3t}\, dt \\ &= (3,4,1,1) + 3x\, e^{3x} - e^{3x} + 1 \\ &= (4,5,1,1) + 3x\, e^{3x} - e^{3x} \end{aligned}$$

وهذا المقدار موجود لجميع قيم $x \in [x_0 , \infty)$ ، لذلك فإنه حسب المبرهنة **(1)** يكون حل المعادلة التفاضلية المضببة **(2)** على النحو الآتي:

$y(x) = e^{-3x}\, [(4,5,1,1) + 3x\, e^{3x} - e^{3x}]$.

نلاحظ انه عندما تكون $x = -1$ فإن حل المعادلة التفاضلية المضببة (2) سيكون العدد المضبب شبه المنحرف $y(-1) = (76.342, 96.427, 1, 1)$، وعندما تكون $x = 0$ فإن حل المعادلة التفاضلية المضببة (2) سيكون العدد المضبب $y(0) = (3,4,1,1)$ وهي القيمة الابتدائية نفسها المعطاة في المثال، أما عندما تكون $x = 1$ فإن حل المعادلة التفاضلية المضببة (2) سيكون العدد المضبب $y(1) = (2.199, 2.248, 1, 1)$. ونترك للقارئ مسألة رسم الحل، علماً أنه حسب علمنا لا توجد طريقة معروفة لرسم مثل هكذا دوال.

6. نظام المعادلات التفاضلية الخطية المضببة System of Linear Fuzzy Differential Equations

لنفرض أن لدينا نظام المعادلات الخطية المضببة الآتي:

$AX = Y$ …(3)

حيث أن مصفوفة المعاملات $A=[a_{ij}]$، $1 \le i,j \le n$ هي مصفوفة اعتيادية، وأن y_i و x_i ، $1 \le i \le n$ هي أعداد مضببة.

التعريف(16) [8]: إن متجه الأعداد المضببة $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^t$ حيث أن:

$x_j = (L_{x_j}(\alpha), R_{x_j}(\alpha))$, $1 \le j \le n$, $0 < \alpha \le 1$

يسمى حل النظام الخطي المضبب (3) إذا كان:

$$L_{\sum_{j=1}^{n} aij\ xj} = \sum_{j=1}^{n} L_{aij\ xj} = L_{yi}$$

و

$$R_{\sum_{j=1}^{n} aij\ xj} = \sum_{j=1}^{n} R_{aij\ xj} = R_{yi}$$

لجميع قيم $1 \le i \le n$، حيث أن L و R معرَّفة في التعريف (8).

يمكن أن نحصل من النظام الخطي (3) على النظام الخطي الاعتيادي بسعة $2n \times 2n$ على النحو الآتي [1]:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_X \\ R_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_Y \\ R_Y \end{pmatrix} \qquad \ldots(4)$$

حيث أن

$(L_X, R_X)^t = (L_{x1}, L_{x2}, \ldots, L_{xn}, R_{x1}, R_{x2}, \ldots, R_{xn})^t$,
$(L_Y, R_Y)^t = (L_{y1}, L_{y2}, \ldots, L_{yn}, R_{y1}, R_{y2}, \ldots, R_{yn})^t$

والعناصر s_{ij} تحدد قيمتها على النحو الآتي:

إذا كانت $0 \le a_{ij}$ فإن:

$s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}$

وإذا كانت $0 > a_{ij}$ فإن:

$s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = a_{ij}$

وباقي قيم s_{ij} تساوي صفر، بحيث أن مصفوفة المعاملات $A = S_1 + S_2$.

