The Basis Number of symmetric Difference of K_2 With Some Special Graphs

Ghassan Toubia Marougi toubiaghassan@yahoo.com
Ahmed Mohammed Ali ahmed_math79@yahoo.com
Rasha Sallal Hasan rshsal@yahoo.com
Collage of Computers Sciences and Mathematics
University of Mosul , Iraq

Received on 28/4/2013 **Accepted on 16/9/2013**

ABSTRACT

This research aims to account the basis number of symmetric difference of K_2 with some special graphs such as a saw graph, a cog –graphs, a fan graph and a wheel graph.
Keyword: symmetric difference, saw graph, cog –graphs, fan graph, wheel graph.

العدد الاساس للفرق التناظري للبيان K_2 مع بعض البيانات الخاصة المسننة

غسان طوبيا مروكي **احمد محمد علي** **رشا صلال حسن**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث : 2013\4\28 **تاريخ قبول البحث : 2013\9\16**

الملخص

يهدف هذا البحث إلى حساب العدد الاساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بعض البيانات الخاصة والمسننة مثل الدرب المسنن و الدارة المسننة و بيان المروحة والعجلة .
الكلمات المفتاحية: الفرق التناظري, الدرب المسنن, والدارة المسننة, بيان المروحة, بيان العجلة

1. المقدمة

سوف نفرض في بحثنا هذا أن جميع البيانات هي منتهية وغير موجهة وبسيطة , ليكن G بياناً متصلاً ومنتهياً حافاته $e_1,e_2,\dots,e_q$, فإن لكل مجموعة جزئية S من حافات G يوجد متجه $(a_1,a_2,\dots,a_q)$ يقابل S بحيث إن $a_i=1$ إذا كان $e_i\in S$ و $a_i=0$ إذا كان $e_i\notin S$ لكل i=1,2,…,q. هذه المتجهات تكوّن فضاء متجهات ذات البعد q على الحقل Z_2 ، ويطلق عليه فضاء المتجهات المقترن مع البيان G ويرمز له بالرمز $(Z_2)^q$. المتجه الصفري من $(Z_2)^q$ يرمز له بالرمز $\vec{0}$. متجهات $(Z_2)^q$ التي تقابل دارات G تولد فضاء متجهات جزئي يطلق عليه فضاء الدارات للبيان G ويرمز له $C(G)$. كل متجه في $C(G)$ يمثل إما دارة في G أو اتحاد دارات منفصلة عن بعضها بالنسبة للحافات. ومن النتائج المعروفة في نظرية البيان أن بعد فضاء الدارات لبيان متصل G هو q-p+1 حيث أن p هو عدد رؤوس البيان G و q هو عدد حافاته .

إن طريقة إيجاد قاعدة لفضاء الدارات $C(G)$ هي كالآتي :

لتكن T أية شجرة مولدة في G ؛ فإذا كانت e حافة تنتمي إلى G-T عندئذ يكون البيان الجزئي T+e محتوياً بالضبط على دارة واحدة يرمز لها C_e . واضح أن عدد هذه الدارات C_e هو q-p+1 ، حيث $e\in(G-T)$ وأنها تشكل قاعدة لفضاء الدارات $C(G)$.

ويقال للقاعدة B لفضاء الدارات C(G) انها ذات ثنية k- (k-fold) اذا كانت كل حافة من حافات G لا تظهر في اكثر من k من الدارات في القاعدة B. لمزيد من المعلومات راجع المصادر [1],[4],[6],[7] .

1.1 تعريف [8]: يعرف العدد الأساس (*basis number*) لبيان G بأنه أصغر عدد صحيح موجب k بحيث إن C(G) له قاعدة ذات ثنية k– ؛ وهذه القاعدة تسمى القاعدة المطلوبة (*required basis*) ويرمز للعدد الأساس للبيان G بالرمز b(G) .

2.1 تعريف [8]: إذا كانت B قاعدة لفضاء الدارات $C(G)$ و e حافة في G ،عندئذ الثنية للحافة e في B يرمز لها $f_B(e)$ وهي عدد الدارات الموجودة في B والمحتوية على الحافة e.

3.1 تعريف [5]: الفرق التناظري لبيانين G وH يرمز لها بالرمز GΔH يعرف بأنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي V(G) × V(H) ومجموعة حافاته هي

$E(G\Delta H) = \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) : u_1v_1\in E(G) \text{ or } u_2v_2\in E(H) \text{ but not both}\}$.

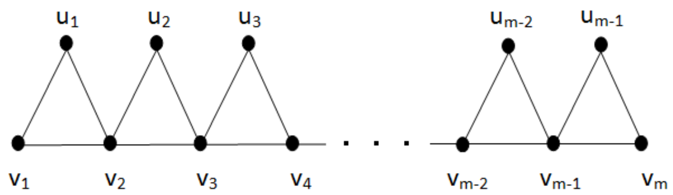
أن عدد حافات البيان GΔH هو

$$|E(G\Delta H)| = |E(G)| \times |V(H)|^2 + |E(H)| \times |V(G)|^2 - 4\,|E(G)| \times |E(H)|$$
$$= q_1 p_2^2 + q_2 p_1^2 - 4 q_1 q_2$$

إذْ أن p_1 و p_2 عدد رؤوس البيان G وHعلى التوالي و q_1 و q_2 عدد حافات البيان G و H على التوالي.

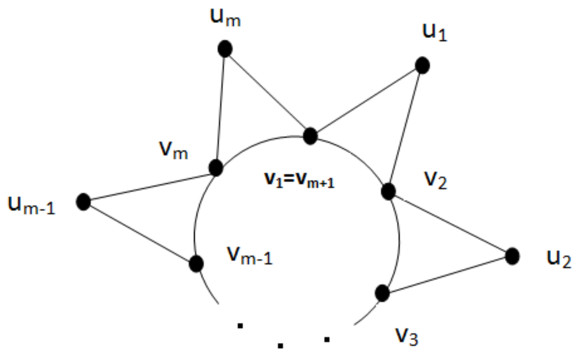
نلاحظ أن عملية الفرق التناظري تحقق خاصيتي التجميعي والابدالي .

4.1 تعريف:الدرب المسنن P_m^* : هو بيان مركب من درب P_m برتبة $m\geq 3$, رؤوسه بالترتيب هي $v_1, v_2, \dots, v_m$, مع m-1 من الرؤوس المضافة $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ والحافات $\{u_iv_i , u_iv_{i+1} : i=1,2,\dots,m-1\}$, كما موضح بالشكل 1.1 .



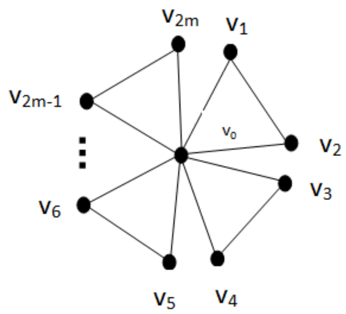
الشكل 1.1 الدرب المسنن P_m^*

5.1 تعريف: الدارة المسننة C_m^* : هي بيان مركب من دارة C_m برتبة $m \geq 3$, رؤوسها بالترتيب هي $v_1,v_2,\dots,v_m$ مع m من الرؤوس المضافة $u_1,u_2,\dots,u_m$ والحافات $\{u_i v_i , u_i v_{i+1} , i=1,2,\dots,m\}$ إذ ان $v_{m+1}= v_1$, كما موضح بالشكل 2.1 .



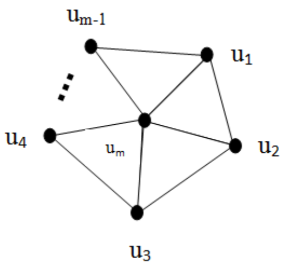
الشكل 2.1 الدارة المسننة C_m^*

6.1 تعريف : المروحة F_m هي بيان مركب من نجمة S_{2m+1} برتبة $2m+1$ رؤوسها بالترتيب هي $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_{2m-1}, v_{2m}$ إذ أن v_0 يمثل مركز النجمة مع الحافات المضافة $\{v_i v_{i+1} \quad : i=1,3,5,\ldots,2m-1\}$ كما موضح بالشكل 3.1 .



