A Full List of Projectively Distinct K-Arcs in Finite Projetive Space Pg(2,8)

Ali Ahmed A. Abdulla **Abdulkhalik L. Yasin**
ali2005aha@gmail.com
College of Computer Science and Mathematics,
University of Mosul

Received on: 6/6/2011 **Accepted on: 16/8/2011**

ABSTRACT

A k-arc in a plane PG(2,q) is a set of k point such that every line in the plane intersect it in at most two points and there is a line intersect it in exactly two points. A k-arc is complete if there is no k+1-arc containing it. This thesis is concerned with studies a k-arcs, k=4,5,….,10 and classification of projectively distinct k-arcs and distinct arcs under collineation. We prove by using computer program that the only complete k-arcs is for, k= 6,10. This work take (150) hours computer time .

Keywords: projective space; complete arcs; Companion matrix

القائمة الكاملة للأقواس-k المختلفة إسقاطيا في المستوي الإسقاطي PG(2,8)

علي أحمد عبد الرحيم عبدالله **عبد الخالق لازم ياسين**

كلية علوم الحاسوب والرياضيات *كلية علوم الحاسوب والرياضيات*

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2011/08/16 **تاريخ استلام البحث: 2011/06/06**

الملخص

القوس-k في المستوي PG(2,q) هو مجموعة من النقاط بحيث إن كل خط في المستوي يقطعه بما لا يزيد عن نقطتين ويوجد خط يقطعه بنقطتين بالضبط، ويسمى القوس-k بأنه تام إذا لم يكن بالإمكان وجود قوس-k+1 يحتويه. لقد قمنا في هذا البحث بدراسة الأقواس-k، k= 4,5,…,10 إذ قمنا بتصنيف هذه الأقواس وإيجاد الأقواس المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة.وقد أثبتنا حاسوبياً أن الأقواس التامة هي فقط الأقواس-k= 6,10,k. وقد استغرق منا العمل (150) ساعة حاسوبية.

الكلمات المفتاحية: المستوى الاسقاطي ; القوس التام ; المصفوفة الإسقاطية.

(1) المقدمة

يسمى القوس-k بأنه تام إذا لم يكن بالإمكان وجود قوس-k+1 يحتويه، لقد قام العالم Hirschfeid [6] بمجموعة من الدراسات للأقواس-k في المستوي الإسقاطي PG(2,q) المعرفة على حقل كالوا GF(q) لقيم q<9. كما قامت الباحثة هدى يونس المشار إليها بالمصدر [10] بأول دراسة للأقواس-k في المستوي الإسقاطي PG(2,16). ومؤخراً أيضا جاءت دراسات عدة للأقواس-k فقد قام الباحثان Coolsaet , Sticker [3]، [4] بتصنيف الأقواس-k في المستوي الإسقاطي PG(2,q) لـ q=23,25,27. وكما قام الباحثان Chao, Kaneta [2] لتصنيف الأقواس-k في المستوي الإسقاطي PG(2,q) للقيم $23 \le q \le 29$.

ومن الجدير بالذكر أن دراسة مثل هذا الموضوع المتناول في هذا البحث يحتاج إلى فترة زمنية ليست بقصيرة لتنفيذ البرامج الحاسوبية التي استخدمت لإيجاد الأقواس-k المختلفة إسقاطية والأقواس-k المختلفة بتأثير الاستقامة.