التعريف(17) [9] : إذا كان لدينا النظام الآتي:

$$\left.\begin{aligned} & Y'(x) = AY'(x) + BY(x) \\ & Y(0) = Y_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(5)$$

حيث أن المصفوفتان A وB مصفوفتان اعتياديتان بسعة $n \times n$، والمتغير المستقل x متغير اعتيادي، والشرط الابتدائي Y_0 هو متجه من الأعداد المضببة، عندها يسمى النظام (5) **بنظام المعادلات التفاضلية الخطية المضببة.**

7. حل نظام المعادلات التفاضلية الخطية المضببة

لقد بين الباحث [9] كيفية حل نظام المعادلات التفاضلية المضببة (5) وسنقوم في هذا البحث بتطوير النظام السابق الى النظام الآتي:

$$\left.\begin{aligned} & Y'(x) = AY'(x) + BY(x).x^r \\ & Y(0) = Y_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(6)$$

حيث $r \in \mathbb{R}$ ، $r \ge 0$ كما سنقوم بحل النظام الجديد بالاستفادة من الطريقة المقترحة في[9] وعلى النحو الآتي:

نعرّف المصفوفتان S و T بسعة $2n \times 2n$ على النحو الآتي:

إذا كانت $a_{ij} \geq 0$ فإن:

$s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}$

وإذا كانت $a_{ij} < 0$ فإن:

$s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = a_{ij}$

كذلك إذا كانت $b_{ij} \geq 0$ فإن:

$t_{ij} = t_{i+n,j+n} = b_{ij}$

وإذا كانت $b_{ij} < 0$ فإن:

$t_{i+n,j} = t_{i,j+n} = b_{ij}$

لجميع قيم $1 \leq i, j \leq n$، وباقي قيم t_{ij} و s_{ij} تساوي صفر وباستخدام خواص المصفوفات نحول النظام (6) إلى نظام خطي بسعة $2n\times2n$ على النحو الآتي:

$IY'(x,\alpha) = SY'(x,\alpha) + TY(x,\alpha) .x^r$

وبالتالي نحصل على النظام الآتي:

$$\left.\begin{array}{l}(I-S)Y'(x,\alpha) = TY(x,\alpha) .x^r,\\ Y(0,\alpha) = Y_0.\end{array}\right\} \qquad \ldots(7)$$

حيث أن I (المصفوفة الأحادية Identity) والمصفوفتان $S=[s_{ij}]$ و $T=[t_{ij}]$ بسعة $2n\times2n$ وأن:

$$Y'(x,\alpha) = \begin{bmatrix} L_{y_1'}(x,\alpha) \\ \vdots \\ L_{y_n'}(x,\alpha) \\ R_{y_1'}(x,\alpha) \\ \vdots \\ R_{y_n'}(x,\alpha) \end{bmatrix},\ Y(x,\alpha) = \begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ \vdots \\ L_{y_n}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ \vdots \\ R_{y_n}(x,\alpha) \end{bmatrix},\ Y_0 = \begin{bmatrix} L_{y_{01}}(0,\alpha) \\ \vdots \\ L_{y_{0n}}(0,\alpha) \\ R_{y_{01}}(0,\alpha) \\ \vdots \\ R_{y_{0n}}(0,\alpha) \end{bmatrix},$$

فإذا كانت المصفوفة (I-S) غير مفردة Nonsingular (لها معكوس) نحصل على مايلي:

$$\left.\begin{array}{l}Y'(x,\alpha) = MY(x,\alpha) .x^r,\\ Y(0,\alpha) = Y_0.\end{array}\right\} \qquad \ldots(8)$$

حيث أن

$M = (I-S)^{-1}T.$

وبالتالي إذا كانت $W=\frac{1}{r+1}.M$ فإن حل نظام المعادلات التفاضلية (8) يكون على النحو الآتي:

$Y(x,\alpha) = \exp(x^{r+1}W).Y_0$

حيث أنه يمكن حساب قيمة الدالة الأسية (exponential function) للمصفوفة W باستخدام صيغة متسلسلة تايلور للمصفوفات على النحو الآتي:

$$\exp(x^{r+1}W) = I + x^{r+1}W + \frac{x^{2r+2}}{2!}W^2 + \frac{x^{3r+3}}{3!}W^3 + \ldots \qquad \ldots(9)$$

ويمكن الحصول على قيمة تقريبية للحل عند قيمة معلومة للمتغير x وبعدد محدد m من حدود المتسلسلة (9)، ويكون الحل التقريبي للنظام (8) على النحو الآتي:

$$Y(x,\alpha) \approx K_m Y_0(0,\alpha) \qquad \ldots(10)$$

حيث أن:

