# w-Hosoya polynomials for Pentagonal Chains

Ali Aziz Ali
aliazizali1933@yahoo.com
Academic
University of Mosul

Shwan Salou Abdul Ilyas
Directorate of General Education
Nineveh

**Received on: : 17/04/2011** **Accepted on: 21/06/2011**

**ABSTRACT**

Properties of the width distance in graphs are given in this paper . The w-Hosoya Polynomials of straight pentagonal chains and of alternate pentagonal chains are obtained with Wiener indices of the width distance of such graphs.

Keywords: Width distance , w-Hosoya polynomial , Pentagonal Chain.

## متعددات حدود هوسويا–w لسلاسل حلقات خماسية

**علي عزيز علي**
*أكاديمي*
*جامعة الموصل*

**شوان سلو عبدال إلياس**
*إعدادية عين سفني للبنين*
*مديرية التربية العامة / نينوى*

**تاريخ استلام البحث: 2011/04/17** **تاريخ قبول البحث: 2011/06/21**

**الملخص**

تضمن هذا البحث إعطاء العديد من خواص المسافة العرضية في البيانات، وشمل البحث على إيجاد متعددات حدود هوسويا–w لبيانات سلاسل خطية بحلقات خماسية وكذلك لسلاسل ذات حلقات خماسية متناوبة، إضافة إلى الحصول على صيغ لدليل وينر نسبة إلى المسافة العرضية لهذه البيانات.

الكلمات المفتاحية : المسافة العرضية ، متعددة حدود هوسويا–w ، السلسلة الخماسية.

### 1. المقدمة:

بخصوص ما ورد من مفاهيم في نظرية البيان نشير إلى المصادر [2, 5, 6]، وللاطلاع على المفاهيم التي تخص متعددات حدود هوسويا ودليل وينر نشير إلى المصادر [7, 8, 9]. وللتعرف على المفاهيم التي تتعلق بالمسافة العرضية ومتعددات حدود هوسويا–w وبعض النتائج التي أوجدها الباحثون في هذا المجال، نشير إلى المصادر [1, 3, 4].

ليكن u،v رأسين مختلفين في بيان متصل G، تعرف **الحاوية** C(u,v) على أنها مجموعة من الدروب u-v المنفصلة داخليا، ويعرف **عرض الحاوية** w(C(u,v)) بأنه عدد عناصرها، ويقصد **بطول الحاوية** C(u,v) بأنه الأعظم لأطول الدروب u-v في الحاوية ويرمز له $\ell(C(u,v))$ . وأخيرا، تعرف **المسافة العرضية–w** بين

رأسين u وv في البيان المتصل G، والتي يرمز لها $d_w(u,v)$ على أنها أصغر أطوال الحاويات C(u,v) بعرض w، [9] . واضح أن قيمة w يجب أن لا تزيد على عامل اتصال البيان G، [6].

الاختلاف المركزي، والقطر ونصف القطر نسبة للمسافة العرضية تعرف بأسلوب مشابه لتعاريفها نسبة للمسافة القياسية (الاعتيادية).

تعرف **متعددة حدود هوسويا–w** لبيان G عامل اتصاله $k_0$ ، حيث أن $1 \le w \le k_0$ ، بالصيغة الآتية

$$H_w(G;x) = \sum_{u,v \in V} x^{d_w(u,v)} \qquad \ldots(1.1)$$

إذ أن V هي مجموعة رؤوس G. وإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي المسافة العرضية–w بينها تساوي k، فأن

$$H_w(G;x) = \sum_{k \ge 1}^{\delta_w} C_w(G,k)\, x^k, \qquad \ldots(1.2)$$

إذ أن $\delta_w$ هو قطر G للمسافة العرضية–w. إذا كان w =1 فأن $d_w$ تصبح المسافة القياسية ، ولذلك سوف نفرض في بحثنا هذا أن $2 \le w \le k_0$ . واضح أنه يمكن أن نحصل على **دليل وينر** [7] نسبة للمسافة العرضية–w والذي يرمز له $W_w(G)$ بالصيغة الآتية:

$$W_w(G) = \frac{d}{dx} H_w(G;x)\Big|_{x=1} = \sum_{k \ge 2}^{\delta_w} k\, C_w(G,k)\,. \qquad \ldots(1.3)$$

نعرف **متعددة حدود هوسويا–w للرأس v** في G بالصيغة

$$H_w(v,G;x) = \sum_{k \ge 2} C_w(v,G,k)\, x^k, \qquad \ldots(1.4)$$

إذ أن $C_w(v,G,k)$ هو عدد الرؤوس في G التي تبعد مسافة عرضية–w قيمتها k عن الرأس v. نقول للبيان G أنه **منتظم بالنسبة للمسافة العرضية–w** [3] إذا كان لكل $2 \le k \le \delta_w$ ولكل رأس v في G يكون $C_w(v,G,k)$ عددا ثابتا، عندئذ تكون متعددة الحدود $H_w(v,G;x)$ هي نفسها لكل رأس v في G ومنها ينتج لهذا النوع من البيانات G أن:

$$H_w(G;x) = \frac{1}{2} p H_w(v,G;x)\ ,\ w \ge 2\ , \qquad \ldots(1.5)$$

إذ أن p هي رتبة البيان G.

