Incomplete (rq-q+r- ε , r)-arcs and minimal {ℓ,t}-Blocking set in PG(2,q)

Nada yassen kasm **Hiba suhil najem**
drnadaqasim1@gmail.com
College of Education for pure sciences
University of Mosul

Received on :21/11/2012 **Accepted on : 31/1/2013**

ABSTRACT

We proved that(rq-q+r-ε,r)-arcs is incomplete by using minimal {ℓ,t}-Blocking set in projective plane PG(2,q)and we found a new condition for ε is ε ≥-A(r-1)2+B(r-1)-C and A,B,C is a constant which is not get previously in studies which is search in finding ε for incomplete (rq-q+r-ε,r)-arcs ,for value 2≤r≤ 4 where q is prime for values 11≤q≤ 31 in addition to q=16.

Keywords: incomplete (rq-q+r-ε,r)-arcs , minimal{ℓ,t}-Blocking set , t-Blocking set , Projective Plane PG(2,q)

الأقواس−$\left(rq-q+r-\varepsilon\ ,r\right)$غير التامة والمجاميع القالبية −{ℓ,t} الاصغرية في PG(2,q)

ندى ياسين قاسم ***هبة سهيل نجم***

كلية التربية للعلوم الصرفة

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث : 21\11\2012 **تاريخ قبول البحث : 31\1\2013**

الملخص

أثبتنا أن الأقواس−(rq-q+r-ε,r) هي غير تامة باستخدام المجاميع القالبية-{ℓ,t} الاصغرية في المستوي الاسقاطي PG(2,q) وبذلك حصلنا على شرط جديد لـ ε هو ε ≥-A $(r-1)^2$+B(r-1)-C وان A,B,C ثوابت ولم يتم الحصول عليها سابقا في البحوث التي تبحث في إيجاد ε للأقواس−(rq-q+ r- ε ,r) غير التامة وذلك لقيم 2≤r ≤4 علما ان q أولي لقيم 11≤q≤ 31 بالإضافة إلىq=16 .

الكلمات المفتاحية : الأقواس− (rq-q+ r- ε ,r) غير التامة ،المجاميع القالبية −{ℓ,t} الاصغرية ، المجاميع القالبية −t ، المستوي الاسقاطي PG(2,q).

1. المقدمة

نرمز إلى القيمة العظمى لـ k بحيث يكون القوس−(k,r) موجوداً في المستوي الاسقاطيPG(2,q) بـ $m_r(2,q)$.

المستوي الاسقاطي PG(2,q) المعرف على الحقل المنتهي GF(q) هو فضاء ذو بعد 2 يحوي q^2+q+1 من النقاط و q^2+q+1 من الخطوط وكل خط تقع عليه q+1 من النقاط، وكل نقطة يمر خلالها q+1 من الخطوط. كما أن لأية نقطتين في المستوي الاسقاطي PG(2,q) يوجد خط واحد فقط يصل

بينهما وكل خطين يلتقيان في نقطة واحدة فقط ، وتوجد على الأقل أربع نقاط لا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة.

القوس$-(k,r)$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ هو مجموعة k من النقاط في المستوي بحيث يوجد r من النقاط على خط ولا يوجد $r+1$ أو أكثر من تلك النقاط على خط, ويقال أن القوس$-(k,r)$ **تاماً** إن لم يكن محتوى في قوس$-(k+1,r)$.

إن القيمة $m_r(2,q)$ قد شغلت حيزاً كبيراً من دراسة وبحوث العلماء, ففي عام 1956 أثبت العالم ($Barlotti$) [2] أن $m_r(2,q) \le (r-1)q+r$ عندما $r>2,(r,q)=1$.كما وردت دراسة اخرى عن هذه القيمة في المصدر [8]عام 1986.

أما المجاميع القالبية فقد أعطى العالمان ($Hill$) و($Mason$) في عام 1981 [4] أمثلة عن المجاميع القالبية الثلاثية ذات حجم $4q-1$ عندما q زوجي, $4q$ عندما q فردي.