$K_m = I + x^{r+1}W + \frac{x^{2r+2}}{2!}W^2 + \ldots + \frac{x^{mr+m}}{m!}W^m.$

المثال (2): إذا كان لدينا النظام التفاضلي الآتي:

$$\left.\begin{aligned} &Y'(x) = AY'(x) + BY(x).x^2 \\ &Y(0) = Y_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(11)$$

حيث أن $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ والقيم الابتدائية هي الأعداد المضببة: y_{01} يكافئ "تقريبا **3**" و y_{02} يكافئ "تقريبا 2". لحل النظام (11) نحسب المصفوفتان S و T على النحو الآتي:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام المعادلة (7) نحصل على ما يلي:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{y_1'}(x,\alpha) \\ L_{y_2'}(x,\alpha) \\ R_{y_1'}(x,\alpha) \\ R_{y_2'}(x,\alpha) \end{bmatrix} = x^2. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ L_{y_2}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ R_{y_2}(x,\alpha) \end{bmatrix}$$

ومن اجل إيجاد المصفوفة M نحسب معكوس المصفوفة (I-S) على النحو الآتي:

$$(I-S)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; M = (I-S)^{-1}T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على النظام التفاضلي الآتي:

$$\begin{bmatrix} L_{y_1'}(x,\alpha) \\ L_{y_2'}(x,\alpha) \\ R_{y_1'}(x,\alpha) \\ R_{y_2'}(x,\alpha) \end{bmatrix} = x^2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ L_{y_2}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ R_{y_2}(x,\alpha) \end{bmatrix}$$

ولما كانت القيم الابتدائية : y_{01} تكافئ "تقريبا 3" و y_{02} تكافئ "تقريبا 2"، فإن تمثيل قطع− α للعددين المضببين y_{01} و y_{02} يكون على النحو الآتي:

$$y_{01} = y_1(0,\alpha) = (2+\alpha, 4-\alpha)$$
$$y_{02} = y_2(0,\alpha) = (1+\alpha, 3-\alpha)$$

وحيث أن r=2 وكذلك:

$$W = \frac{1}{3}.M = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام المعادلة (10) يمكن الحصول على قيمة تقريبية للحل عندما تكون x = 0.8 على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ L_{y_2}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ R_{y_2}(x,\alpha) \end{bmatrix} \approx K_m \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 1+\alpha \\ 4-\alpha \\ 3-\alpha \end{bmatrix}$$

فعندما m=1 فإن:

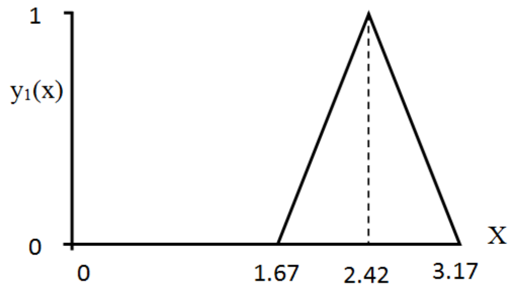
$$K_1 = I + x^3W = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0.92 & -0.17 \\ -0.08 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون الحل التقريبي للنظام (11) على النحو الآتي:

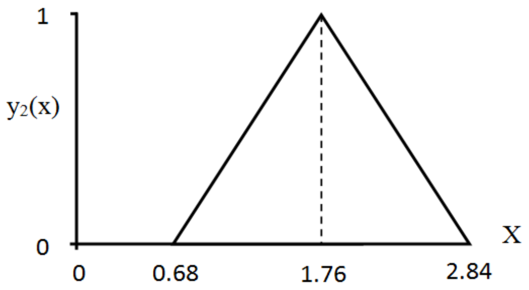
$$\begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ L_{y_2}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ R_{y_2}(x,\alpha) \end{bmatrix} \approx K_1 \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 1+\alpha \\ 4-\alpha \\ 3-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67+0.75\alpha \\ 0.68+1.08\alpha \\ 3.17-0.75\alpha \\ 2.84-1.08\alpha \end{bmatrix}$$

$$y_1(0.8,\alpha) = (1.67 + 0.75\alpha\ ,\ 3.17 - 0.75\alpha)$$
$$y_2(0.8,\alpha) = (0.68 + 1.08\alpha\ ,\ 2.84 - 1.08\alpha).$$

والشكل (3) يبين حل النظام التفاضلي (11)، أي قيمة المتغيرين y_1 و y_2 عندما $x = 0.8$ و m=1.