## 2. بعض خواص المسافة العرضية–w

ليكن G بياناً عامل اتصاله $2 \le k_0(G)$ . ولنفرض أن$2 \le w \le k_0$. معروف أن المسافة الاعتيادية تحقق البديهيات المترية الأربعة [1,5,6] وبالنسبة للمسافة العرضية-w فأن:

**(1)** لكل رأسين مختلفين ولكل $2 \le w$ فأن $d_w(u,v) \ge 2$.

**(2)** $d_w(u,v) = d_w(v,u)$

**(3)** بالنسبة **لأقل مسافة عرضية-w** نعرف:

$$m_w(G) = \min_{u,v \in V(G)} d_w(u,v)\,.$$

واضح أن $m_2(G) = 2$ أذا وفقط أذا كان خصر البيان G هو 3 أو 4.

**(4)** بالنسبة للبديهية المثلثية فأنها لا تتحقق بصورة عامة نسبةً إلى المسافة العرضية-w ، $2 \le w$ [1].

**(5)** معلوم أنه بالنسبة للمسافة الاعتيادية فأن قطر البيان G يكون مساويا إلى الواحد أذا وفقط أذا كان G بياناً تاما . وبالمقارنة مع هذهِ العبارة بالنسبة للمسافة العرضية-2 فأن القطر -2 للبيان التام $K_p$ هو 2 وهو يساوي الحد الأصغر للمسافة. أي أن $diam_2\ K_p = m_2(K_p) = 2$ . ولكن نلاحظ أن العكس غير صحيح ، أي أن هنالك بيانات غير البيان التام فيها القطر يساوي المسافة العرضية الصغرى-2 ، مثل البيان $K_5 - e$.

**(6)** واضح أن لكل بيان G ولكل $2 \le w \le k_0(G)$ يكون:

أ. $\delta ( G ) \ge w$، حيث أن $\delta ( G )$ هي الدرجة الصغرى لرؤوس البيان G.

ب. يكون لمتعددة حدود هوسويا $H_w(G,x)$ جذوراً صفرية عددها بالضبط يساوي$m_w(G)$ .

**(7)** العلاقة بين$W(G)$ و $W_2(G)$ بالنسبة للدارة$C_p$ ، لكل $3 \le p$ هي:

$$W_2(C_p) + W(C_p) = \frac{1}{2} P^2 ( P-1), \qquad \ldots(2.1)$$

وذلك لأنه: إذا كان P عدداً فردياً فأن [3,7]:

$$W( C_p ) = \frac{1}{8} P (P^2-1) , W_2 (C_p) =\frac{1}{8} P(P-1) (3P-1)$$

وبالجمع نحصل على النتيجة المطلوبة.

وإذا كان P عدداً زوجياً، فأن:

$$W_2(C_p) = \frac{1}{8} P^2 (3P-4) , W(C_p) = \frac{1}{8}\ P^3$$

إذاً

$$W_2(C_p) + W(C_p) = \frac{1}{2} P^2 (P-1)$$

وبالمثل فأن لدينا العبارة الآتية لكل بيان G بعامل اتصال لا يقل عن 2 :

**عبارة 2.1** : إذا كان G بياناً برتبة p وله عامل اتصال لا يقل عن 2 فأن:

$$W_2 (G) + W(G) \le \frac{1}{2} P( P-1 ) . c( G ) ,$$

**إذْ أن** $c\ (G)$ هو محيط البيان G [5] .

**البرهان:** ليكن v,u أي رأسين مختلفين في G ولتكن $C_2(u,v)$ حاوية بطول يساوي المسافة العرضية-2 بين u وv ، أي:

$$d_2(u,v) = \ell\ (C_2 (u,v) ) .$$

لنفرض أن الحاوية $C_2(u,v)$ تتكون من الدربين $P_1$ و $P_2$ بين الرأسين u و v ، وأن طول $P_1$ لا يزيد على طول $P_2$، أي أن:

$$\ell\ (P_1) \le \ell(P_2) .$$

أذاً

$$d_2(u,v) = \ell(P_2) .$$

ولما كان $P_1 \cup P_2$ دارة في G طولها هو $\ell(P_1) + \ell(P_2)$ لا يزيد على $c(G)$ فأن:

$$d_2(u,v) \le c(G) - \ell\ (P_1) .$$

واضح أن

$$d(u,v) \le \ell\ (P_2)$$

وذالك بموجب تعريف المسافة الاعتيادية بين الرأسين. لذلك فأن:

$$d_2(u,v) \le c(G) - d(u,v),$$

أذاً

$d_2(u,v) + d(u,v) \le c(G)$ ,

لكل رأسين مختلفين u و v في G. وبأخذ المجموع لكل أزواج الرؤوس غير المرتبة في G ، نحصل على:

$$\sum_{u,v \in V(G)} d_2(u,v) + \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) \le \frac{1}{2} P(P-1).c(G),$$

أي أن:

$$W_2(G) + W(G) \le \frac{1}{2} P(P-1) . c(G). \quad \blacksquare$$

بما أن $c(G) \le P$، فأن لدينا النتيجة الآتية.