مثال : لتكن $F(x)= x^3 +x+1$ متعددة حدود غير قابلة للتحليل على Z_2 فان:-

$$GF(8) = \{ \sum_{i=0}^{h-1} a_i w^i \;/\; a_i \in Z_2, w^3 + w + 1 = 0 \}, \; h=3$$

عناصر GF(8) هي

a_0	a_1	a_2	$a_0 + a_1 w + a_2 w^2$
0	0	0	0
0	1	0	w
0	1	1	$w + w^2$
0	0	1	w^2
1	0	0	1
1	1	0	$1 + w$
1	0	1	$1 + w^2$
1	1	1	$1 + w + w^2$

إن عناصر GF(8) هي:-

$GF(8) = \{0, 1, w, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6 : w^7 = 1\}$, w هو جذر أولي

(1-2) [6] تعريف

إذا كانت $F(x) = x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \ldots - a_o$ متعددة حدود أحادية، فإن المصفوفة المرافقة C(F) (Companion matrix) هي مصفوفة ذات بعد n x n.

$$C(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_o & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(1−3) [6] تعريف

إذا كان α' و α فضائين إسقاطيين فإن الإسقاط (Projectively) $S : \alpha \rightarrow \alpha'$ هي علاقة تقابل (Bijection) تمثل بالمصفوفة غير المفردة T بحيث إذا كانت $P(x') = P(x)\, S$ فإن $tx' = xT$، إذ إن x و x' هما متجها الإحداثيات (Coordinate vectors) للنقطتين $P(x)$ و $P(x')$ وان $t \in K_o$.

(1−4) [6] مبدأ الثنوية (Principle of Duality)

لأي فضاء إسقاطي $S = PG(n,K)$ يوجد فضاء S^* يسمى فضاءً ثنوياً والذي تكون فيه النقاط والأوليات هي على التوالي الأوليات والنقاط في S .

(1–5) [6] المبرهنة الأساسية في الهندسة الإسقاطية

(Fundamental Theorem of Projective Geometry)

1– إذا كانت $\{p_1, p_2,..., p_{n+2}\}$ و $\{p'_1, p'_2,..., p'_{n+2}\}$مجموعتين من $n+2$ من النقاط في $PG(n,k)$، بحيث لا يوجد $n+1$ من النقاط المختارة من نفس المجموعة واقعة في أولي، فإن هناك إسقاطاً وحيداً S إذ إن $P'_i = P_i S$ و $i \in\{0,1,2.......\}$.

2– ليكن $A = PG(n,k)$ فإن الدالة $S': A \to A$ تسمى استقامة (Collination) إذا كانت $S' = \sigma S$، حيث إن σ عبارة عن تقابل ذاتي على A (Automorphism) و S هو إسقاط.

(1-6) [6] الإسقاط الدوار (Cyclic Projectively)

ليكن T إسقاطاً في المستوي $PG(n,q)$ فان T تسمى إسقاطاً دواراً إذا أمكن ترتيب نقاط الفضاء كلها تترتب في دارة واحدة فقط.

مثال : الإسقاط الآتي

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

حيث أن λ هو جذر للحقل $GF(8)$ إسقاط دوار.

(1-7) [6] تعريف

القوس – (k,n) $((k,n)$ - arc) في الفضاء $PG(n,q)$ هو مجموعة تتكون من k من النقاط بحيث يوجد على الأكثر n منها على خط .ويوجد n منها بالضبط على الخط. عندما يكون $n=2$ فإن القوس – $(k,2)$ يرمز له بالقوس– k $(k$ - arc).

(1-8) [10] مبرهنة

ليكن $t(p)$ يمثل عدد القواطع الأحادية خلال النقطة P ، حيث إن p هي نقطة من نقاط القوس – k ذي الرمز K. وليكن T_i يمثل عدد القواطع – i للقوس – k في المستوي فان :

1- $t(p) = q + 2 - k = t$

2- a. $T_2 = k (k - 1) / 2$
b. $T_1 = kt$
c. $T_o = q (q - 1) / 2 + t (t - 1) / 2$

(1-9) [6] تعريف

يقال للقوس–(k,n) إنه تام (complete) إذا لم يكن هنالك قوس – $(k+1,n)$ يحتويه.

(1-10) [5] تعريف

ألتربيعي (Quadric) هو أولوية ذات الرتبة 2 في الفضاء $PG(n,q)$ كذلك إذا كانت $R = V(F)$ حيث إن F هي صيغة تربيعية فأن :

F = $\sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j = a_{00} x_0^2 + a_{01} x_0 x_1 + a_{02} x_0 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$.