الشكل 3.1 المروحة F_m

7.1 تعريف : العجلة W_m هي البيان المكون من الدارة $C_{m-1}=u_1 u_2 u_3 \ldots u_{m-1} u_1$ مع الرأس u_m متجاور مع كل رؤوس C_{m-1} ، إذ أن $m \geq 4$. نلاحظ أن درجة كل رأس في W_m غير u_m هي 3, أما الرأس u_m فهو بدرجة $m-1$, كما موضح بالشكل 4.1.



الشكل 4.1 العجلة W_m

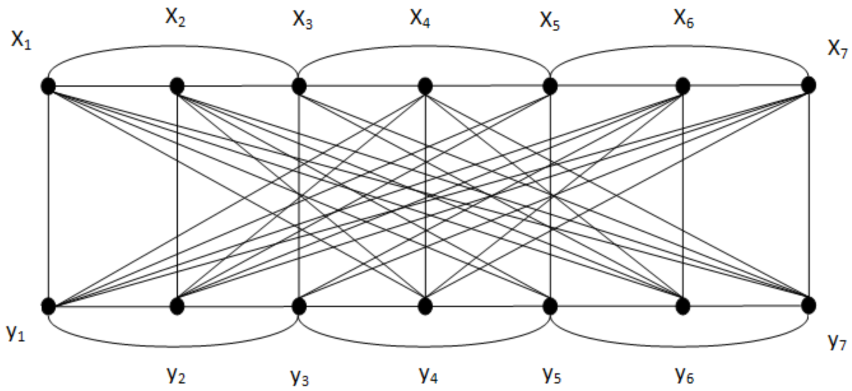
2 . العدد الأساس للفرق التناظري للبيان K_2 مع الدرب المسنن P_m^*

نجد في هذا البند العدد الأساس للفرق التناظري للبيان K_2 مع الدرب المسنن P_m^* ، نلاحظ أن عدد رؤوس البيان $K_2 \Delta P_m^*$ هو $4m-2$ وعدد حافاته هو $(2m-1)^2$, وأن $\dim C\,(K_2 \Delta P_m^*) = q-p+1 = 4(m-1)^2$. ولأجل تبسيط الشرح والبرهان نعيد ترميز رؤوس P_m^* في الشكل (1.1) بـ $0,1,2,\ldots,2m-2$ إذ أننا رمزنا للرأس v_i بـ $2i-2$ لكل

$i=1,2,3,\ldots,2m$ وللرأس u_j بـ $2j-1$ لكل $j=1,2,3,\ldots,m-1$ كما رمزنا لرأسي K_2 بـ 0,1 عندئذ تصبح مجموعة رؤوس $K_2\Delta P_m^*$ مجزاة كالاتي :

$$\{(0,0),)(0,1),\ldots,(0,2m-2)\}\cup\{(1,0),(1,1),\ldots,(1,2m-2)\}$$

إضافة إلى ذلك نرمز للرأس (0,i) بـ x_{i+1} وللرأس (1,i) بـ y_{i+1} لكل $i=0,1,2,\ldots,2m-2$. إن بيان $K_2\Delta P_4^*$ موضح في الشكل (1.2)



الشكل (1.2) $K_2\Delta P_4^*$

1.2 مبرهنة : إذا كانت $m\geq 4$, فإن $b(K_2\Delta P_m^*)\leq 4$

البرهان : نأخذ مجموعة الدارات في البيان $K_2\Delta P_m^*$ الآتية :

$B=\quad B(K_2\Delta P_m^*)=\bigcup_{i=1}^{10} B_i$:

إذْ أن

$B_1=\{x_1\,y_j\,x_2\,y_{j+1}\,x_1\ ;\ j=4,5,\ldots,2m-2\}$,
$B_2=\{x_{2m-2}\,y_j\,x_{2m-1}\,y_{j+1}\,x_{2m-2}\ ;\ j=1,2,\ldots,2m-5\}$,
$B_3=\{x_i\,y_j\,x_{i+1}\,y_{j+1}\,x_i\ ;\ i=2,3$ and $j=6,7,\ldots,2m-2\}$,
$B_4=\{x_i\,y_j\,x_{i+1}\,y_{j+1}\,x_i\ ;\ i=2m-3,2m-4$ and $j=1,2,\ldots,2m-7\}$,
$B_5=\{x_i\,y_j\,x_{i+1}\,y_{j+1}\,x_i\ ;\ i=4,6,\ldots,2m-6$ and $j=1,2,\ldots,i-3,i+4,\ldots,2m-2\}$,
$B_6=\{x_i\,y_j\,x_{i+1}\,y_{j+1}\,x_i\ ;\ i=5,7,\ldots,2m-5$ and $j=1,2,\ldots,i-4,i+3,\ldots,2m-2\}$,
$B_7=\{x_i\,x_{i+1}\,y_{i+1}\,y_i\,x_i\ ;\ i=1,2,\ldots,2m-2\}$,
$B_8=\{x_1\,y_i\,y_{i+1}\,x_1\ ,\ y_1\,x_i\,x_{i+1}\,y_1\ ;\ i=4,5,\ldots,2m-2\}$,
$B_9=\{x_i\,x_{i+1}\,x_{i+2}\,x_i\ ,\ y_i\,y_{i+1}\,y_{i+2}\,y_i\ ;\ i=1,3,\ldots,2m-3\}$,
$B_{10}=\{x_{2m-1}\,y_i\,y_{i+1}\,x_{2m-1}\ ,\ y_{2m-1}\,x_i\,x_{i+1}\,y_{2m-1}\ ;\ i=1,2,\ldots,2m-5\}\cup\{C_1,C_2\}$,
$C_1=\{x_1\,y_1\,y_2\,y_3\,y_4\,x_1\}$, $C_2=\{x_{2m-1}\,y_{2m-1}\,y_{2m-2}\,y_{2m-3}\,y_{2m-4}\,x_{2m-1}\}$.

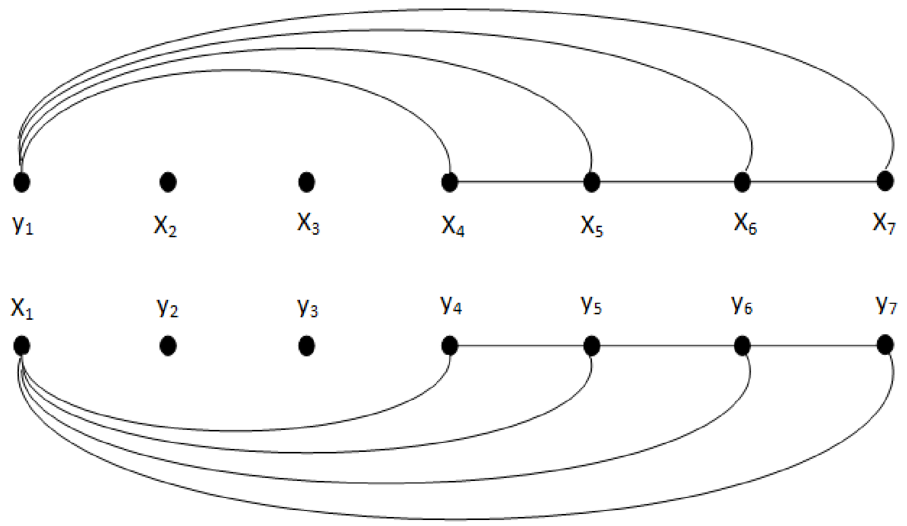
من الواضح أن

$|B_i|=2m-5$, $i=1,2$,
$|B_i|=2(2m-7)=4m-14$, $i=3,4$,
$|B_i|=(m-4)(2m-8)=2m^2-16m+32$, $i=5,6$,
$|B_i|=2m-2$, $i=7,9$,
$|B_8|=2(2m-5)=4m-10$,
$|B_{10}|=2(2m-5)+2=4m-8$,