**نتيجة 2.2** : كل بيان G بعامل اتصال لا يقل عن2 وبرتبة P يكون

$$W_2(G) + W(G) \le \frac{1}{2} P^2 (P-1) . \quad \blacksquare$$

**مسألة.** لكل بيان G برتبة P وعامل اتصال لا يقل عن 2، فأن:

$$W_2(G) \le W_2(C_p) \quad [= \frac{1}{8} P^2 (3P-4)\ ] . ?$$

معروف بالنسبة للمسافة الاعتيادية أن لكل بيان G برتبة P يكون.

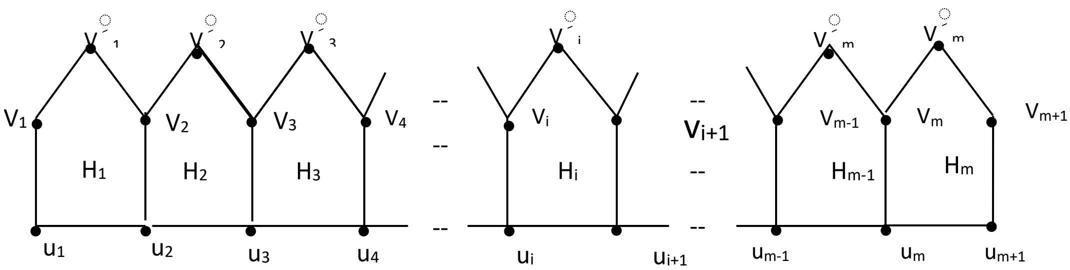
$$W(G) \le W(P_p),$$

وأن المساواة تتحقق فقط عندما يكون $G = P_p$ (الدرب برتبة P)

ولقد وضعت المسألة في أعلاه مقارنةً بذالك، ولكنها تحتاج إلى برهان، وتركت لدراسة مستقبلية.

## 3. متعددة حدود هوسويا-2 لبيان سلسلة خماسية الحلقات خطية

ليكن $G_m$ بيان سلسة خماسية الحلقات خطية مكونة من m من الحلقات كما هو موضح في الشكل 3.1.




**الشكل 3.1** بيان سلسلة خماسية الحلقات خطية $G_m$

واضح أن $P(G_m) = 3m+2$، $q(G_m) = 4m + 1$ ، وأن قطر المسافة العرضية-2 يساوي المسافة العرضية -2 بين الرأسين $u_1$ و $u_{m+1}$ وأنه يساوي $diam_2\, G_m = 2m + 2$. كما أن عامل الاتصال له هو 2 لذالك نأخذ $w = 2$ فقط. كما نلاحظ أن $m_2(G_m) = 3$ .

سنحاول أيجاد متعددة حدود هوسويا -2 للبيان $G_m$ باستعمال الاستقراء الرياضي على عدد الحلقات m .

نفرض أن متعددة حدود هوسويا -2 ، $H_2(G_{m-1}\,; x)$ معلومة ونحاول إيجاد $H_2(G_m\,;x)$ لأجل $m \ge 6$ .

بملاحظة $G_m$ و$G_{m-1}$ في الشكل 3.1 نجد أن:

$$H_2(G_m\,; x) = H_2(G_{m-1}\,; x) + H_2(C_5\,; x) + F_m(x) - x^4 , \qquad ...(3.1)$$

حيث أن الدالة

$$F_m(x) = \sum_{u,v} x^{d_2(u,v)} , \qquad ...(3.2)$$

وأن المجموع يؤخذ على كل رأسين u و v حيث أن
$v \in V(G_{m-1}) - \{v_m , u_m\}$ , $u \in A = \{v`_m , v_{m+1} , u_{m+1}\}$ .

نلاحظ أن المسافة العرضية -2 بين الرأسين u و v ، لكل $u \in A$ و v في $\{v_i , u_i , v`_i\}$ في البيان $G_m$ هي

نفسها في الدارة $C_{5+3(m-i)}$ لكل $i = 1 , 2 , 3 , \ldots , m-1$ . لذالك، نجد أولا من الشكل 3.1 أن المسافة العرضية بين الرأس $v`_m$ وكل من رؤوس المجموعة $A_i = \{u_i , v_i , v`_i\}$ هي:

$$d_2(v'_m, u_i) = 2 + 2(m-i), \quad 1 \le i \le m-1 \quad \text{لاجل}$$

$$d_2(v'_m, v_i) = \begin{cases} 1 + 2(m-i) & , \quad 1 \le i \le m-4 \text{ ,لأجل} \\ 4 + (m-i) & , \quad i = m-3, m-2, m-1 \text{ ,لأجل} \end{cases}$$

$$d_2(v'_m, v'_i) = \begin{cases} 2(m-i) & , \quad 1 \le i \le m-5 \text{ ,لأجل} \\ 5 + (m-i) & , \quad i = m-4, m-3, m-2, m-1 \text{ ,لأجل} \end{cases}$$

ثم نجد المسافة العرضية -2 بين الرأس $v_{m+1}$ وكل من رؤوس $A_i$، فنجد أن :

$d_2(v_{m+1} , u_i) = 3 + 2(m-i)$ , $1 \le i \le m-1$ لأجل

$d_2(v_{m+1}, v_i) = 2 + 2(m-i)$ , $1 \le i \le m-1$ لأجل

$$d_2(v_{m+1}, v'_i) = \begin{cases} 1 + 2(m-i) & , \quad 1 \le i \le m-3 \quad \text{, لأجل} \\ 4 + (m-i) & , \quad i = m-2, \; m-1 \quad \text{. لأجل} \end{cases}$$