وفي عام 2004 أثبت العالم($Ball$) [1] أن القوس $-(rq-q+r-\varepsilon,r)$ غير تام في مستوي ($Desargusian$) من الرتبة q وأن r تقسم q وذلك عندما $0<\varepsilon \le r/2$ وأن $q/r>3$, وعندما $q=2r$ فان الأقواس_(k,r) غير تامة في حالة $0<\varepsilon<0.381r$, وإذا كان $q=3r$ فان الأقواس_(k,r) غير تامة عندما $0<\varepsilon<0.476r$.

1.1. مبرهنة[5]

ليكن K قوساً في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فان:

$1-\sum_{i=0}^{r} T_i = q^2+q+1$	$6-\sum_{i=0}^{r} S_i = q+1$
$2-\sum_{i=1}^{r} iT_i = n(q+1)$	$7-\sum_{i=1}^{r} iS_i = n$
$3-\sum_{i=2}^{r} i(i-1)T_i = n(n-1)$	$8-iT_i = \sum_{p} R_i$
$4-\sum_{i=1}^{r} R_i = q+1$	$9-(q+1-i)T_i = \sum_{Q} S_i$
$5-\sum_{i=2}^{r} (i-1)R_i = n-1$	

حيث T_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوس K . R_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوسK خلال نقطة p من نقاط القوس K . S_i يمثل العدد الكلي للقواطع -i للقوس K خلال نقطة Q في K/ PG(2,q) .

2.1. مبرهنة[5]

اذا كان للمعادلتين (4) و(5) في المبرهنة أعلاه L من الحلول المختلفة غير السالبة $B_j=(R_{1j},R_{2j},...,R_{nj}),\ j=1,2,...,L$ ووجدت b_j من النقاط على القوس A من النمط (k,r) تحقق الحلول B_j فان:

$$\sum_{j=1}^{L} b_j R_{ij}=iT_i,\, i=1,...,r$$

$$\sum_{j=1}^{L} b_j=k$$

3.1. مبرهنة :[5]

ليكن K قوساً تاماً في المستوي الاسقاطي PG(2,q) فان: $(q+1-r)T_r \ge q^2+q+1-r$

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $s_r=1$ لكل Q في PG(2,q) /K.

1.2. المجاميع القالبية – $\{\boldsymbol{\ell},\mathbf{t}\}$ الأصغرية

1.1.2. تعريف[3]

المجموعة B القالبية–{ℓ,t} في المستوي الاسقاطي PG(2,q) هي مجموعة ℓ من النقاط اذ ان كل خط في المستوي الاسقاطي PG(2,q) يقطع B بما لا يقل عن t من النقاط ويوجد خط يقطع B بـt من النقاط بالضبط . يقال للمجموعة القالبية B أنها تافهة اذا احتوت على خط من الخطوط بكل نقاطه . يقال للمجموعة القالبية B انها أصغرية أو غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية منها تشكل مجموعة قالبية .

2.2. العلاقة بين المجموعة القالبية– $\{\boldsymbol{\ell},\mathbf{t}\}$ والقوس – (k, n) :[6] :

ان الاقواس – (k,n) والمجاميع القالبية – t هي الواحدة متممة للاخرى في المستوي الاسقاطي PG(2,q) حيث أن n+t=q+1 . أي ان متممة المجموعة القالبية – t هي مجموعة من النقاط التي تتقاطع مع جميع الخطوط على الأكثر بـ n من النقاط وهذه المجموعة تمثل القوس – (k,n) . كما ان ايجاد أصغر مجموعة قالبية – $\{\ell,t\}$ يكافئ ايجاد اكبر قوس – (k, n) في المستوي الاسقاطي PG (2, q) .

3.2. مبرهنة [8] :لتكن B عبارة عن مجموعة قالبية– $\{\boldsymbol{\ell},\mathbf{t}\}$ أصغرية ذات حجم b فان $b\le tT_r$.

4.2. مبرهنة[1]

ليكن K القوس–$(rq-q+r-\varepsilon\ ,r)$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ حيث أن r تقسم q .

1. إذا كان q زوجي عند $\varepsilon<r/2$ فان $q/r>2$ أو $\varepsilon>0.381r$ فان $q/r=2$ نستطيع أن نوسع K توسيع وحيد إلى بعض الأقواس العظمى التي تحتوي على $rq-q+r$ من النقاط .
2. إذا كان q فردي و $q/r=3$ فان $\varepsilon>0.476r$.