تعريف [6] (1-11)

التربيعي غير المفرد في المستوي PG(2,q) يسمى مخروطي (Conic). إن الصيغة العامة للمخروطي هي $x_o^2 + x_1 x_2$ وبذلك يحتوي المخروطي C = V ($x_o^2 + x_1 x_2$) على q + 1 من النقاط.

(2) بناء وتصنيف الأقواس−k في المستوي الإسقاطي PG(2,8)

قمنا في هذا الفصل ببناء الأقواس -k من 4≤k≤10 ووجدنا الأقواس المختلفة إسقاطيا والأقواس المختلفة بتأثير الاستقامة كما وجدنا تأثير الزمرة PGL(3,8) على كل قوس من هذه الأقواس.

(2−2) المستوي PG(2,8) (PG(2,8) Plane)

المستوي PG(2,8) يحتوي على 73 نقطة و73 خطاً، وكل خط يحتوي على تسع نقاط وكل نقطة تقع على تسعة خطوط.

ليكن GF(8) هو حقل كالوا للرتبة (8) فان عناصر هذا الحقل هي $0,1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,......,\lambda^6 : \lambda^7 = 1$ وتحقق المعادلة التالية: $\lambda^3 + \lambda^2 + 1 = 0$. ولتكن

$$C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الوقوع التي تدور النقاط الـ 73 بدورة واحدة.

ولتكن $P_0=(1,0,0)$ فان

$$P_i = P_{i-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}^i, \; i= 1 , 2 , \dots , 72$$

إن النقاط الـ 73 التي تظهر موضحة في الجدول رقم (1):

جدول رقم (1). نقاط المستوي PG(2,8)

I	points	I	points	I	points
0.	(1,0,0)	25.	(1,1, λ)	50.	(1, λ, λ^4)
1.	(0,1,0)	26.	(1, λ^6, λ^5)	51.	(1, λ^3, λ)
2.	(0,0,1)	27.	(1, λ^2, λ^4)	52.	(1, λ^6,1)
3.	(1,0, λ^3)	28.	(1, λ^3, λ^6)	53.	(1,1, λ^5)
4.	(1, λ^4, λ^3)	29.	(1, λ, λ)	54.	(1, λ^2,1)
5.	(1, λ^4, λ^4)	30.	(1, λ^6, λ^2)	55.	(1,1,1)
6.	(1, λ^3, λ^2)	31.	(1, λ^5, λ)	56.	(1,1, λ^2)
7.	(1, λ^5, λ^4)	32.	(1, λ^6, λ)	57.	(1, λ^5, λ^6)
8.	(1, λ^3, λ^4)	33.	(1, λ^6, λ^6)	58.	(1, λ, λ^5)
9.	(1, λ^3, λ^5)	34.	(1, λ, λ^2)	59.	(1, λ^2,0)
10.	(1, λ^2, λ^6)	35.	(1, λ^5, λ^5)	60.	(0,1, λ^2)
11.	(1, λ,0)	36.	(1, λ^2, λ^2)	61.	(1,0, λ^6)
12.	(0,1, λ)	37.	(1, λ^5, λ^2)	62.	(1, λ, λ^3)
13.	(1,0, λ^5)	38.	(1, λ^5,0)	63.	(1, λ^4, λ^6)