وأخيراً نجد المسافة العرضية -2 بين الرأس $u_{m+1}$ وكل من رؤوس $A_i$ فنحصل على:

$d_2(u_{m+1} , u_i) = 4 + 2(m-i)$ , $1 \le i \le m-1$ لأجل

$d_2(u_{m+1} , v_i) = 3+2(m-i)$ , $1 \le i \le m-1$ لأجل

$d_2(u_{m+1} , v'_i) = 2 + 2(m-i)$ , $1 \le i \le m-1$ لأجل

وبأخذ المجموع لكل قيم $i = 1 , 2 , \ldots , m-1$ نحصل على:

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \left(3x^{2+2(m-i)} + 2x^{3+2(m-i)} + x^{4+2(m-i)}\right) + \sum_{i=1}^{m-3} x^{1+2(m-i)} + \sum_{i=1}^{m-4} x^{1+2(m-i)} + \sum_{i=1}^{m-5} x^{2(m-i)} + (x^6 + x^5) + (x^7 + x^6 + x^5) + (x^9 + x^8 + x^7 + x^6).$$

وبتوحيد المجموع من $i = 1$ إلى $i = m-5$ وعندما يكون $m \ge 6$ نحصل على:

$$F_m(x) = 3x^4 + 4x^5 + 7x^6 + 5x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 4x^{10} + 2x^{11} + x^{12} + \sum_{i=1}^{m-5} x^{2(m-i)}(3x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x + 1) , \quad m \ge 6$$

$$F_m(x) = A + (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{i=1}^{m-5} x^{2(m-i)} , \quad m \ge 6$$

حيث أن:

$$A = 3x^4 + 4x^5 + 7x^6 + 5x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 4x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

وبتكرار تطبيق العملية هذه على $G_{m-1}$، عندما يكون $m \geq 7$ ، نحصل على:

$$H_2(G_m\,;x) = H_2(G_{m-2}\,;x) + 2H_2(C_5\,;x) + F_{m-1}(x) + F_m(x) - 2x^4 \quad , \quad m \geq 7$$

وهكذا نستمر بتكرار العملية حتى نحصل على:

$$H_2(G_m\,;x) = H_2(G_5\,;x) + (m-5)H_2(C_5;x) - (m-5)x^4 + \sum_{k=6}^{m} F_k(x) \ .$$

إذْ أن

$$F_k(x) = A + (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{i=1}^{k-5} x^{2(k-i)} \ , \ \ k \geq 6$$

واضح أن

$$\sum_{k=6}^{m} F_k(x) = (m-5)A + (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} x^{2(k-i)},$$

إذا كان $m=5$ فأن هذا المجموع يكون صفراً.

مما تقدم نحصل على المبرهنة الآتية:

**مبرهنة3.1**. إذا كان $6 \leq m$ فأن:

$$H_2(G_m;x) = H_2(G_5;x) + (m-5)H_2(C_5;x) - (m-5)x^4 + (m-5)A$$
$$+ (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} x^{2(k-i)},$$

إذْ أن:

$$A = x^4(3 + 4x + 7x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 5x^5 + 4x^6 + 2x^7 + x^8) \ . \ \blacksquare$$

**ملاحظة:** بالنسبة لقيم $m = 1,2,3,4,5$ فأن لدينا متعددات الحدود $H_2(G_m\,;\,x)$ الآتية والتي تم إيجادها بصورة مباشرة:

$$H_2(G_1;x) = H_2(C_5;x) = 5x^3 + 5x^4 \, .$$
$$H_2(G_2;x) = 2x^3(5 + 6x + 2x^2 + x^3) \, .$$
$$H_2(G_3;x) = 15x^3 + 19x^4 + 8x^5 + 9x^6 + 3x^7 + x^8 \, .$$
$$H_2(G_4;x) = 20x^3 + 26x^4 + 12x^5 + 16x^6 + 8x^7 + 6x^8 + 2x^9 + x^{10} \, .$$
$$H_2(G_5;x) = 25x^3 + 33x^4 + 16x^5 + 23x^6 + 13x^7 + 11x^8 + 7x^9 + 5x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

**نتيجة 3.2**. إذا كان $6 \leq m$ فان:

$$H_2(G_m;x) = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} x^{2(k-i)} + [5mx^3 + (7m-2)x^4 + (4m-4)x^5$$
$$+ (7m-12)x^6 + (5m-12)x^7 + (5m-14)x^8 + (5m-18)x^9 + (4m-15)x^{10}$$
$$+ (2m-8)x^{11} + (m-4)x^{12}]. \ \blacksquare \qquad \ldots(3.3)$$

وبأخذ مشتقة $H_2(G_m; x)$ بالنسبة إلى $x$ثم تعويض$x = 1$ نحصل على دليل وينر بالنسبة للمسافة العرضية -2 للبيان $G_m$، وكما هو مبين في النتيجة الآتية :