5.2. مبرهنة[7]

ليكن K القوس_$(pq-q+p-\varepsilon,p)$ في $PG(2,q)$ فان لكل q فردي $\varepsilon>q^{1/4}/2$.

1.3. الأقواس-(k,r) غيرالتامة

فيما يلي سنذكر المبرهنة والنتائج الآتية للأقواس_(k,r) غير التامة في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ عندما $r=2,3,4$ ،علما أنq أولي لقيم $11\le q \le 31$ بالإضافة إلى $q=16$ (لأنه حقل زوجي)
اذ أن $\varepsilon \ge -A(r-1)^2+B(r-1)-C$ وأن A,B,C ثوابت.

1.1.3. مبرهنة

لتكن B مجموعة قالبية_$\{\ell,t\}$ أصغرية في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K=PG(2,q)\setminus B$.

1. إذا كان $q=11$, $r=3,4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -3.5(r-1)^2+18.5(r-1)-7$.
2. إذا كان $q=13$, $r=2,3$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -4(r-1)^2+21(r-1)-7$.
3. إذا كان $q=16$, $r=4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -6.5(r-1)^2+31.5(r-1)-13$.
4. إذا كان $q=19$, $r=2,3$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -9(r-1)^2+42(r-1)-18$.
5. إذا كان $q=23$, $r=2,3,4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -10(r-1)^2+49(r-1)-21$.
6. إذا كان $q=29$, $r=34$, فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -12.5(r-1)^2+61.5(r-1)-26$.
7. إذا كان $q=31$, $r=2,3$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -13.5(r-1)^2+66.5(r-1)-28$.

البرهان

1. لتكن $r=3, q=11$ وأن $k\le 9$ حيث أن $\varepsilon \ge -3.5(r-1)^2+18.5(r-1)-7$
$|B|=b=124, t=9$
باستخدام المعادلات في ادناه نحصل على :

$$T_9+T_{10}+T_{11}+T_{12}=133$$
$$9T_9+10T_{10}+11T_{11}+12T_{12}=1488$$
$$72T_9+90T_{10}+110T_{11}+132T_{12}=15252$$
$$\Rightarrow T_{11}+3T_{12}=219$$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
1	33	39	60
2	30	42	59
3	27	45	58
4	24	48	57
5	21	51	56
6	18	54	55
7	15	57	54
8	12	60	53
9	9	63	52

10	6	66	51
11	3	69	50
12	0	72	49

وباستخدام المبرهنة (3.2.) B, أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه b>9T9 وهذا تناقض لذلك k غير تام .وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -3.5(r-1)^2 + 18.5(r-1) - 7$.

الآن عندما $r = 4, q = 11$, $k \le 20$ حيث أن $\varepsilon \ge -3.5(r-1)^2 + 18.5(r-1) - 7$

$$|B| = b = 113, t = 9$$

باستخدام المعادلات (1,2,3) نحصل على :

$$T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} = 133$$
$$8T_8 + 9T_9 + 10T_{10} + 11T_{11} + 12T_{12} = 1356$$
$$56T_8 + 72T_9 + 90T_{10} + 110T_{11} + 132T_{12} = 12656$$
$$\Rightarrow T_{11} + 3T_{12} + 6T_{12} = 268$$

أن اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات في أعلاه هي :

T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
14	16	58	20	25

وباستخدام المبرهنة (3.2.),B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_9$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon \ge -3.5(r-1)^2 + 18.5(r-1) - 7$.

2. في هذه الحالة $r = 2, q = 13$ وأن $k \le 5$ حيث أن $\varepsilon \ge -4(r-1)^2 + 21(r-1) - 7$

$$|B| = b = 178, t = 12$$

بواسطة المعادلات (1,2,3) نحصل على :

$$T_{12} + T_{13} + T_{14} = 183 \quad \text{.......... ....}(1)$$
$$12T_{12} + 13T_{13} + 14T_{14} = 2492 \quad \text{.......... ....}(2)$$
$$132T_{12} + 156T_{13} + 182T_{14} = 31506 \quad \text{.......... ....}(3)$$
$$\Rightarrow 12T_{13} + 25T_{14} = 3675$$

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{12}	T_{13}	T_{14}
10	50	123

بواسطة المبرهنة (3.2.) B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{12}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -4(r-1)^2 + 21(r-1) - 7$.