14.	$(1, \lambda^2, \lambda^3)$	39.	$(0,1, \lambda^5)$	64.	$(1, \lambda, \lambda^6)$
15.	$(1, \lambda^4, \lambda^5)$	40.	$(1,0,1)$	65.	$(1, \lambda,1)$
16.	$(1, \lambda^2, \lambda^5)$	41.	$(1,1, \lambda^3)$	66.	$(1,1, \lambda^4)$
17.	$(1, \lambda^2, \lambda)$	42.	$(1, \lambda^4, \lambda)$	67.	$(1, \lambda^3,0)$
18.	$(1, \lambda^6, \lambda^4)$	43.	$(1, \lambda^6,0)$	68.	$(0,1, \lambda^3)$
19.	$(1, \lambda^3,1)$	44.	$(0,1, \lambda^6)$	69.	$(1,0, \lambda)$
20.	$(1,1,0)$	45.	$(1,0, \lambda^4)$	70.	$(1, \lambda^6, \lambda^3)$
21.	$(0,1,1)$	46.	$(1, \lambda^3, \lambda^3)$	71.	$(1, \lambda^4,0)$
22.	$(1,0, \lambda^2)$	47.	$(1, \lambda^4, \lambda^2)$	72.	$(0,1, \lambda^4)$
23.	$(1, \lambda^5, \lambda^3)$	48.	$(1, \lambda^5, 1)$		
24.	$(1, \lambda^4, 1)$	49.	$(1,1, \lambda^6)$		

ليكن L هو خط في المستوي ونأخذ L هو الخط في المالانهاية أي إن $X_2=0$ فان نقاط هذا الخط هي :

0 1 11 20 38 43 59 67 71

بما إن المصفوفة المرافقة C(f) تُدور جميع نقاط المستوي بدورة واحدة وبما إن النقاط والخطوط احدهما مثنى للأخر, وحسب مبدأ الثنوية فان C(f) تُدور الخطوط بدورة واحدة تحتوي على 73 خط

ويكون الخط الأخير 72 0 10 19 37 42 58 66 70

(3) بناء الأقواس-k, k=4,5, …,10 (Construction k-arcs for, k=4,5,…,10)

لتكن P_0 , P_1 , P_2 , P_3 هي : P_0= (1,0,0) P_1=(0,1,0) , P_2=(0,0,1) , P_3=(1,1,1) هي نقاط المصدر والتي تشكل القوس -4 وحسب المبرهنة الأساسية في الإسقاط (8-1) فان القوس-4 يكافئ القوس $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ وعليه فانه يمكن بناء الأقواس من k=5 إلى k=10 بالاعتماد على القوس-4 الذي يضم النقاط $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ وحسب الخوارزمية التالية المستخدمة بالبرنامج الحاسوبي:−

(3-2) خوارزمية العمل المستخدمة لتصنيف الأقواس -k ، $4 \le k \le 10$:

أولا: تعين الخطوط ذات القاطع -2 للقوس $K= \{P_0,P_1,P_2,P_3\}$.

ثانياً: نوجد النقاط التي لا تقع على الخطوط الثنائية .

ثالثاً: نضيف هذه النقاط فرادى إلى القوس k لتحصل على الأقواس−5

رابعاً: نوجد الأقواس المختلفة إسقاطيا وكذلك الأقواس المختلفة بتأثير الاستقامة .

خامساً: نوجد الزمر التي تثبت هذه الأقواس

سادساً: نعيد هذه الخطوات من ثانياً إلى خامساً للإيجاد الأقواس−6 والأقواس-7 والأقواس-8 والأقواس-9 والأقواس-10 .

سابعاً: نوجد الأقواس التامة لجميع الخطوات إن وجدت .

(3-3) الأقواس المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

(K-arc Projectively Distinct and Collnieation Distinct)

(3-3-1) الأقواس-5 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

لبناء الأقواس-5 نؤشر نقاط المصدر الأربعة على خطوط المستوي ونحذف نقاط الخطوط ذات القاطع الثنائي من نقاط المستوي PG(2.8) ثم نضيف النقاط فِرادى إلى نقاط المصدر فنحصل على الأقواس-5.