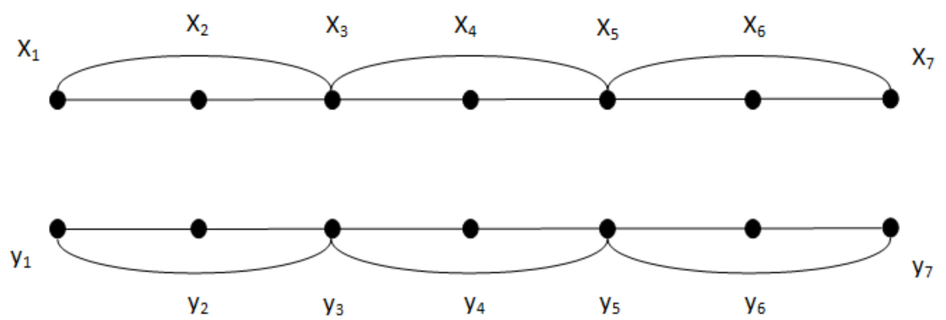
إذن $\quad |B(K_2\Delta P_m^*)|=\sum_{i=1}^{10}|B_i|=4(m-1)^2=\dim C(K_2\Delta P_m^*)$.

الآن نبرهن أن $B(K_2\Delta P_m^*)$ تكون مستقلة ، من الواضح أن $\bigcup_{i=1}^{6} B_i$ مستقلة خطياً وذلك لأنها قاعدة جزئية من $C(K_{2m-1,2m-1})$ المكونة من كل الدارات بالشكل $x_i\,y_j\,x_{i+1}\,y_{j+1}\,x_i$ لكل $i=1,2,\ldots,2m-2,\ j=1,2,\ldots,2m-2$ [8],

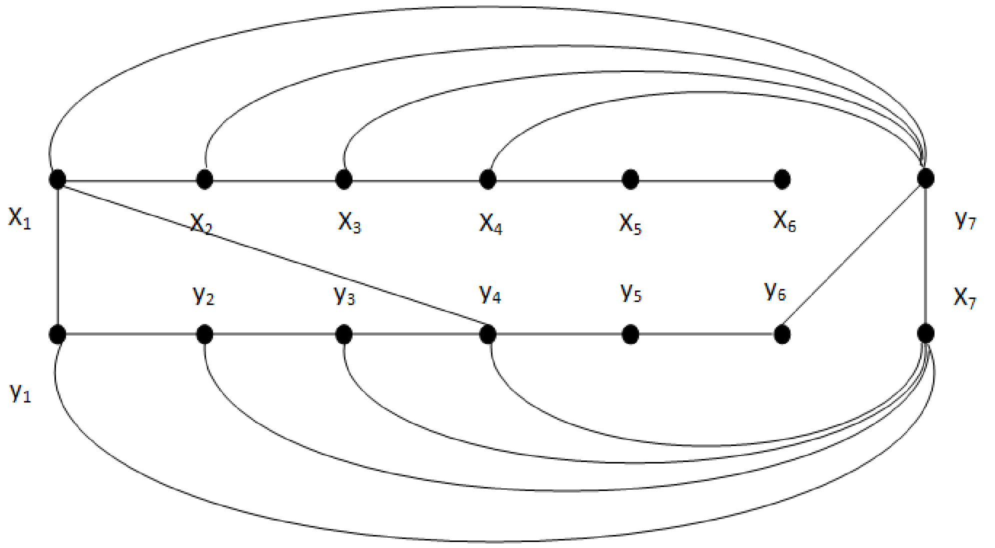
أما الدارات في B_7 مستقلة خطياً لأنها تمثل حدود بعض أوجه البيان المستوي $K_2\times P_{2m-1}$ الذي هو بيان جزئي من K_2 ΔP_m^* و B_8 تكون مستقلة خطيا وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (2.2) وأن $B_7 \cup B_8$ مستقلة ايضاً وذلك لأن B_8 تحوي على حافات بالشكل $x_1 y_i$ أو $y_1 x_i$ لكل قيم $i=4,5,\ldots,2m-1$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_7 , كذلك كلاً من B_9 و B_{10} تكون مستقلة خطياً لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (3.2) والشكل (4.2) على التوالي , وأن $B_9 \cup B_{10}$ مستقلة خطياً ايضاً وذلك لان B_{10} تحوي على حافات بالشكل $x_{2m-1} y_i$ أو $y_{2m-1} x_i$ لكل قيم $i=1,2,\ldots,2m-4$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_9 , كذلك الحال فأن $(B_7\cup B_8)\cup(B_9\cup B_{10})$ مستقلة خطياً وذلك لان B_8 $B_7\cup$تحوي على حافات بالشكل $x_i y_i$ لكل قيم $i=2,3,\ldots,2m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_9\cup B_{10}$, لذلك فأن $\cup_{i=7}^{10} B_i$ مستقلة خطياً , وأخيراً $(\cup_{i=7}^{10} B_i)\cup(\cup_{i=1}^{6} B_i)$ مستقلة خطياً وذلك لأن $\cup_{i=7}^{10} B_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_i x_{i+2}$ أو $y_i y_{i+2}$ لكل قيم $i=1,3,\ldots,2m-3$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $\cup_{i=1}^{6} B_i$, لذلك فأن $\cup_{i=1}^{10} B_i$ تكون مستقلة خطياً , وعليه فهي تمثل قاعدة للبيان $K_2\Delta P_m^*$.



الشكل (2.2) البيان المستوي الجزئي لدارات B_8



الشكل (3.2) البيان المستوي الجزئي لدارات B_9



الشكل (4.2) البيان المستوي الجزئي لدارات B_{10}

الآن بقي أن نحسب الثنية للقاعدة $B=B(K_2\Delta\ {}^{*}_{m})$ لتكن $M_1 =\cup_{i=1}^{6} B_i$, $M_2 =\cup_{i=7}^{10} B_i$

ولحساب الثنية سوف نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2\Delta P_m^*$ إلى المجموعات الاتية :

$N_1= \{ x_i y_i \ ; \ i= 1,2,\dots,2m-1\}$,
$N_2= \{ x_i x_{i+1} ,\ y_i y_{i+1} \ ; \ i= 1,2,\dots,2m-2\}$,
$N_3= \{ x_i x_{i+2} ,\ y_i y_{i+2} \ ; \ i= 1,3,\dots,2m-3\}$,
$N_4= \{ x_{2m-1} y_i ,\ y_{2m-1} x_i \ ; \ i= 1,2,\dots,2m-4\}$,
$N_5= \{ x_1 y_i ,\ y_1 x_i \ ; \ i= 4,5,\dots,2m-2\}$,
$N_6= E (K_2\Delta P_m^*)\backslash \cup_{i=1}^{5} N_i$

	$e \in N_1$	$e \in N_2$	$e \in N_3$	$e \in N_4$	$e \in N_5$	$e \in N_6$
$f_{M1}(e)$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	≤ 2	≤ 2	≤ 4
$f_{M2}(e)$	$= 2$	≤ 4	$= 1$	≤ 2	≤ 2	$= 0$
$f_B(e)$	$= 2$	≤ 4	$= 1$	≤ 4	≤ 4	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2\Delta P_m^*$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2\Delta P_m^*)$ ، أي أن $b (K_2\Delta P_m^*) \leq 4$ وبهذا يتم البرهان . #

3 . العدد الاساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع الدارة المسننة C_m^*

نجد في هذا البند العدد الاساس للفرق التناظري لبيان K2 مع الدارة المسننة C_m^*, نلاحظ أن عدد رؤوس البيان $K_2 \Delta C_m^*$ هو 4m وعدد حافاته هو 4m2 . وأن $\dim C (K_2 \Delta\ {}^{*}_{m}) = q - p +1 = (2m-1)2$.