الآن عندما $q = 13$, $r = 3$, $k \le 10$ حيث أن $\varepsilon \ge -4(r-1)^2 + 21(r-1) - 7$

$$|B| = b = 173, t = 11$$

بواسطة المعادلات (1,2,3) نحصل على :

$T_{11}+T_{12}+T_{13}+T_{14}=183$

$11T_{11}+12T_{12}+13T_{13}+14T_{14}=2422$

$110T_{11}+132T_{12}+156T_{13}+182T_{14}=29756$

$\Rightarrow T_{13}+3T_{14}=314$

أن كل الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
1	42	53	87
2	39	56	86
3	36	59	85
4	33	62	84
5	30	65	83
6	27	68	82
7	24	71	81
8	21	74	80
9	18	77	79
10	15	80	78
11	12	83	77
12	9	86	76
13	6	89	75
14	3	92	74
15	0	95	73

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b\le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b>tT_{11}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon>-4(r-1)^2+21(r-1)-7$.

3. في هذه الحالة $r=4,q=16$ وأن $k\le 29$ حيث أن $\varepsilon\ge -6.5(r-1)^2+31.5(r-1)-13$.

$|B|=b=173, t=11$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{13}+T_{14}+T_{15}+T_{16}+T_{17}=273$ ....(1)

$13T_{13}+14T_{14}+15T_{15}+16T_{16}+17T_{17}=4148$ ....(2)

$156T_{13}+182T_{14}+210T_{15}+240T_{16}+272T_{17}=59292$ ....(3)

$\Rightarrow T_{15}+3T_{16}+6T_{17}=565$

أنا اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هو :

T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}

18	64	106	17	68

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{11}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -6.5(r-1)^2 + 31.5(r-1) - 13$.

4. في هذه الحالة $r = 2, q = 19$ وأن $k \le 6$ حيث أن $\varepsilon \ge -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$

$|B| = b = 375, t = 18$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{18} + T_{19} + T_{20} = 381$ ....(1)

$18T_{18} + 19T_{19} + 20T_{20} = 7500$ ....(2)

$306T_{18} + 342T_{19} + 380T_{20} = 140250$ ....(3)

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{18}	T_{19}	T_{20}
15	90	276

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{18}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$.

الآن عندما $r = 3, q = 19$ ، $k \le 11$ حيث أن $\varepsilon > -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$

$|B| = b = 370, t = 17$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{17} + T_{18} + T_{19} + T_{20} = 381$ ....(1)

$17T_{17} + 18T_{18} + 19T_{19} + 20T_{20} = 7400$ ....(2)

$272T_{17} + 306T_{18} + 342T_{19} + 380T_{20} = 136530$ ....(3)

$\Rightarrow T_{19} + 3T_{20} = 758$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}
1	52	113	215
2	49	116	214
3	46	119	213
4	43	122	212
5	40	125	211
6	37	128	210
7	34	131	209
8	31	134	208
9	28	137	207
10	25	140	206
11	22	143	205

12	19	146	204
13	16	149	203
14	13	152	202
15	10	155	201
16	7	158	200
17	4	161	199
18	1	164	198

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{17}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$.

5. في هذه الحالة $r = 2, q = 23$ وأن $k \le 7$ حيث أن $\varepsilon \ge -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$.

$$|B| = b = 546, t = 22$$

بواسطة المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{22} + T_{23} + T_{24} = 553$ ....(1)

$22T_{22} + 23T_{23} + 24T_{24} = 13104$ ....(2)

$462T_{22} + 506T_{23} + 552T_{24} = 297570$ ....(3)

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{22}	T_{23}	T_{24}
21	126	406

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{22}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$.