**نتيجة 3.3**. إذا كان $6 \le m$ فان :

$$W_2(G_m) = 3m^3 + 9m^2 + 35m - 24 \quad .$$

**البرهان:** باشتقاق (3.3) بالنسبة إلى x نحصل على:

$$\begin{aligned}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 2)\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} x^{2(k-i)} \\ &+ (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} 2(k-i)x^{2k-2i-1} \\ &+ [15mx^2 + 4(7m-2)x^3 + 5(4m-4)x^4 + 6(7m-12)x^5 \\ &+ 7(5m-12)x^6 + 8(5m-14)x^7 + 9(5m-18)x^8 \\ &+ 10(4m-15)x^9 + 11(2m-8)x^{10} + 12(m-4)x^{11}] \quad .\end{aligned}$$

وبالتعويض عن x بواحد نحصل على دليل وينر -2 للبيان $G_m$ وكما يأتي:

$$W_2(G_m) = 18\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5}(1) + 9\sum_{k=6}^{m}\sum_{i=1}^{k-5} 2(k-i) + [299m - 744]$$

$$= 299m - 744 + 18\sum_{k=6}^{m}(k-5) + 9\sum_{k=6}^{m}\left[2\sum_{i=1}^{k-5} k - 2\sum_{i=1}^{k-5} i\right]$$

$$= 299m - 744 + 18\sum_{k=6}^{m} k - 90(m-5) + 9\sum_{k=6}^{m}\left[2k(k-5) - 2.\frac{1}{2}(k-4)(k-5)\right]$$

$$= 299m - 744 + 18.\frac{1}{2}(m+6)(m-5) - 90(m-5) + 9\sum_{k=6}^{m}(k^2 - k - 20)$$

$$= 9m^2 + 218m - 564 + 9\sum_{k=6}^{m} k^2 - 9\sum_{k=6}^{m} k - 180(m-5)$$

$$= 9m^2 + 38m + 336 - 9.\frac{1}{2}(m+6)(m-5) + 9\sum_{k=6}^{m} k^2 \quad .$$

$$= 9m^2 + 38m + 336 - \frac{9}{2}(m^2 + m - 30) + 9[\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) - 55]$$

$$= \frac{1}{6}(2m^3 + 3m^2 + m) - 55. \ \blacksquare$$

من المفيد إيجاد معدل المسافة العرضية . 2 للبيان $G_m$ .

**نتيجة 3.4** لكل $7 \le m$ فان:

$$\mu_2(G_m) \le \frac{2}{3}m + 2.02$$

**البرهان:** بما أن عدد رؤوس $G_m$ هو $3m + 2$ فانه من النتيجة 3.3 نحصل على

$$\begin{aligned}\mu_2(G_m) &= W_2(G_m) \Big/ \binom{3m+2}{2} \\ &= 2\,(3m^3 + 9m^2 + 35m - 24) / (3m+2)(3m+1)\end{aligned}$$

$$= \frac{6m^3 + 18m^2 + 70m - 48}{9m^2 + 9m + 2}$$

وبالقسمة، نحصل على

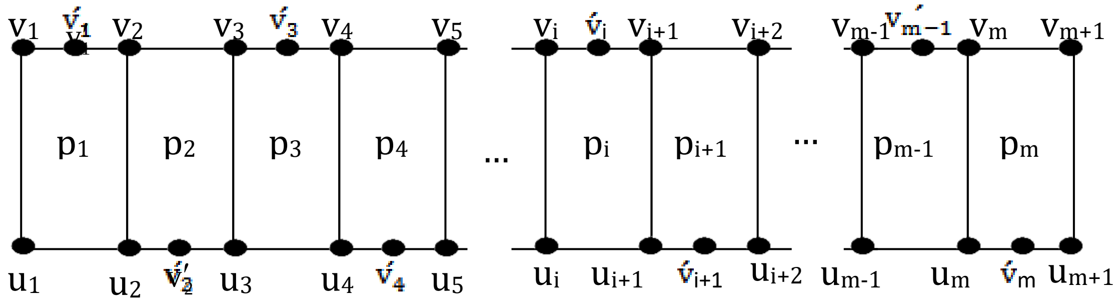
$$\mu_2(G_m) = \frac{2}{3}m + \frac{4}{3} + \frac{69}{100} - c\,, \qquad 7 \le m \quad \text{لاجل}$$

إذ أن c كمية موجبة، لذلك فان:

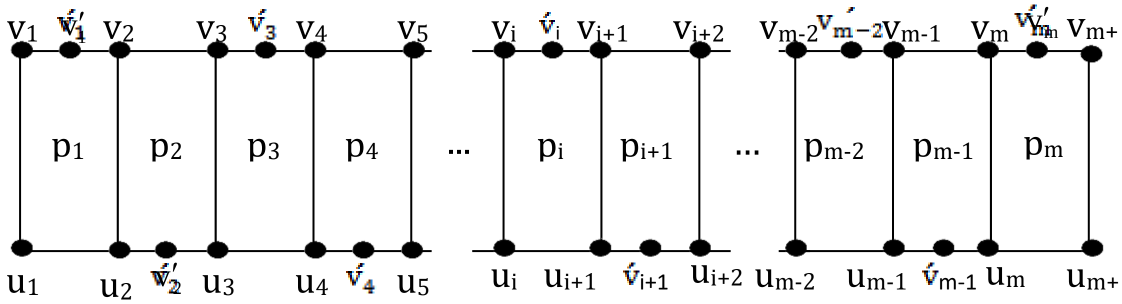
$\mu_2(G_m) \le \frac{2}{3}\, m + 2.02$ . ■

## 4. متعددات حدود هوسويا . 2 لسلسلة خماسية الحلقات متناوبة خطية:

ليكن $G_m^*$ البيان المتكون من m من الحلقات الخماسية والتي تشكل سلسلة خطية فيها الحلقات متناوبة بالنسبة للرأس الثنائي الدرجة كما هو مبين في الشكلين 4.1 ، 4.2 .