الشكل (a-3) العدد المضبب المثلثي y_1



الشكل (b-3) العدد المضبب المثلثي y_2

وعندما m=2 فإن:

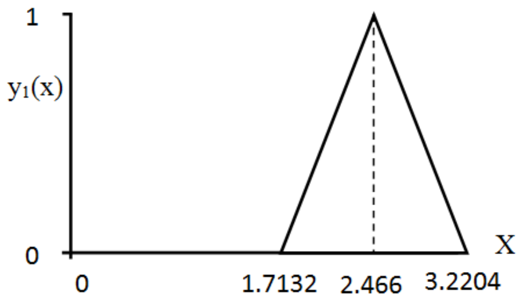
$$K_2 = I + x^3W + \frac{x^6}{2!}W^2 = \begin{bmatrix} 0.9236 & -0.1628 & 0.0072 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0764 & 0.0072 \\ 0.0072 & 0 & 0.9236 & -0.1628 \\ -0.0764 & 0.0072 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون الحل التقريبي للنظام (11) على النحو الآتي:

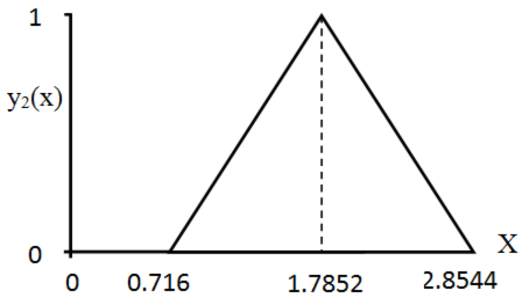
$$\begin{bmatrix} L_{y_1}(x,\alpha) \\ L_{y_2}(x,\alpha) \\ R_{y_1}(x,\alpha) \\ R_{y_2}(x,\alpha) \end{bmatrix} \approx K2 \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 1+\alpha \\ 4-\alpha \\ 3-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7132+0.7536\alpha \\ 0.716+1.0692\alpha \\ 3.2204-0.7536\alpha \\ 2.8544-1.0692\alpha \end{bmatrix}$$

$$y_1(0.8,\alpha) = (1.7132 + 0.7536\alpha\ ,\ 3.2204 - 0.7536\alpha)$$
$$y_2(0.8,\alpha) = (0.716 + 1.0692\alpha,\ \ 2.8544 - 1.0692\alpha).$$

والشكل (4) يبين حل النظام التفاضلي (11)، أي قيمة المتغيرين y_1 و y_2 عندما $x = 0.8$ و m=2 .



الشكل (a-4) العدد المضبب المثلثي y_1



الشكل (b-4) العدد المضبب المثلثي y_2

نلاحظ في نتيجة الحل أن قيمة المتغيرين y_1 و y_2 في الحالة الأولى عندما $m=1$ كانت على النحو الآتي: y_1 يكافئ "تقريبا **2.42**" و y_2 يكافئ "تقريبا **1.76**"، في حين أن قيمة المتغيرين y_1 و y_2 في الحالة الثانية عندما $m=2$ كانت على النحو الآتي: y_1 يكافئ "تقريبا **2.4668**" و y_2 يكافئ "تقريبا 1.7852"، وهذا يدلّ على أنه كلّما زاد عدد حدود المتسلسلة (9) كانت النتائج أكثر دقة.