الآن عندما $r = 3, q = 23$ ، $k \le 12$ حيث أن $\varepsilon \ge -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$

$$|B| = b = 541, t = 22$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24} = 553$ ....(1)

$21T_{21} + 22T_{22} + 23T_{23} + 24T_{24} = 12904$ ....(2)

$420T_{21} + 462T_{22} + 506T_{23} + 552T_{24} = 292140$ ....(3)

$\Rightarrow T_{23} + 3T_{24} = 1149$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}
1	63	159	330
2	60	162	329
3	57	165	328
4	54	168	327
5	51	171	326

6	48	174	325
7	45	177	324
8	42	180	323
9	39	183	322
10	36	186	321
11	33	189	320
12	30	192	319
13	27	195	318
14	24	198	317
15	21	201	316
16	18	204	315
17	15	207	314
18	12	210	313
19	9	213	312
20	6	216	311
21	3	219	310

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{21}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$.

الآن عندما $r = 4, q = 23$, $k \le 37$ حيث أن $\varepsilon \ge -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$

$$|B| = b = 513, t = 20$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{20} + T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24} = 553$ ....(1)

$20T_{20} + 21T_{21} + 22T_{22} + 23T_{23} + 24T_{24} = 12312$ ....(2)

$380T_{20} + 420T_{21} + 462T_{22} + 506T_{23} + 552T_{24} = 262656$ ....(3)

$\Rightarrow T_{22} + 3T_{23} + 6T_{24} = 1320$

أن اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هو :

T_{20}	T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}
25	113	177	95	143

وباستخدام المبرهنة (3.2.) , B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{20}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -10(r-1)^2 + 49(r-1) - 21$.

6. في هذه الحالة $r = 3, q = 29$ وأن $k \le 14$ حيث أن $\varepsilon \ge -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$

$|B| = b = 857, t = 27$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$T_{27} + T_{28} + T_{29} + T_{30} = 871 \quad \text{.........................}(1)$$
$$27T_{27} + 28T_{28} + 29T_{29} + 30T_{30} = 25710 \quad \text{.........................}(2)$$
$$702T_{27} + 756T_{28} + 812T_{29} + 870T_{30} = 733529 \quad \text{.........................}(3)$$
$$\Rightarrow T_{29} + 3T_{30} = 1864$$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{27}	T_{28}	T_{29}	T_{30}
1	88	241	541
2	83	244	540
3	82	247	539
4	79	250	538
5	76	253	537
6	73	256	536
7	70	259	535
8	67	262	534
9	64	265	533
10	61	268	532
11	58	271	531
12	55	274	530
13	52	277	529
14	49	280	528
15	46	283	527
16	43	286	526
17	40	289	525
18	37	292	524
19	34	295	523
20	31	298	522
21	28	301	521
22	25	304	520
23	22	307	519
24	19	310	518
25	16	313	517
26	13	316	516
27	10	319	515
28	7	322	514
29	4	325	513

30	1	328	512

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{27}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$.

ألان عندما $r = 4, q = 29$ وأن $k \le 45$ حيث أن $\varepsilon \ge -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$

$$|B| = b = 826, t = 26$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$T_{26} + T_{27} + T_{28} + T_{29} + T_{30} = 871$$
$$26T_{26} + 27T_{27} + 28T_{28} + 29T_{29} + 30T_{30} = 24720$$
$$650 + 702T_{27} + 756T_{28} + 812T_{29} + 870T_{30} = 678152$$
$$\Rightarrow T_{28} + 3T_{29} + 6T_{30} = 2166$$

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}	T_{30}
31	194	222	200	224

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{26}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$.

7. في هذه الحالة $r = 2, q = 31$ وأن $k \le 8$ حيث أن $\varepsilon \ge -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$

$$|B| = b = 985, t = 30$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$T_{30} + T_{31} + T_{32} = 993 \qquad \text{...(1)}$$
$$30T_{30} + 31T_{31} + 32T_{32} = 13520 \qquad \text{...(2)}$$
$$870T_{30} + 930T_{31} + 992T_{32} = 969240 \qquad \text{...(3)}$$

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{30}	T_{31}	T_{32}
28	200	765

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{30}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$.