وباستخدام البرنامج الحاسوبي لإيجاد الأقواس-5 المختلفة إسقاطيا وجدنا إن عدد الأقواس المختلفة إسقاطيا هو قوس واحد والذي نقاطه هي:-

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(1, \lambda^4, \lambda^3)$

إن زمرة هذا القوس هي $C_2 \times C_2$ والمولدة من

$$\emptyset_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^5 \\ 0 & \lambda^5 & \lambda^5 \\ 0 & \lambda^4 & \lambda^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

التحويل $\emptyset_1$ يثبت النقطة $(1,0,0)$ ويقسم باقي نقاط القوس إلى مدارين هما:

المدار الأول $\{(0,1,0) , (0,0,1)\}$

والمدار الثاني $\{(1,1,1) , (1,\lambda^4,\lambda^3)\}$

التحويل $\emptyset_2$ يثبت النقطة $(1,0,0)$ ويقسم باقي نقاط القوس إلى مدارين هما:

والمدار الأول $\{(0,1,0) , (1,\lambda^4,\lambda^3)\}$

والمدار الثاني $\{(0,0,1) , (1,1,1)\}$

القوس-5 محتوى في المخروطي :

$$V(X_0X_1 + \lambda^4 X_0X_2 + \lambda^6 X_1X_2)$$

لتكن T_0 , T_1 , T_2 هي عدد القواطع -i للقوس-5.

$t(p)$ هي القواطع الأحادية لنقطة من نقاط القوس-5 .

حسب المبرهنة (1-12) فان

$t(p) = 5$, $T_0 = 38$, $T_1 = 25$, , $T_2 = 10$

بما إن عدد الأقواس-5 المختلفة إسقاطيا هو واحد.

فان عدد الأقواس-5 المختلفة بتأثير الاستقامة هي واحد أيضا.

(3-3-2) الأقواس-6 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

بنفس الطريقة في (3-3-1) نحصل على خمسة أقواس-6 مختلفة إسقاطيا كما في الجدول رقم (2).

جدول رقم (2). الأقواس-6 المختلفة إسقاطيا

	P_0	P_1	P_2	P3	P_4	P_5	G	|G|
X_0	0	1	2	55	4	8	$C_2 \times C_2$	4
X_2	0	1	2	55	4	9	S_3	6
X_3	0	1	2	55	4	28	S_4	24
X_4	0	1	2	55	4	30	S_4	24
X_5	0	1	2	55	4	50	S_4	24

وجدنا إن الأقواس X_3 , X_4 , X_5 هي أقواس تامة. الزمرة المثبتة للقوس X_1 هي $C_2 \times C_2$ مولدة من التحويليين:

$$\emptyset_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda^6 & \lambda^6 \\ 0 & \lambda^3 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

التحويل $\emptyset_1$ يثبت النقاط (1,0,0) , (1,1,1) ويقسم باقي نقاط القوس إلى مدارين هما:

المدار الأول : {(0,1,0) , (0,0,1)}

المدار الثاني : {($1,\lambda^4,\lambda^3$) , ($1,\lambda^3,\lambda^4$)}

التحويل $\emptyset_2$ يثبت النقاط (1,0,0) , (1,1,1) ويقسم باقي نقاط القوس إلى مدارين أيضا هما:

المدار الأول : {(0,1,0) , ($1,\lambda^4,\lambda^3$)}

المدار الثاني : {(0,0,1) , ($1,\lambda^3,\lambda^4$)}

إن المخروطي V($X_0X_1 + \lambda^4 X_0X_2 + \lambda^6 X_1X_2$) يحتوي على خمس نقاط من نقاط القوس X_1 والتي هي

4 55 2 1 0

الزمرة المثبتة للقوس X_2 هي S_3 مولدة من

$$\emptyset_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda^5 & 1 \\ \lambda^3 & 0 & 1 \\ \lambda^5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

التحويل$\emptyset_1$ يُدور النقاط في ثلاثة مدارات هي:

المدار الأول: {(1,0,0) , (0,0,1)}

المدار الثاني: {(1,1,1) , (0,1,0)}

المدار الثالث: {($1,\lambda^3,\lambda^5$) , ($1,\lambda^4,\lambda^3$)}

التحويل $\emptyset_2$ يدور النقاط في مدارين هما:

المدار الأول: {(1,0,0) , ($1,\lambda^3,\lambda^5$),(0,1,0)}

المدار الثاني: {(0,0,1) , (1,1,1) , ($1,\lambda^4,\lambda^3$)}

إن المخروطي V($X_0X_1 + \lambda^4 X_0X_2 + \lambda^6 X_1X_2$) يحتوي على النقاط الستة لـ X_2.