**الشكل 4.1** بيان سلسلة خماسية الحلقات متناوبة خطية $G_m^*$ حيث أن m زوجي




**الشكل 4.2** بيان سلسلة خماسية الحلقات متناوبة خطية $G_m^*$ حيث أن m فردي

واضح أن $p\,(G_m^*) = 3m + 2$، وان $q\,(G_m^*) = 4m + 1$ ، وان

$$\operatorname{diam} G_m^* = \begin{cases} (3m+2)/2\,, & \text{اذا كان m عددا زوجيا} \\ (3m+1)/2\,, & \text{اذا كان m عددا فرديا} \end{cases}$$

واضح أن $G_m^*$ له عامل اتصال 2 ولذلك نأخذ w = 2 كما انه $m_2(G_m^*) = 3$ . وفي العبارة الآتية نحدد القطر بالنسبة للمسافة العرضية . 2 .

**العبارة 4.1.** لكل $G_m^*$ فان القطر بالنسبة للمسافة العرضية . 2هو

$$\operatorname{diam}_2 G_m^* = \begin{cases} 3(m+2)/2 & \text{اذا كان m عددا زوجيا} \\ (3m+7)/2\,, & 3 \le m \ \text{اذا كان m عددا فرديا} \end{cases}$$

**البرهان:** إذا كان m عدداً زوجيا فإننا نلاحظ من الشكل 4.1 أن اكبر مسافة عرضية . 2 في $G_m^*$ هي التي تكون بين الرأسين $\acute{v}_1$ و $v_{m+1}$ لأن الدربين المنفصلين بينهما يشكلان اكبر دارة في $G_m^*$، ولما كانت

$$d_2(\acute{v}_1, v_{m+1}) = 3 + m + \frac{m}{2} = 3(m+2)/2.$$

لذلك فانه عندما يكون m زوجيا فان

$$\mathrm{diam}_2\, G_m^* = \frac{3}{2}\,(m+2)$$

وإذا كان m عددا فرديا، $3 \le m$ ، فأننا نلاحظ من الشكل 4.2 أن اكبر مسافة عرضية . 2 في $G_m^*$ تكون بين الرأسين $\acute{v}_1$ و $\acute{v}_m$ لان الدربين المنفصلين بينهما في الحاوية ذات الطول $d_2(v'_m, v'_1)$ يكونان الدارة التي تضم جميع رؤوس البيان $G_m^*$ ولما كانت:

$$d_2(\acute{v}_1, \acute{v}_m) = 4 + m + \frac{m-1}{2} = (3m+7)/2,$$

لذلك فانه عندما يكون m فرديا فان:

$$\mathrm{diam}_2\, G_m^* = (3m+7)/2.$$

وبهذا يتم البرهان. ■

لأجل إيجاد صيغة لمتعددة حدود هوسايا . 2 للبيان $G_m^*$ سوف نحتاج إلى المأخوذة الآتية.

**مأخوذة 4.2** (أ) إذا كان k عددا صحيحا موجبا **زوجيا** و $3 \le k$ فان في $G_k^*$ يكون:

$$F_k(x) = \sum_{u\in A, v\in A_k} x^{d_2(u,v)} = x^{\frac{3}{2}k+1}(2x^2+4x+3). \qquad \ldots(4.1)$$

حيث أن $A = \{v_1, u_1, \acute{v}_1\}$ و $A_k = \{v_{k+1}, u_{k+1}, \acute{v}_k\}$، وان المسافة العرضية . 2 محسوبة في $G_k^*$.

(ب) إذا كان k عددا موجبا فرديا و $3 \le k$، فان

$$F_k(x) = x^{3(k+1)/2}(x^2+3x+5). \qquad \ldots(4.2)$$

**البرهان:** (أ) في $G_k^*$ نحسب المسافة العرضية . 2 بين كل رأس في A وكل رأس في $A_k$ وهذه مبينة في الجدول الأتي وذلك بالرجوع إلى الشكل 4.1 اخذين k بدلا من m.

| (u , v) | d2 (u , v) | | (u , v) | d2 (u , v) | | (u , v) | d2 (u, v) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(v_1, v_{k+1})$ | $2+\frac{3}{2}k$ | | $(u_1, v_{k+1})$ | $1+\frac{3}{2}k$ | | $(\acute{v}_1, v_{k+1})$ | $3+\frac{3}{2}k$ |
| $(v_1, u_{k+1})$ | $1+\frac{3}{2}k$ | | $(u_1, u_{k+1})$ | $2+\frac{3}{2}k$ | | $(\acute{v}_1, u_{k+1})$ | $2+\frac{3}{2}k$ |
| $(v_1, \acute{v}_k)$ | $2+\frac{3}{2}k$ | | $(u_1, \acute{v}_k)$ | $3+\frac{3}{2}k$ | | $(\acute{v}_1, \acute{v}_k)$ | $1+\frac{3}{2}k$ |

من هذا الجدول نحصل على $F_k(x)$ كما هي معطاة في (4.1) .