من الشكل (2.1) نرمز للرأس vi بـ 2(i-1) وللرأس ui بـ 2i-1 لكل i= 1,…,m , عندئذ تصبح رؤوس K2 Δ C_m^* مجزأه إلى { (1,2m-1),…,(1,1) ,(1,0)} ∪{ (0,2m-1),…,(0,1) ,(0,0)} وأخيراً لنرمز لـ (0,i) بـ xi+1 ولـ (1,i) بـ yi+1 لكل i= 0,1,…,2m-1

المبرهنة 1.3: إذا كانت m ≥ 4 , فإن $b(K_2 \Delta C_m^*) \leq 4$

البرهان : نأخذ مجموعة الدارات في $K_2 \Delta C_m^*$ الآتية :

$B =B (K_2 \Delta C_m^*) = \cup_{i=1}^{10} B_i$,

إذْ أن

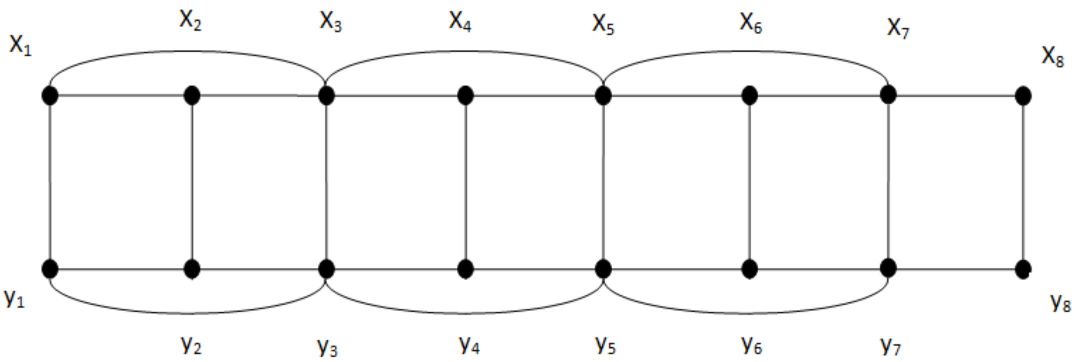
$B_1 = \{ x_1 y_j x_2 y_{j+1} x_1 \; ; j = 4,5,\ldots,2m-3 \}$,
$B_2 = \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i \; ; i=2,3 \text{ and } j = 6,7,\ldots,2m-1 \}$,
$B_3 = \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i \; ; i=4,6,\ldots,2m-4 \text{ and } j = 1,2,\ldots,i-3,i+4,\ldots,2m-1 \}$,
$B_4 = \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i \; ; i=2m-2,2m-1 \text{ and } j = 2,3,\ldots,2m-5 \}$,
$B_5 = \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i \; ; i=5,7,\ldots,2m-3 \text{ and } j = 1,2,\ldots,i-4,i+3,\ldots,2m-1 \}$,
$B_6 = \{ x_i x_{i+1} y_{i+1} y_i x_i \; ; i = 1,2,\ldots,2m-1 \}$,
$B_7 = \{ x_i x_{i+1} x_{i+2} x_i , y_i y_{i+1} y_{i+2} y_i \; ; i = 1,3,\ldots,2m-3 \}$,
$B_8 = \{ x_{2m} y_i y_{i+1} x_{2m} , y_{2m} x_i x_{i+1} y_{2m} \; ; i= 2,3,4,\ldots,2m-3 \}$,
$B_9 = \{ x_1 y_i y_{i+1} x_1 , y_1 x_i x_{i+1} y_1 \; ; i= 4,5,6,\ldots,2m-3 \}$,
$B_{10} = \{ x_1 x_{2m-1} x_{2m} x_1 , \; y_1 y_{2m-1} y_{2m} y_1 , \; x_1 x_{2m} y_{2m} y_1 x_1 , \; x_1 x_3 x_5 \ldots x_{2m-1} x_1 ,$
$y_1 y_3 y_5 \ldots y_{2m-1} y_1 , \; x_{2m-3} x_{2m-1} y_{2m-1} y_{2m-3} x_{2m-3} , \; x_1 x_{2m} y_2 x_2 x_1 , y_1 y_{2m} x_2 y_2 y_1 ,$
$x_{2m-2} x_{2m-1} x_{2m} y_{2m} x_{2m-2} , \; y_{2m-2} y_{2m-1} y_{2m} x_{2m} y_{2m-2} , \; x_1 x_2 x_3 x_4 y_1 x_1 ,$
$y_1 y_2 y_3 y_4 x_1 y_1 \}$.

من الواضح أن

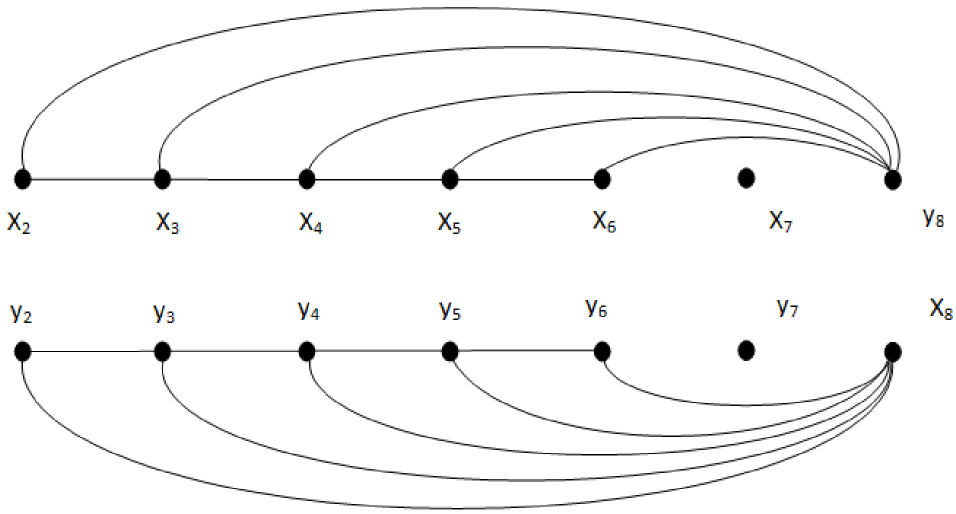
$|B_1| = 2m-6$,
$|B_i| = 4m-12 , i = 2,4,9$,
$|B_i| = (m-3)(2m-7) = 2m^2-13m+21 , i= 3,5$,
$|B_6| = 2m-1$,
$|B_7| = 2(m-1) = 2m-2$,
$|B_8| = 2(2m-4) = 4m-8$,
$|B_{10}| = 12$,
$|B (K_2 \Delta C^*_m)| = \sum_{i=1}^{10} |B_i| = (2m-1)^2 = \dim C(K_2 \Delta C^*_m)$.