نلاحظ إن الزمرة المثبتة للأقواس X_3 , X_4 , X_5 التامة هي S_4 ولا يوجد قوس من هذه الأقواس محتوى بالكامل في مخروطي واحد.

لقد استخدمنا برنامجا collineation للإيجاد الأقواس المختلفة بتأثير الاستقامة فحصلنا على ثلاثة أقواس فقط كما هو موضع في الجدول التالي:

جدول رقم (3). الأقواس -6 المختلفة بتأثير الاستقامة

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Y_1	0	1	2	55	4	8
Y_2	0	1	2	55	4	9
Y_3	0	1	2	55	4	28

إن القوس Y_3 هو قوس تام.

(3-3-3) الأقواس-7 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

بنفس الطريقة في (1-3-3) حصلنا على قوسين مختلفين إسقاطيا كما في الجدول التالي:−

جدول رقم (4). الأقواس-7 المختلفة إسقاطيا

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	G	|G|
Z_1	0	1	2	55	4	8	16	S_3	6
Z_2	0	1	2	55	4	9	10	D_7	14

إن القوسين Z_1 ، Z_2 غير تامين ومن الجدول أعلاه حصلنا على النتيجة التالية:

نتيجة: لا يوجد قوس -7 تام في المستوي PG(2,8)

إن القوس Z_1 يمتلك الزمرة S_3 المولدة من التحويليين:

$$Ø_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda^5 & \lambda \\ 0 & \lambda^5 & \lambda^4 \\ 0 & \lambda^5 & \lambda^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$Ø_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

إن التحويل $Ø_1$ يثبت النقطة (1,0,0) ويدور باقي النقاط في مدارين هما:

المدار الأول: $\{(1,1,1) , (1,\lambda^2,\lambda^5) , (1,\lambda^3,\lambda^4)\}$

المدار الثاني: $\{(0,1,0) , (0,0,1) , (1,\lambda^4,\lambda^3)\}$

وان التحويل $Ø_2$ يثبت النقطة (1,0,0) أيضا ويدور باقي نقاط القوس في ثلاثة مدارات هي:

المدار الأول: $\{(1,\lambda^4,\lambda^3) , (1,\lambda^2,\lambda^5)\}$

المدار الثاني: $\{(0,0,1) , (1,\lambda^3,\lambda^4)\}$

المدار الثالث: $\{(1,1,1) , (0,1,0)\}$

المخروطي $V(X_0X_1 + \lambda^4 X_0X_2 + \lambda^6 X_1X_2)$ يحتوي على خمسة نقاط من Z_1 ونقطتين خارجيتين.

إن القوس Z_2 يمتلك الزمرة D_7 المولدة من التحويليين:

$$Ø_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$Ø_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \lambda^6 & \lambda^4 \\ \lambda^4 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ذي الرتب 2 , 7 على التوالي.

إن التحويل $Ø_1$ يثبت النقطة (1,0,0) ويُدور باقي النقاط في ثلاثة مدارات هي:

المدار الأول: $\{(1,\lambda^3,\lambda^5) , (1,\lambda^2,\lambda^6)\}$

المدار الثاني: $\{(1,1,1) , (1,\lambda^4,\lambda^3)\}$

المدار الثالث: $\{(0,1,0) , (0,0,1)\}$

وان التحويل $Ø_2$ يُدور جميع نِقاط القوس-7 بمدار واحد.

وان المخروطي $V(X_0X_1+\lambda^4X_0X_2+\lambda^6X_1X_2)$ يحتوي على النقاط السبعة للقوس Z_2.