(ب) كما في (أ) وبالرجوع إلى الشكل 4.2 اخذين k بدلا من m وهي عدد فردي نحصل على الجدول الآتي:

| (u , v) | d2 (u , v) | | (u , v) | d2 (u , v) | | (u , v) | d2 (u, v) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(v_1, v_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}$ | | $(u_1, v_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}$ | | $(\acute{v}_1, v_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{5}{2}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(v_1,u_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}$ | | $(u_1\ ,u_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{5}{2}$ | | $(v'_1\ ,u_{k+1})$ | $\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}$ |
| $(v_1,v'_k)$ | $\frac{3k}{2}+\frac{5}{2}$ | | $(u_1\ ,v'_k)$ | $\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}$ | | $(v'_1\ ,v'_k)$ | $\frac{3k}{2}+\frac{7}{2}$ |

من هذا الجدول نحصل على $F_k(x)$ كما هي معطاة في (4.2) وبهذا يتم البرهان. ■

**المبرهنة 4.3** لكل $m \le 3$ فان متعددة حدود هوسايا $-2$ هي:

$$H_2(G^*_m;x)=(m-1)(2x^6+4x^5+7x^4+5x^3)+5x^4+5x^3+\sum_{j=2}^{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}[(m+1-2j)(2x^3+4x^2+3x)$$
$$+(m+2-2j)(x^2+3x+5)]x^{3j}\ . \qquad \ldots(4.3)$$

**البرهان:** أولا نجد علاقة تكرارية لـ $H_2(G^*_m\ ;x)$ ثم نحلها.

من الشكل 4.1 (أو 4.2) نلاحظ أن البيانات $G^*_{m-1}$ و $G^*_m-\{v'_1,v_1,u_1\}$ و $G^*_m-\{v'_m,v_{m+1},u_{m+1}\}$ متشاكلة وان كلا منها يحتوي على $G^*_{m-2}$، وعليه فأن:

$$H_2(G^*_m;x)=2H_2(G^*_{m-1};x)-H_2(G^*_{m-2})+F_m(x)$$

حيث أن $F_m(x)$ معطاة في المأخوذة 4.2 وحسب كون m زوجي أو فردي.

ولما كان:

$$H_2(G^*_{m-1};x)=2H_2(G^*_{m-2};x)-H_2(G^*_{m-3};x)+F_{m-1}(x),$$

فان

$$H_2(G^*_m;x)=3H_2(G^*_{m-2};x)-2H_2(G^*_{m-3};x)+2F_{m-1}(x)+F_m(x)$$
$$=3[2H_2(G^*_{m-3};x)-H_2(G^*_{m-4};x)+F_{m-2}(x)]-2H_2(G^*_{m-3};x)+2F_{m-1}(x)+F_m(x)$$
$$=4H_2(G^*_{m-3};x)-3H_2(G^*_{m-4};x)+3F_{m-2}(x)+2F_{m-1}(x)+F_m(x).$$

وهكذا بعد j من الخطوات نتوصل إلى:

$$H_2(G^*_m;x)=(j+1)H_2(G^*_{m-j};x)-jH_2(G^*_{m-j-1};x)+\sum_{i=0}^{j-1}(i+1)F_{m-i}(x)$$

وأخيرا بعد $m-2$ من الخطوات، أي نعوض $j=m-2$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$H_2(G^*_m;x)=(m-1)H_2(G^*_2;x)-(m-2)H_2(G^*_1;x)+\sum_{i=0}^{m-3}[(i+1)F_{m-i}(x)\ . \qquad \ldots(4.4)$$

يمكن بسهولة حساب أول حدين في (4.4) فنحصل على:

$$H_2(G^*_2;x)=2x^6+4x^5+12x^4+10x^3.$$
$$H_2(G^*_1;x)=H_2(C_5;x)=5x^4+5x^3.$$

كما يمكن أن نبسط المجموع بتعويض $k=m-i$ فنحصل على:

$$\sum_{i=0}^{m-3}(i+1)F_{m-i}(x)=\sum_{k=m}^{3}(m+1-k)F_k(x)=\sum_{k=3}^{m}(m+1-k)F_k(x)\ . \qquad \ldots(4.5)$$

وواضح أن:

$$k=3\ ,4\ ,5\ ,6\ ,\ldots,m-2\ ,m-1\ ,m.$$

وبتجزئة قيم k إلى **زوجية وفردية** نحصل على

$$k=\begin{cases}4,6,8,\ \dots\ ,m-2,m\\ 3,5,7,\ \dots\ ,m-1\end{cases}$$

عندما يكون m عددا زوجيا، أما عندما يكون m **عددا فرديا** فأن التجزئة لقيم k تكون كالأتي:

$$k=\begin{cases}4\,.6\,,8,\dots,m-1\\ \\ 3\,,5\,,7\,,\dots,m\end{cases}$$

وهكذا عندما يكون m زوجيا نحصل من المأخوذة 4.2 على:

$$\sum_{k=3}^{m}(m+1-k)F_k(x)=\sum_{j=2}^{\frac{m}{2}}(m+1-2j)(2x^3+4x^2+3)x^{3j+1}$$
$$+\sum_{j=2}^{\frac{m}{2}}(m+2-2j)(x^2+3x+5)x^{3j}. \qquad \dots(4.6)$$

وهذه هي كما في الصيغة (4.3) عندما يكون m عدد زوجيا.