الآن سوف نبرهن أن $B (K_2 \Delta C^*_m)$ مستقلة خطياً , من الواضح أن $\bigcup_{i=1}^{5} B_i$ مستقلة خطياً وذلك لأنها قاعدة جزئية من $C (K_{2m,2m})$ المكونة من كل الدارات بالشكل $x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i$ لكل $i=1,2,\ldots,2m-1, j=1,2,\ldots,m-1$ [8] , كما أن $B_6 \cup B_7$ مستقلة خطياً وذلك لأنهما تمثلان سوية حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (1.3), و B_8 مستقلة خطياً وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (2.3) , وأن $B_6 \cup B_7 \cup B_8$ مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي للدارات في B_8 تحوي على حافات بالشكل $x_{2m} y_i$ و $y_{2m} x_i$ لكل قيم $i=2,3,\ldots,2m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_6 \cup B_7$, كما أن $B_9 \cup B_{10}$ مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي للدارات في B_{10} تحوي على حافات بالشكل $x_1 x_{2m}$ أو $y_1 y_{2m}$ أو x_1 x_{2m-1} أو $y_1 y_{2m-1}$ أو $x_{2m-1} y_{2m-1}$ أو $x_1 y_1$ أو $x_{2m} y_{2m}$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_9 , وأن $(B_6 \cup B_7 \cup B_8) \cup (B_9 \cup B_{10})$ مستقلة خطياً وذلك لأن $B_9 \cup B_{10}$ تحوي على حافات بالشكل $x_1 y_i$ أ و $y_1 x_i$ لكل قيم $i = 4,5,\ldots,2m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_6 \cup B_7 \cup B_8$ لذلك فإن $\bigcup_{i=6}^{10} B_i$ مستقلة خطياً ,وأخيراً

$(\bigcup_{i=6}^{10} B_i) \cup \bigcup_{i=1}^{5} B_i$ مستقلة خطياً وذلك لأن $\bigcup_{i=6}^{10} B_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_i x_{i+2}$ أو $y_i y_{i+2}$ لكل قيم $i=1,3,\ldots,2m-3$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $\bigcup_{i=1}^{5} B_i$ وعليه فأن $\bigcup_{i=1}^{10} B_i$ مستقلة خطياً ولذلك فهي قاعدة للبيان $K_2 \Delta C^*_m$.



الشكل (1.3) البيان المستوي الجزئي لدارات $B_6 \cup B_7$



الشكل (2.3) البيان المستوي الجزئي لدارات B_8

الآن بقي أن نحسب الثنية للقاعدة $B=B(K_2\Delta\, C_m^*)$
نفرض أن

$M_1 = \cup_{i=1}^{5} B_i$, $M_2 = \cup_{i=6}^{10} B_i$

ولحساب الثنية سوف نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2\Delta\, C_m^*$ إلى المجموعات الاتية :

$A_1 = \{ x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1} ; i= 1,2,\ldots,2m-1\}$,
$A_2 = \{ x_i y_i ; i=3,4,5,\ldots,2m-1\}$,
$A_3 = \{ x_i y_i ; i= 1,2,2m \}$,
$A_4 = \{ x_i x_{i+2}, y_i y_{i+2} ; i= 1,3,5,\ldots,2m-3\}$,
$A_5 = \{ x_1 x_{2m-1}, y_1 y_{2m-1}, x_1 x_{2m}, y_1 y_{2m} \}$,
$A_6 =\{ x_{2m} y_i, y_{2m} x_i ; i= 2,3,\ldots,2m-3 \}$,
$A_7 = \{x_{2m} y_{2m-2}, y_{2m} x_{2m-2} \}$,
$A_8 =\{ x_1 y_i, y_1 x_i ; i= 4,5,\ldots,2m-2\}$,
$A_9 = E(K_2\Delta\, C_m^*) \setminus \cup_{i=1}^{8} A_i$

	$e \in A_1$	$e \in A_2$	$e \in A_3$	$e \in A_4$	$e \in A_5$	$e \in A_6$	$e \in A_7$	$e \in A_8$	$e \in A_9$
$f_{M1}(e)$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	≤ 2	$= 0$	≤ 2	≤ 4
$f_{M2}(e)$	≤ 4	≤ 3	$= 4$	≤ 3	≤ 3	$= 2$	$= 2$	≤ 2	$= 0$
$f_B(e)$	≤ 4	≤ 3	$= 4$	≤ 3	≤ 3	≤ 4	$= 2$	≤ 4	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2\Delta\, C^*_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2\Delta\, C^*_m)$ ، أي أن $b\,(K_2\Delta\, C^*_m) \le 4$ وبهذا يتم البرهان . #

4. العدد الاساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان المروحة F_m

نجد في هذا البند القيد الأعلى للعدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان المروحة F_m ، نلاحظ أن عدد رؤوس البيان $K_2\Delta F_m$ هو $4m+2$ وعدد حافاته هو $(2m+1)^2$, وأن

$\dim C(K_2\Delta F_m) = q - p + 1 = 4m^2$.

من الشكل (3.1) , نرمز للرأس v_i بـ i, لكل $i=0,\ldots,2m$, ونرمز لرأسي K_2 بـ 0,1 عندئذ تصبح رؤوس $K_2\Delta F_m$ مجزأة إلى $\{(0,0),(0,1),\ldots.(0,2m)\}\cup\{(1,0),(1,1),\ldots..(1,2m)\}$ وأخيراً , نرمز للرأس $(0,j)$ بـ x_j وللرأس $(1,j)$ بـ y_j لكل $j=0,1,\ldots,2m$

1.4 المبرهنة: إذا كانت $m \ge 3$, فإن $b\,(K_2\Delta F_m) \le 4$.

البرهان : نأخذ مجموعة الدارات الآتية في $K_2\,\Delta\, F_m$:

$B= B(K_2\,\Delta\, F_m) =\cup_{i=1}^{11} B_i$,

إذْ أن

$B_1=\{x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\, x_i\ ;\ i=3,5,7,...,2m-3\ \text{and}\ j=1,2,...,i-2,i+2,\ldots,2m-1\}$,
$B_2=\{x_1\ y_j\ x_2\ y_{j+1}\, x_1\ ;\ j=3,4,\ldots,2m-1\}$,
$B_3=\{x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i\ ;\ i=4,6,8,...,2m-4\ \text{and}\ j=1,2,\ldots,i-3,i+3,\ldots,2m-1\}$,
$\cup\ \{x_i\ y_i\ x_{i+1}\ y_{i+1}\, x_i\}\ ;\ i=2,4,\ldots,2m-2\}$,
$B_4=\{x_2\ y_j\ x_3\ y_{j+1}\, x_2\ ;\ j=5,6,\ldots,2m-1\}$,
$B_5=\{x_{2m-2}\ y_j\ x_{2m-1}\ y_{j+1}\, x_{2m-2}\ ; j=1,2,\ldots,2m-5\}$,
$B_6=\{x_{2m-1}\ y_j\ x_{2m}\ y_{j+1}\, x_{2m-1}\ ; j=1,2,\ldots,2m-3\}$,
$B_7=\{x_0\ x_i\ y_{2m}\ x_{i+1}\ x_0\ ,\ y_0\ y_i\ x_{2m}\ y_{i+1}\ y_0\ ;\ i=1,2,\ldots,2m-3\}$,
$B_8=\{x_0\ x_i\ x_{i+1}\ x_0\ ,\ y_0\ y_i\ y_{i+1}\ y_0\ ;\ i=1,3,5,\ldots,2m-1\}$,
$B_9=\{x_i\, x_{i+1}\ y_{i+1}\, y_i\, x_i\ ;\ i=1,3,\ldots,2m-1\}\cup\{x_0\, x_1\, y_1\, y_0\, x_0\}$,
$B_{10}=\{x_1\ y_i\ y_{i+1}\ x_1\ ,\ y_1\ x_i\ x_{i+1}\ y_1\ ;\ i=3,5,\ldots,2m-1\}$,
$B_{11}=\{x_i\, x_0\, x_{i+1}\ y_{i+1}\ x_i\ ,\ y_i\, y_0\, y_{i+1}\ x_{i+1}\ y_i\ ;\ i=2,4,\ldots,2m-2\}$,

من الواضح أن

$|B_1| =(m-2)(2m-4) = 2m^2-8m+8$,
$|B_i| = 2m-3\ ,\ i=2,6$,
$|B_3| = (2m-6)(m-3)+m-1 = 2m^2-11m+17$,
$|B_i| = 2m-5\ ,\ i=4,5$,
$|B_7| =2(2m-3) = 4m-6$,
$|B_8| =2m$,
$|B_9| = m+1$,
$|B_i| =2(m-1) = 2m-2\ ,\ i=10,11$,