ولإيجاد الأقواس-7 المختلفين بتأثير الاستقامة استخدمنا البرنامج الحاسوبي Collineation فحصلنا على قوسين فقط وهما نفس القوسين Z_1 , Z_2.

(3-3-4) الأقواس-8 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

بنفس الطريقة في (3-3-1) حصلنا على قوسين مختلفين إسقاطيا كما في الجدول التالي:-

جدول رقم (5). الأقواس-8 المختلفة إسقاطيا

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	G	|G|
F_1	0	1	2	55	4	8	16	32	D_4	14
F_2	0	1	2	55	4	9	10	18	PGL(2,16)	56

إن القوسين F_1 ، F_2 غير تامين ومن الجدول أعلاه حصلنا على النتيجة التالية:

نتيجة: لا يوجد قوس-8 تام في المستوي PG(2.8)

إن القوس F_1 يمتلك الزمرة D_4 المولدة من التحويليين:

$$Ø_1 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^6 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$Ø_2 : (X_0 , X_1 , X_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda^5 \\ 0 & \lambda^3 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ذو الرتب 2 , 7 على التوالي.

إن التحويل $Ø_1$ يثبت النقطة $(1,\lambda^3,\lambda^4)$, (1,0,0) ويدور باقي نقاط القوس في ثلاثة مدارات هي:

المدار الأول: $\{(0,1,0) , (0,0,1)\}$

المدار الثاني: $\{(1,1,1) , (1,\lambda^6,\lambda)\}$

المدار الثالث: $\{(1,\lambda^4,\lambda^3) , (1,\lambda^2,\lambda^5)\}$

وان التحويل $Ø_2$ يثبت النقطة (1,0,0) أيضا ويُدور باقي نقاط القوس في مدار واحد هو:-

$\{(0,1,0), (1,\lambda^3,\lambda^4) , (0,0,1) , (1,\lambda^4,\lambda^5) , (1,\lambda^6,\lambda) , (1,1,1) , (1,\lambda^2,\lambda^5)\}$

المخروطي $V(X_0X_1+\lambda^4X_0X_2+\lambda^6X_1X_2)$ يحتوي على خمسة نقاط من F_1 وثلاثة نقاط خارجية.

إن القوس F_2 متكون من زمرة PG(2,16).

وان المخروطي $V(X_0X_1+\lambda^4X_0X_2+\lambda^6X_1X_2)$ يحتوي على جميع نقاط القوس F_2.

ولإيجاد الأقواس-8 المختلفين بتأثير الاستقامة استخدمنا البرنامج الحاسوبي Collineation فحصلنا على قوسين فقط وهما نفس القوسين F_1 , F_2.

(3-3-5) الأقواس-9 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

بنفس الطريقة في (3-3-1) حصلنا على قوسين مختلفين إسقاطيا كما في الجدول التالي.

جدول رقم (6). الأقواس -9 المختلفة إسقاطيا

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	G	|G|
H_1	0	1	2	55	4	8	16	32	37	PGL(2,16)	56
H_2	0	1	2	55	4	9	10	18	34	PGO(3,16)	504

إن القوسين H_1 ، H_2 غير تامين ومن الجدول أعلاه حصلنا على النتيجة التالية :

نتيجة: لا يوجد قوس -9 تام في المستوي PG(2.8)

وان المخروطي V($x_0^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + \lambda^5 x_1x_2$) يحتوي على خمس نقاط من نقاط القوس H_1 وأربعة نقاط تقع خارجه.

والمخروطي V($x_0x_1 + \lambda^4 x_0x_2 + \lambda^6 x_1x_2$) يحتوي على جميع نقاط القوس H_2 التسعة .

ولإيجاد الأقواس -9 المختلفين بتأثير الاستقامة استخدمنا البرنامج الحاسوبي Collineation فحصلنا على قوسين فقط هما H_1 , H_2 .