وعندما يكون m عددا فرديا نستخدم المأخوذة 4.2 فنحصل على:

$$\sum_{k=3}^{m}(m+1-k)F_k(x)=\sum_{j=2}^{\frac{m-1}{2}}(m+1-2j)(2x^3+4x^2+3)x^{3j+1}$$
$$+\sum_{j=2}^{\frac{m+1}{2}}(m+2-2j)(x^2+3x+5)x^{3j}. \qquad \dots(4.7)$$

لاحظ انه عندما نعوض $j=\frac{m+1}{2}$ في المجموع الأول يكون العامل داخل القوس، أي $m+1-2j$ صفراً، ولذلك يمكننا جعل الحد الأعلى للمجموع الأول $\frac{m+1}{2}$ لغرض التوحيد. وبذلك نحصل على المجموع نفسه كما في الصيغة (4.3) عندما يكون m عددا فرديا. وبالرجوع إلى (4.4) واستخدام (4.5) نفسها. وبهذا يتم البرهان.

النتيجة الآتية [redacted] دليل وينر . 2 للبيان $G_m^*$:

**نتيجة** 4.4 : دليل وينر للبيان $G_m^*$ ، حيث ان $3\le m$ هو

$$W_2\left(G_m^*\right)=\begin{cases}\frac{m}{8}(18m^2+125m+102)+4\ , & \text{عندما يكون } m \text{ عدداً زوجياً}\\ \\ \frac{1}{8}(18m^3+125m^2+102m+35)\ , & \text{عندما يكون } m \text{ عدداً فردياً}\end{cases}$$

**البرهان** : باستخدام المبرهنة 4.3 واشتقاق متعددة الحدود $H_2\left(G_m^*;x\right)$ بالنسبة إلى x ثم تعويض x=1 نحصل على:

$$W_2\left(G_m^*\right)=(m-1)(75)+35$$
$$+\sum_{j=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\{[(m+1-2j)(17)+(m+2-2j)(5)]$$
$$+3j[(m+1-2j)(9)+(m+2-2j)(9)]\}$$

$$= 75m - 40 + \sum_{j=2}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \{22m + 27 - 44j + 3j(18m + 27 - 36j)\}$$

$$= 75m - 40 + \sum_{j=2}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \{22m + 27 + (54m + 37)j - 108j^2\}$$

**(1) إذا كان m عدداً زوجياً فان :**

$$W_2(G_m^*) = 75m - 40 + \left(\frac{m}{2} - 1\right)(22m + 27) + (54m + 37)\sum_{j=2}^{\frac{m}{2}} j - 108\sum_{j=2}^{\frac{m}{2}} j^2$$

$$= \frac{1}{8}(18m^3 + 125m^2 + 102m + 32) = \frac{m}{8}(18m^2 + 125m + 102) + 4.$$

**(2) إذا كان m عدداً فردياً فان:**

$$W_2\left(G_m^*\right) = 57m - 40 + \left(\frac{m-1}{2}\right)(22m + 27) - (54m + 37) + 108$$

$$+ (54m + 37)\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} j - 108\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} j^2$$

$$= 11m^2 + \frac{47}{2}m + \frac{35}{2} + \frac{1}{8}(m^2 + 4m + 3)(18m - 35)$$

$$= \frac{1}{8}(18m^3 + 125m^2 + 102m + 35). \quad \blacksquare$$

## المصادر

[1] الياس، شوان سلو عبدال (2010)، "**حول متعددات هوسويا للمسافة العرضية في البيانات** "، رسالة ماجستير (غير منشورة) الجامعة الحرة – فرع نينوى.

[2] علي، علي عزيز (1983)، **مقدمة في نظرية البيان،** ط 1، الموصل: مؤسسة دار الكتب بجامعة الموصل.

[3] علي، علي عزيز وعزيز، أسماء صلاح (2007)، " متعددات حدود وينر-W للمسافة العرضية لبعض البيانات الخاصة"، مجلة الرافدين لعلوم الحاسبات والرياضيات، 4 (2)، 103 – 124.

[4] عزيز، أسماء صلاح (2007)، " **المسافة العرضية ومتعددات حدود وينر-w للبيان**"، رسالة ماجستير، (غير منشورة)، جامعة الموصل.

[5] Buckley, F. and Harary, F. (1990), **Distance in Graphs,** 1 st ed., New York, Addison- Wesley .

[6] Chartrand, G. and Lesniak, L. (1986), **Graphs and Digraphs,** 1 st ed., California, Wadsworth Inc.

[7] Gutman, I.(1993), "Some properties of the Wiener Polynomials", Graph Theory Notes of New York, XXV, 13-18 .

[8] Hosoya, H.(1988), "On some counting polynomials in Chemistry", Discrete Applied Math., 19, 239-257.

[9] Sagan, B.E., Yeh, Y.N., and Zhang, P. (1996), "The Wiener polynomial of a graph", Intr. J. Quantum. Chem., 60( 5), 959-969 .