الآن عندما $r = 3, q = 31$ وأن $k \le 14$ حيث أن $\varepsilon \ge -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$

$$|B| = b = 979, t = 29$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$T_{29} + T_{30} + T_{31} + T_{32} = 993 \qquad \text{...(1)}$$
$$29T_{29} + 30T_{30} + 31T_{31} + 32T_{32} = 31328 \qquad \text{...(2)}$$
$$812T_{29} + 870T_{30} + 930T_{31} + 992T_{32} = 957462 \qquad \text{...(3)}$$
$$\Rightarrow T_{31} + 3T_{32} = 2174$$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{29}	T_{30}	T_{31}	T_{32}
1	88	269	635
2	85	272	634
3	82	275	633
4	79	278	632
5	76	281	631
6	73	284	630
7	70	287	629
8	67	290	628
9	64	293	627
10	61	296	626
11	58	299	625
12	55	302	624
13	52	305	623
14	49	308	622
15	46	311	621
16	43	314	620
17	40	317	619
18	37	320	618
19	34	323	617
20	31	326	616
21	28	329	615
22	25	332	614
23	22	335	613
24	19	338	612
25	16	341	611
26	13	344	610
27	10	347	609
28	7	350	608
29	4	353	607
30	1	356	606

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{29}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$.

2.3. نتيجة

لتكن B **مجموعة قالبية من النمط** $\{\ell,10\}$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K=PG(2,q)\setminus B$.

1. إذا كان $q=11$, $r=2$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \geq -3.5(r-1)^2+18.5(r-1)-7$.
2. إذا كان $q=13$, $r=4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \geq -4(r-1)^2+21(r-1)-7$.

البرهان

1. في هذه الحالة $r=2, q=11$ وأن $k\leq 5$ حيث أن $\varepsilon \geq -3.5(r-1)^2+18.5(r-1)-7$

$|B|=b=128, t=10$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{10}+T_{11}+T_{12}=133$ ....(1)

$10T_{10}+11T_{11}+12T_{12}=1536$ ....(2)

$90T_{10}+110T_{11}+132T_{12}=16256$ ....(3)

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{10}	T_{11}	T_{12}
10	40	83

وباستخدام المبرهنة (3.2.) B أصغرية فان $b\leq tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b>tT_{10}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -3.5(r-1)^2+18.5(r-1)-7$.

2. في هذه الحالة $r=4, q=13$ وأن $k\leq 23$ حيث أن $\varepsilon \geq -4(r-1)^2+21(r-1)-7$

$|B|=b=160, t=10$

باستخدام المعادلات (1,2,3) نحصل على :

$T_{10}+T_{11}+T_{12}+T_{13}+T_{14}=183$ ....(1)

$10T_{10}+11T_{11}+12T_{12}+13T_{13}+14T_{14}=2240$ ....(2)

$90T_{10}+110T_{11}+132T_{12}+156T_{13}+182T_{14}=25440$ ....(3)

$\Rightarrow T_{12}+3T_{13}+6T_{14}=385$

أن اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هو :

T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
15	26	85	14	43

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b\leq tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b>tT_{10}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -4(r-1)^2+21(r-1)-7$.

3.3. نتيجة

لتكن B **مجموعة قالبية من النمط** _$\{\ell,14\}$ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K = PG(2,q) \setminus B$.

1. إذا كان $q = 16$, $r = 3$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \geq -6.5(r-1)^2 + 31.5(r-1) - 13$.
2. إذا كان $q = 17$, $r = 4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \geq -7.5(r-1)^2 + 35.5(r-1) - 15$.

البرهان

1. في هذه الحالة $r = 3, q = 16$ وأن $k \leq 11$ حيث أن $\varepsilon \geq -6.5(r-1)^2 + 31.5(r-1) - 13$

$|B| = b = 262, t = 14$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{14} + T_{15} + T_{16} + T_{17} = 273$ ....(1)

$14T_{14} + 15T_{15} + 16T_{16} + 17T_{17} = 4454$ ....(2)

$182T_{14} + 210T_{15} + 240T_{16} + 272T_{17} = 68382$...(3)

$\Rightarrow T_{16} + 3T_{17} = 500$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}
1	52	80	140
2	49	83	139
3	46	86	138
4	43	89	137
5	40	92	136
6	37	95	135
7	34	98	134
8	31	101	133
9	28	104	132
10	25	107	131
11	22	110	130
12	19	113	129
13	16	116	128
14	13	119	127
15	10	122	126
16	7	125	125
17	4	128	124
18	1	131	123

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \leq tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{14}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -6.5(r-1)^2 + 31.5(r-1) - 13$.