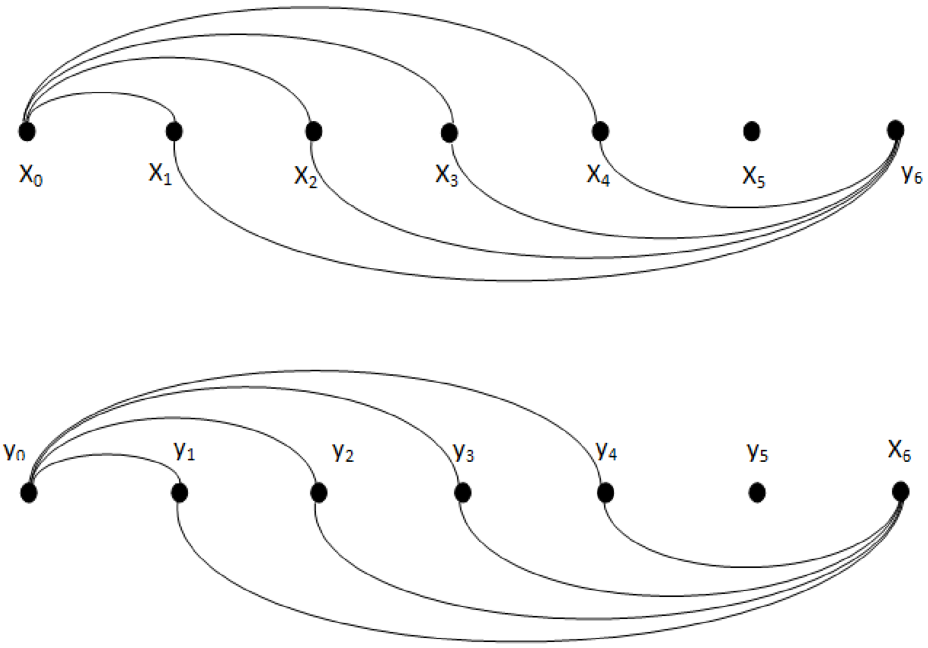
إذن $|B\,(K_2\,\Delta\, F_m)| = \sum_{i=1}^{11}|B_i| = 4m^2 = \dim C\,(K_2\,\Delta\, F_m)$

الآن نبرهن أن $B(K_2\Delta F_m)$ مستقلة خطياً ، من الواضح أن $\cup_{i=1}^{6} B_i$ مستقلة خطياً وذلك لأنها قاعدة جزئية من $C\,(K_{2m,2m})$ المكونة من كل الدارات بالشكل $x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i$ لكل $i=1,2,\ldots,m-1, j=1,2,\ldots,m-1$ [8] ، كما أن كلاً من B_7 و B_8 مستقلة خطياً وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (1.4)

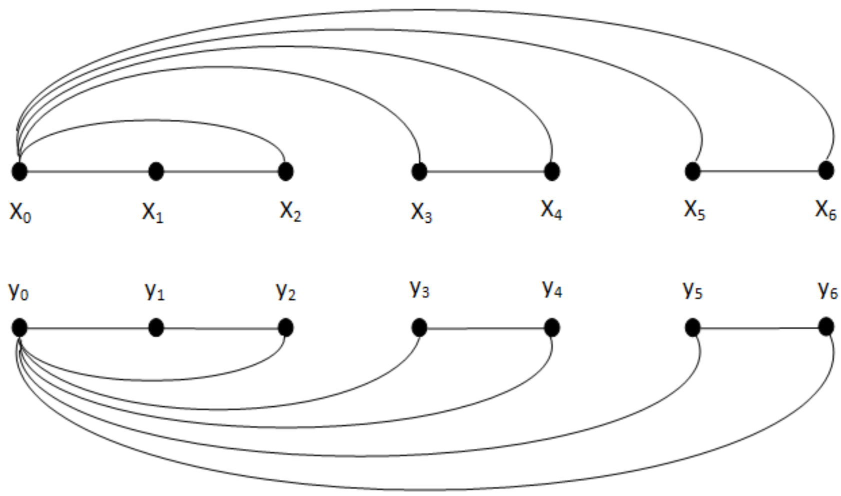
و(2.4)على التوالي, وأن $B_7 \cup B_8$ مسـتقلة خطياً وذلك لأن B_8 تحوي على حافة بالشـكل $x_i\, x_{i+1}$ أو $y_i\, y_{i+1}$ لكل قيــم $i=1,3,\dots,2m-1$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_7 , الآن B_9 مستقلة خطياً لأنها تمثل حدود بعض أوجه البيان المستوي $K_2 \times P_{2m+1}$ الذي هو بيان جزئي من $K_2\, \Delta F_m$ و B_{10} مستقلة خطياً وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (3.4) بالإضافة إلى ذلك فإن $B_9 \cup B_{10}$ مستقلة خطياً وذلك لأن B_9 تحوي على حافة بالشكل $x_i\, y_i$ لكل قيم $i=0,1,2,\dots,2m$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_{10} , كذلك الحـال B_{11} مستقلة خطياً وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح في الشكل (4.4) , وأن

$B_9 \cup B_{10} \cup B_{11}$ مسـتقلة خطـياً وذلك لأن $B_9 \cup B_{10}$ تحوي على حافات بالشكل $x_1\, y_i$ أو $y_1\, x_i$ لكل قيـم $i=3,4,5,\dots,2m$ والتي لا تـوجد في أي تركيـب خطـي للدارات في B_{11} , الآن

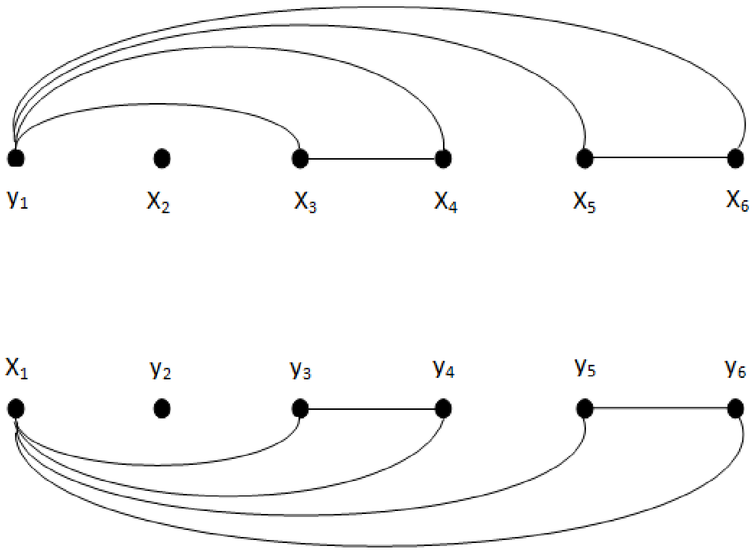
$(B_7 \cup B_8) \cup (B_9 \cup B_{10} \cup B_{11})$ مسـتقلة خطـياً وذلك لأن $B_7 \cup B_8$ تحوي على حافات بالشـكل $x_i\, y_{2m}$ أو $y_i\, x_{2m}$ لكل قيـم $i=2,3,\dots,2m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_9 \cup B_{10} \cup B_{11}$, لذلك $\cup_{i=7}^{11} B_i$ مستقلة خطياً ،وأخيراً $(\cup_{i=7}^{11} B_i) \cup (\cup_{i=1}^{6} B_i)$ مستقلة خطياً وذلك لأن $\cup_{i=7}^{11} B_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_i\, x_0$ أو $y_i\, y_0$ لكل قيم $i=1,2,3,\dots,2m$ أو $x_i\, x_{i+1}$, $y_i\, y_{i+1}$ لكل $i=1,2,\dots,2m-1$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $\cup_{i=1}^{6} B_i$, لذلك فإن $\cup_{i=1}^{11} B_i$ مستقلة خطياً , إذن B هي قاعدة للبيان $K_2 \Delta F_m$.