8. مناقشة Discussion

من اجل مقارنة النظام التفاضلي المضبب مع النظام التفاضلي الاعتيادي، سنذكر في أدناه خطوات حل النظام التفاضلي (11) في المثال(2) في حالة كون القيم الابتدائية أعداد اعتيادية (غير مضببة): $y_{01} = \mathbf{3}$ و $y_{02}= 2$. في هذه الحالة سيكون حل هذا النظام عندما تكون $x = 0.8$ على النحو الآتي:

$$Y'(x) = AY'(x) + BY(x).x^2$$
$$(I-A)Y'(x) = BY(x)\,.x^2$$
$$Y'(x) = (I-A)^{-1}.BY(x)\,.x^2$$
$$C = (I-A)^{-1}.B = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على النظام التفاضلي الاعتيادي الآتي:

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = x^2 \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \qquad \ldots(12)$$

وبالتالي إذا كانت $D = \frac{1}{3}.C$ فإن حل نظام المعادلات التفاضلية (12) يكون على النحو الآتي:

$$Y(x) = \exp(x^3D).Y_0$$

فعندما $m=1$ فإن:

$$K_1 = I + x^3D = \begin{bmatrix} 0.9151 & -0.17 \\ -0.0849 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون الحل التقريبي للنظام (12) على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \approx K_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4053 \\ 1.7453 \end{bmatrix}$$

$y_1(0.8) = 2.4053$ ، $y_2(0.8) = 1.7453$

وعندما $m=2$ فإن:

$$K_2 = I + x^3D + \frac{x^6}{2!}D^2 = \begin{bmatrix} 0.9259 & -0.1628 \\ -0.0813 & 1.0072 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون الحل التقريبي للنظام (12) على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \approx K_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4521 \\ 1.7705 \end{bmatrix}$$

$y_1(0.8) = 2.4521$ ، $y_2(0.8) = 1.7705.$

والجدول الآتي يوضح المقارنة بين الحلين الاعتيادي والمضبب للنظام التفاضلي (11) عندما تكون x = 0.8.

الجدول (1): مقارنة بين الحلين الاعتيادي والمضبب للنظام التفاضلي (11)

الحل الاعتيادي		الحل المضبب	
عندما m=1	عندما m=2	عندما m=1	عندما m=2
$y_1(0.8)$ =2.4053	$y_1(0.8)$ =2.4521	$y_1(0.8)$= "about 2.42"	$y_1(0.8)$= "about 2.4668"
$y_2(0.8)$ = 1.7453	$y_2(0.8)$ = 1.7705	$y_2(0.8)$ = "about 1.76"	$y_2(0.8)$ = "about 1.7852"

المصادر

[1] Amir Sadeghi, Ahmad Izani Md. Ismail and Ali F. Jameel, (2011) "Solving systems of fuzzy differential equation ", International Mathematical Forum, Vol. 6, No.42, pp.2087-2100, Malaysia.

[2] Barnabas Bede, Imre J. Rudas and Attila L. Bencsik, (2007) "First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability", Inf. Sci.177(7), pp.1648-1662.

[3] Barnabas Bede and Sorin G. Gal, (2005) " Generalization of the differentiability of fuzzy -number- valued functions with applications to fuzzy differential equations", Fuzzy Sets and Systems 151, pp.581-599.

[4] Duraisamy C. and Usha B. (2010) "Another approach to solution of fuzzy differential equations", Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, No.16, pp.777-790, India.

[5] Hadi Nasseri, (2008) "Fuzzy numbers: positive and nonnegative", International Mathematical Forum, 3, No.36, pp.1777-1780, Iran.

[6] Klir G.J. , Clair U. st. , and Yuan, Bo(1997) "Fuzzy Set Theory", Prentice Hall PTR.

[7] Klir G.J., and Yuan, Bo(1995) "Fuzzy Set and Fuzzy logic", Prentice Hall PTR.

[8] Omid S. Fard , (2009) "An iterative scheme for the solution of generalized system of linear fuzzy differential equations", World Applied Sciences Journal 7(12):pp.1597-1604.

[9] Otadi M. , Abbasbandy S. and Mosleh M. (2007) " System of linear fuzzy differential equation ", First Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems Ferdowsi University of Mashhad, Iran, 29-31Aug.

[10] Shang Gao and Zaiyue Zhang, JUNE (2009) "Multiplication Operation on Fuzzy Numbers", JOURNAL OF SOFTWARE, VOL. 4, NO. 4, pp. 331-338, University of Science and Technology, China.

[11] Xiaowei Chen, (2008) " Fuzzy Differential Equations", Tsinghua University, Beijing, China.