2. في هذه الحالة $r = 4, q = 17$ وأن $k \leq 31$ حيث أن $\varepsilon \geq -7.5(r-1)^2 + 35.5(r-1) - 15$

$|B| = b = 276, t = 14$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{14}+T_{15}+T_{16}+T_{17}+T_{18}=307$ ....(1)
$14T_{14}+15T_{15}+16T_{16}+17T_{17}+18T_{18}=4968$ ....(2)
$182T_{14}+210T_{15}+240T_{16}+272T_{17}+306T_{18}=75900$ ....(3)
$\Rightarrow T_{16}+3T_{17}+6T_{18}=633$

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}
19	83	102	29	74

وباستخدام المبرهنة (3.2.), B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{14}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$.

4.3. نتيجة

لتكن B مجموعة قالبية من النمط $\{\ell,15\}$_ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K=PG(2,q)\setminus B$.

1. إذا كان $q=16$, $r=2$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -6.5(r-1)^2+31.5(r-1)-13$.
2. إذا كان $q=17$, $r=3$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$.

البرهان

1. في هذه الحالة $r=2, q=16$ وأن $k\le 6$ حيث أن $\varepsilon \ge -6.5(r-1)^2+31.5(r-1)-13$
$|B|=b=267, t=15$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{15}+T_{16}+T_{17}=273$ ....(1)
$15T_{15}+16T_{16}+17T_{17}=4539$ ....(2)
$210T_{15}+240T_{16}+272T_{17}=71022$ ....(3)

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{15}	T_{16}	T_{17}
15	72	186

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{15}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام .وبنفس البرهان أعلاه k غير تام عندما $\varepsilon > -6.5(r-1)^2+31.5(r-1)-13$.

2. في هذه الحالة $r=3, q=17$ وأن $k\le 11$ حيث أن $\varepsilon \ge -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$
$|B|=b=296, t=15$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{15}+T_{16}+T_{17}+T_{18}=307$ ....(1)

$15T_{15}+16T_{16}+17T_{17}+18T_{18}=5328$ ....(2)

$210T_{15}+240T_{16}+272T_{17}+306T_{18}=87320$ ....(3)

$\Rightarrow T_{17}+3T_{18}=580$

أن الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}
1	52	91	163
2	49	94	162
3	46	97	161
4	43	100	160
5	40	103	159
6	37	106	158
7	34	109	157
8	31	112	156
9	28	115	155
10	25	118	154
11	22	121	153
12	19	124	152
13	16	127	151
14	13	130	150
15	10	133	149
16	7	136	148
17	4	139	147
18	1	142	146

وباستخدام المبرهنة (3.2.) B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{15}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$.

5.3. نتيجة

لتكن B **مجموعة قالبية من النمط** $\{\ell,16\}$_ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K=PG(2,q)\setminus B$.

1. إذا كان $q=17$, $r=2$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$.
2. إذا كان $q=19$, $r=4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -9(r-1)^2+42(r-1)-18$.

البرهان

1. في هذه الحالة $r=2, q=17$ وأن $k \le 6$ حيث أن

$$\varepsilon \ge -7.5(r-1)^2+35.5(r-1)-15$$

$$|B|=b=301, t=16$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$T_{16}+T_{17}+T_{18}=307$ ....(1)

$16T_{16}+17T_{17}+18T_{18}=5418$ ....(2)

$240T_{16}+272T_{17}+306T_{18}=90300$ ....(3)

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو :

T_{16}	T_{17}	T_{18}
15	78	214

وباستخدام المبرهنة (3.2.) B, أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{16}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -7.5(r-1)^2 + 35.5(r-1) - 15$.