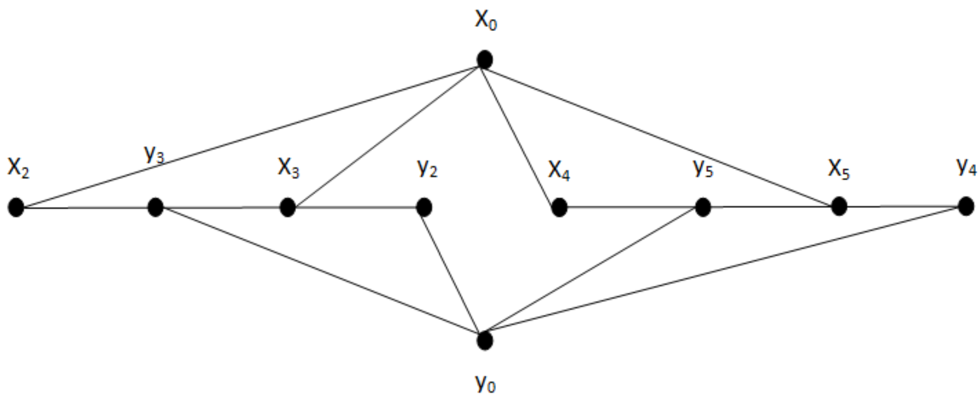
الشكل (2.4) البيان المستوي الجزئي لدارات B_7



الشكل (2.4) البيان المستوي الجزئي لدارات B_8



الشكل (3.4) البيان المستوي الجزئي لدارات B_{10}



الشكل (4.4) البيان المستوي الجزئي لدارات B_{11}

الآن بقي أن نحسب الثنية للقاعدة $B= B(K_2\Delta F_m)$

نفرض أن

$M_1 = \cup_{i=1}^{6} B_i$, $M_2 = \cup_{i=7}^{11} B_i$

ولإيجاد الثنية للقاعدة $B= B(K_2\Delta F_m)$ نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2\Delta F_m$ إلى :

$L_1=\{ x_i y_{2m} , y_i x_{2m}$; $i= 1,2,...,2m-2\}$,
$L_2=\{ x_0 x_i , y_0 y_i$; $i=1,2,3,...,2m\}$,
$L_3=\{ x_i x_{i+1} , y_i y_{i+1}$; $i= 1,3,\ldots,2m-1\}$,
$L_4=\{ x_i y_i$; $i=2,3,\ldots,2m-1\}$,
$L_5=\{ x_1 y_i , y_1 x_i$; $i=3,4,\ldots,2m-1\}$,
$L_6=\{ x_i y_i$; $i=0,1,2m\}$,
$L_7=\{ x_i y_{i+1} , y_i x_{i+1}$; $i= 2,4,6,...,2m-2\}$,
$L_8 = E(K_2\Delta F_m) \setminus \cup_{i=1}^{7} L_i$

	$e \in L_1$	$e \in L_2$	$e \in L_3$	$e \in L_4$	$e \in L_5$	$e \in L_6$	$e \in L_7$	$e \in L_8$
$f_{M1}(e)$	≤ 2	$= 0$	$= 0$	$=1$	≤ 2	$= 0$	$= 2$	≤ 4
$f_{M2}(e)$	≤ 2	≤ 4	≤ 3	≤ 3	≤ 2	≤ 2	$=1$	$= 0$
$f_B(e)$	≤ 4	≤ 4	≤ 3	≤ 4	≤ 4	≤ 2	$= 3$	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2\Delta F_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2\Delta F_m)$ ، أي أن $b(K_2\Delta F_m) \le 4$ وبهذا يتم البرهان . #

5. العدد الاساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان العجلة W_m

من الواضح ان عدد رؤوس البيان $K_2\Delta W_m$ هو $2m$ وعدد حافاته هو m^2 . وأن

$\dim C(K_2\Delta W_m) = q - p + 1 = (m-1)^2$.

من الشكل (4.1) , نرمز للرأس u_i في العجلة W_m بـ $i-1$ لكل $i=1,2,\ldots,m$, عندئذ تكون رؤوس $K_2\Delta W_m$ مجزأة إلى $\{(1,0), (1,1),\ldots,(1,m-2),(1,m-1)\} \cup \{(0,0), (0,1),\ldots,(0,m-2),(0,m-1)\}$ في $K_2\Delta W_m$, نرمز للرأس $(0,j)$ بـ x_{j+1} وللرأس $(1,j)$ بـ y_{j+1} لكل $j= 0,1,\ldots,m-1$

1.5 المبرهنة: إذا كانت $m \ge 9$, فإن $b(K_2\Delta W_m) \le 4$

البرهان : نأخذ مجموعة الدارات الآتية في البيان $K2\Delta Wm$

$B=B(K_2\Delta W_m) = \cup_{i=1}^{10} B_i$,

حيث أن

$B_1 = \{ x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i$; $i=2,3$ and $j = i+3 ,i+4, \ldots, m-2\}$,
$B_2 = \{ x_1\ y_j\ x_2\ y_{j+1}\ x_1$; $j = 4,5,\ldots,m-3 \}$,
$B_3 = \{ x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i$; $i= 4,5,\ldots,m-5$ and $j =1,2,\ldots, i-3,i+3,i+4,\ldots,m-2\}$,
$B_4 = \{ x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i$; $i= m-4,m-3$ and $j =1,2,3,\ldots,i-3 \}$,
$B_5 = \{ x_{m-2}\ y_j\ x_{m-1}\ y_{j+1}\ x_{m-2}$; $j=2,3,\ldots,m-5\}$,
$B_6 = \{ x_i\ y_i\ y_{i+1}\ x_{i+1}\ x_i$; $i=1,2,\ldots,m-1 \}$,
$B_7 = \{ y_1\ x_i\ x_{i+1}\ y_1$, $x_1\ y_i\ y_{i+1}\ x_1$; $i=3,4,\ldots,m-3 \}$,
$B_8 = \{ y_{m-1}\ x_i\ x_{i+1}\ y_{m-1}$, $x_{m-1}\ y_i\ y_{i+1}\ x_{m-1}$; $i=2,3,\ldots,m-4 \}$,
$B_9 = \{ x_m\ x_i\ x_{i+1}\ x_m$, $y_m\ y_i\ y_{i+1}\ y_m$; $i=1,2,\ldots,m-2\}$,
$B_{10} = \{ x_{m-3}\ x_{m-2}\ x_{m-1}\ y_{m-1}\ x_{m-3}$, $x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ x_1$, $y_1\ x_1\ x_2\ x_3\ y_1$, $x_{m-1}\ y_{m-1}\ y_{m-2}\ y_{m-3}\ x_{m-1}$, $x_1\ x_{m-1}\ x_m\ x_1$, $y_1\ y_{m-1}\ y_m\ y_1$, $x_1\ x_m\ y_m\ y_1\ x_1$, $x_{m-2}\ x_m\ y_m\ y_{m-2}\ x_{m-2} \}$.