(3-3-6) الأقواس-10 المختلفة إسقاطيا والمختلفة بتأثير الاستقامة

إن عدد الأقواس-9 المختلفة إسقاطيا هو قوسين فقط وهما H_1 , H_2.

نُضيف النِقاط المتبقية من حذف النِقاط التي تقع على الخطوط ذات القاطع الثنائي لـ H_1 , H_2 فِراداً إلى H_1 , H_2 فنحصل على قوسين فقط.

وباستخدام البرنامج الحاسوبي A حصلنا على قوس تام واحد كما في الجدول التالي

جدول رقم (7). الأقواس -10 المختلفة إسقاطيا

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	G	|G|
J	0	1	2	55	4	8	16	32	37	64	PGO(3,16)	504

(4) النتائج (The Results)

(4-2) الأقواس-k المختلفة إسقاطيا

الجدول رقم (3) يمثل التصنيف الكامل للأقواس المختلفة إسقاطيا (k=5,…10) إذ إن N_k يمثل عدد الأقواس المختلفة إسقاطيا. Gs يمثل زمرة القوس -k . وقد استغرق من العمل الحاسوبي للحصول على هذه النتائج (150) ساعة حاسوبية

جدول رقم (8)

k = 5 Nk = 1		k = 6 Nk = 5		k = 7 Nk = 2		k = 8 Nk = 2		k = 9 Nk = 2		k = 10 Nk = 1	
Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#
$C_2 \times C_2$	1	$C_2 \times C_2$ S_3 S_4	1 1 3	S_3 D_7	1 1	D_4 PGL (2,16)	1 1	PGL (2,16) PGO(3,16)	1 1	PGL (2,16)	1

(4-3) الأقواس -k المختلفة بتأثير الاستقامة

الجدول رقم (4) يتضمن تصنيف الأقواس-k المختلفة بتأثير الاستقامة إذ أن *Nk يمثل عدد الأقواس المختلفة بتأثير الاستقامة. Gs يمثل زمرة القوس -k

جدول رقم (9)

k = 5 Nk* = 1		k = 6 Nk* = 3		k = 7 Nk*= 2		k = 8 Nk* = 2		k = 9 Nk* = 2		k = 10 Nk* = 1	
Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#	Gs	#
$C_2 \times C_2$	1	$C_2 \times C_2$	1	S_3	1	D_4	1	PGL (2,16)	1	PGL (2,16)	1
		S_3	1	D_7	1	PGL (2,16)	1	PGO(3,16)	1		
		S_4	1								

المصادر

[1] Aziz, S.M., (2001), "On Lower Bound for Complete (k,n)-arc in PG(2,q)", M.Sc. Thesis , University of Mosul .

[2] Chao,J.M. and Kaneta. H., (2001), "Classial arcs in PG(r,q) for 23≤q≤29" Discrete Mathematics 226,p.p.377-385

[3] Coolsaet, K. and Sticker, H., "A full classification of complete k-arcs in PG(2,23) and PG(2,25)", Journal of Combinatorial Designs

[4] Coolsaet, K. and Sticker, H., (2009),"A full classification of complete k-arcs in PG(2,27)".

[5] Hasan, F. A. (2004), “On some complete arcs and Algebraic Curves,” M. SC. Thesis, University of Mosul.

[6] Hirschfeld, J.W.P., (1979), "Projective Geometrics over Finite Fields", Oxford University Press, Oxford.

[7] Hirschfeld , J. W. P. and Storme, L., (2001), "The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces : Update 2001", Submitted.

[8] Thomas, A.D. and Wood, G.V., (1980), "Group Tables", Shiva Publishing Ltd.

[9] Yasin, A.L., (1986), "Cubic arcs in the projective plane of order eight", Ph.D. Thesis, University of Sussex .

[10] Younis, H.,(1989), "Classification of k-arcs in the projectivety plane PG(2,16)", M.Sc. Thesis, University of Mosul.