2. في هذه الحالة $q = 19$, $r = 4$, $k \le 34$ حيث أن

$$\varepsilon \ge -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$$

$$|B| = b = 347, t = 16$$

$$T_{16} + T_{17} + T_{18} + T_{19} + T_{20} = 381$$

$$16T_{16} + 17T_{17} + 18T_{18} + 19T_{19} + 20T_{20} = 6940$$

$$240T_{16} + 272T_{17} + 306T_{18} + 342T_{19} + 380T_{20} = 120062$$

$$\Rightarrow T_{18} + 3T_{19} + 6T_{20} = 807$$

أن اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي:

T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}
21	106	117	44	93

وباستخدام المبرهنة (3.2.) B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{16}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -9(r-1)^2 + 42(r-1) - 18$.

6.3. نتيجة

لتكن B مجموعة قالبية من النمط $\{\ell, 28\}$_ في المستوي الاسقاطي $PG(2,q)$ وأن $K = PG(2,q) \setminus B$.

1. في هذه الحالة $r = 2, q = 29$, فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$.
2. إذا كان $q = 31$, $r = 4$ فان K غير تام عندما $\varepsilon \ge -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$

البرهان

1. في هذه الحالة $r = 2, q = 29$ وأن $k \le 8$ حيث أن

$$\varepsilon \ge -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$$

$$|B| = b = 863, t = 28$$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$T_{28} + T_{29} + T_{30} = 871$$

$$28T_{28} + 29T_{29} + 30T_{30} = 25890$$

$$756T_{28} + 812T_{29} + 870T_{30} = 743906$$

أن الحل غير السالب للمعادلات أعلاه هو:

T_{28}	T_{29}	T_{30}
28	184	659

وباستخدامالمبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{28}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -12.5(r-1)^2 + 61.5(r-1) - 26$.

2.في هذه الحالة $r = 4, q = 31$ وأن $k \le 47$ حيث أن $\varepsilon \ge -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$

$|B| = b = 946, t = 28$

باستخدام المعادلات أدناه نحصل على :

$$28T_{28} + T_{29} + T_{30} + T_{31} + T_{32} = 993$$
$$28T_{28} + 29T_{29} + 30T_{30} + 31T_{31} + 32T_{32} = 30272$$
$$28T_{28} + 812T_{29} + 870T_{30} + 930T_{31} + 992T_{32} = 893970$$
$$\Rightarrow T_{30} + 3T_{31} + 6T_{32} = 2527$$

أن اكبر الحلول غير السالبة للمعادلات أعلاه هي :

T_{28}	T_{29}	T_{30}	T_{31}	T_{32}
33	178	349	140	293

وباستخدام المبرهنة (3.2.) ,B أصغرية فان $b \le tT_r$ لكن من الجدول أعلاه $b > tT_{28}$ وهذا تناقض لذلك k غير تام . وبالبرهان أعلاه نفسه k غير تام عندما $\varepsilon > -13.5(r-1)^2 + 66.5(r-1) - 28$.

المصادر

[1] Ball,S.and Blokhuis,A.,(1999),On the incompleteness of (k ,n)-arcs in Desarguesian planes of order q where n divides q, Geometria Dedicate 74,P.P.111-135.

[2] Barlotti,A.(1965)," Some Topics in Finite Geometrical Structures", Institute of Statistics Mimeo series no. 439, , University of North Carolina, USA.

[3] Daskalov,R. (2008), On the maximum size of some (k,r)-arcs in PG(2,q), Discrete Math.,308, p.p. 565-570.

[4] Hill, R. and Mason, J.R. (1981), On (k,n)-arcs and the falsity of the Lunelli _Sce conjecture, in: London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 49, CUP, 153-168.

[5] Hirschfeld, J.W.P. (1979)," Projective Geometries over Finite Fields" , Oxford University Press, oxford.

[6] Hirschfeld, J.W.P. and Storme, L. (1998), The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces, J. Statistical planning and inference 72, 355-380.

[7] Richardson, M. (1956), On finite projective games , Proc. Amer.Math. Soc.,7, 458-465.

[8] Yasin, A.L. (1986), Cubic Arcs in the Projective Plane of Order Eight, Ph.D. Thesis,University of Sussex.