من الواضح أن

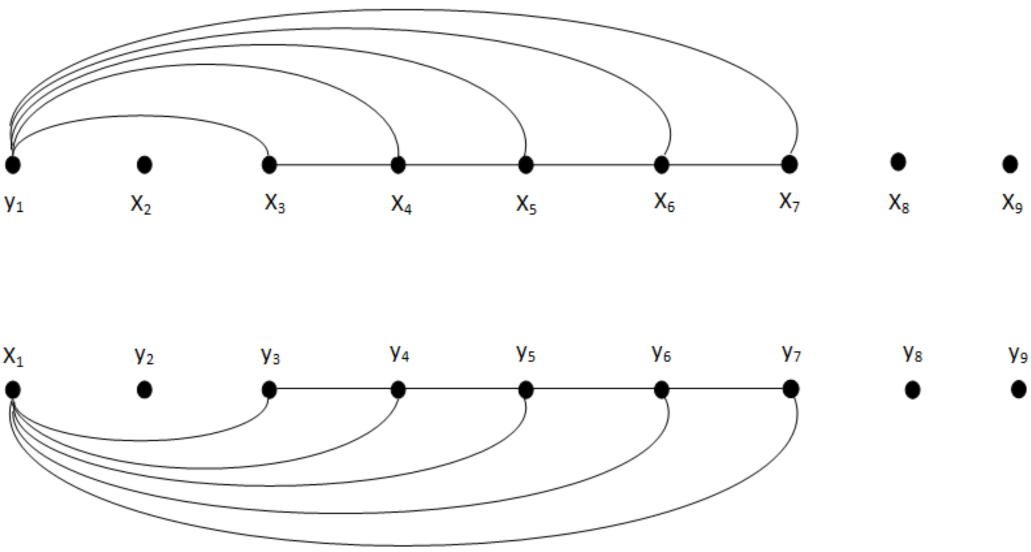
$|B_1| = 2m-13$,

$|B_i| = m-6$, $i =2 ,5$,
$|B_3| = (m-8)(m-7) = m^2-15m+56$,
$|B_4| =2m-13$,
$|B_6| = m-1$,
$|B_i| = 2(m-5) = 2m-10$, $i =7,8$,
$|B_9| = 2(m-2) = 2m-4$,
$|B_{10}| =8$,

إذن

$| B(K_2\Delta W_m) | = \sum_{i=1}^{10} |B_i| = (m-1)^2 = \dim C(K_2\Delta W_m)$.

الآن سوف نثبت أن $B(K_2\Delta W_m)$ مستقلة , من الواضح أن $\cup_{i=1}^{5} B_i$ مجموعة مستقلة خطيا وذلك لأنها قاعدة جزئية من $C(K_{m,m})$ المكـونة من كل الدارات بالشـكل $x_i\ y_j\ x_{i+1}\ y_{j+1}\ x_i$ لكل $i=1,2,\dots,m-1,\ j=1,2,\dots,m-1$ [8], وأن B_6 مستقلة لأنها تمثـل حدود بعض أوجه البيان المستوي $K_2\times P_m$ الذي هو بيان جزئي من $K_2\Delta W_m$ وB_7 مستقلة وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح بالشكل (1.5)



الشكل (1.5) البيان المستوي الجزئي لدارات B_7

كما وأن $B_6 \cup B_7$ مجموعة مستقلة وذلك لأن أي تركيب خطي بالنسبة للدارات في B_7 تحوي على حافات بالشكل $x_1\ y_i$ أو $y_1\ x_i$ لكل قيم $i=3,4,\dots,m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_6, وأن $(B_6 \cup B_7) \cup B_8$ مجموعة مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي بالنسبة للدارات في $B_6 \cup B_7$ تحوي على حافات بالشكل $x_i\ y_i$ لكل قيم $i=1,2,\dots,m$ أو بالصيغة $x_1 y_j$ أو $y_1\ x_j$ لكل $j= 3,\dots,m-3$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_8 , وأن $B_9 \cup B_{10}$ مجموعة مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي بالنسبة للدارات في B_{10} تحوي على حافات بالشكل $x_1\ y_1$ أو $x_{m-1}\ y_{m-1}$ و أ $x_m\ y_m$ أو $x_1\ x_{m-1}$ أو $y_1\ y_{m-1}$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_9 , كما وأن $(B_6 \cup B_7 \cup B_8) \cup (B_9 \cup B_{10})$ مجموعة مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي بالنسبة للدارات $B_9 \cup B_{10}$ تحوي على حافات بالشكل $x_m\ x_i$ أو $y_m\ y_i$ لكل قيم $i=1,2,\dots,m-2$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_6 \cup B_7 \cup B_8$, لذلك فإن $\cup_{i=6}^{10} B_i$ مجموعة مستقلة خطياً , وأخيراً $(\cup_{i=6}^{10} B_i)$ $\cup (\cup_{i=1}^{5} B_i)$ مجموعة مستقلة خطياً وذلك لأن أي تركيب خطي بالنسبة للدارات في $\cup_{i=6}^{10} B_i$ تحوي على حافات

بالشكل $x_i x_{i+1}$ أو $y_i y_{i+1}$ لكل قيم $i=1,2,\ldots,m-1$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $\bigcup_{i=1}^{5} B_i$, لهذا فإن $\bigcup_{i=1}^{10} B_i$ مجموعة مستقلة خطياً وبالتالي تكون قاعدة للبيان $K_2\Delta W_m$.

الآن سوف نقوم بحساب الثنية للقاعدة $B= B(K_2\Delta W_m)$

نفرض أن $M_1 = \bigcup_{i=1}^{5} B_i$, $M_2 = \bigcup_{i=6}^{10} B_i$ ولإيجاد الثنية نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2\Delta W_m$ إلى :

$R_1 =\{ x_i x_{i+1} , y_i y_{i+1} ; i= 1,2,\ldots,m-1 \}$,
$R_2 =\{ x_m x_i , y_m y_i ; i= 1,2,\ldots,m-2 \}$,
$R_3 =\{ x_i y_i ; i= 2,3,\ldots,m-3 \}$,
$R_4 =\{ x_i y_i ; i= 1,m-2,m-1,m \}$,
$R_5 =\{ x_1 x_{m-1} , y_1 y_{m-1} \}$,
$R_6 =\{ x_1 y_i , y_1 x_i ; i= 4,5,\ldots,m-2 \}$,
$R_7 =\{ x_{m-1} y_i , y_{m-1} x_i ; i= 2,3,\ldots,m-4 \}$,
$R_8 =\{ x_1 y_3 , y_1 x_3 , x_{m-1} y_{m-3} , y_{m-1} x_{m-3} \}$,
$R_9 = E(K_2\Delta W_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{8} R_i$

	$e \in R_1$	$e \in R_2$	$e \in R_3$	$e \in R_4$	$e \in R_5$	$e \in R_6$	$e \in R_7$	$e \in R_8$	$e \in R_9$
$f_{M1}(e)$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	≤ 2	≤ 2	$= 0$	≤ 4
$f_{M2}(e)$	≤ 4	≤ 3	$= 2$	≤ 4	$=1$	≤ 2	≤ 2	$= 2$	$= 0$
$f_B(e)$	≤ 4	≤ 3	$= 2$	≤ 4	$=1$	≤ 4	≤ 4	$= 2$	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2\Delta W_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2\Delta W_m)$ ، أي أن $b(K_2\Delta W_m) \leq 4$ وبهذا يتم البرهان . #

المصادر

[1] Alzoubi , M.Y. and Jaradat , M.M. ,(2005), On the basis number of the composition of different ladders with some graphs, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 12, pp. 1861-1868.

[2] Bony , J . A . and Murty , U.S.R. ; (2008)" Graph Theory ", Library of congress control Number : 2007940370 .

[3] Chartrand , G. and Lesniak , L. ,(1996), " Graphs and Digraphs ", 3rd ed., Chapman & Hall, CRC. Press.

[4] Hailat, M.Q. and Alzoubi , M.Y. (1994) , The basis number of the composition of graphs , Istanbul univ. , Fen Fak . Mat . Derg . 53, 43-60.

[5] Khalifeh, M.H; Yousefi-Azari, H. and Ashrafi, A.R. (2009) , The first and second Zagreb indices of some graph operations, Discrete Applied Mathematics, Vol . 157 , pp. 804-811.

[6] Maclane , S. ,(1937), A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math., Vol. 28, pp. 22-32.

[7] Marougi , Gh.T. ,(2009), On the basis number of semi-strong product of K_2 with some special graphs, Raf.J. of comp. & Maths., Vol. 6, No.3, pp. 173-181.

[8] Schmeichel , E.F. ,(1981), The basis number of a graph, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 30, No.2, pp. 123-129.