Numerical solution and stability analysis of the Sine-Gordon system in two dimensions

Saad A. Manna
College of Science
Zakho University

Haneen T. Jassim
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul

Received on:27/01/2009 **Accepted on:17/05/2009**

ABSTRACT

This paper deals with the numerical solution for Sine-Gordon system in two dimensions using two finite difference methods the (ADE) and (ADI) methods .A comparison between the two methods has been done and we have obtained that the (ADE) method is the easer while the (ADI) method is more accurate than the (ADE) method. We also studied the stability analysis for each method by using Fourier (Von Neumann) method and we have obtained that the (ADI) method is unconditionally stable while the (ADE) method is stable under the condition $r^2 \le \frac{1}{2c^2}$ and $r^2 \le \frac{1}{2}$ where c^2 is the ratio of the waves speed u , w and $r^2 = (\Delta t)^2/(\Delta x)^2$.

Keywords: finite difference methods, Sine-Gordon System.

الحل العددي وتحليل الاستقرارية لنظام Sine-Gordon في بعدين

سعد عبد الله مناع
كلية العلوم
جامعة زاخو

حنين طلال جاسم
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2009/01/27 **تاريخ قبول البحث: 2009/05/17**

الملخص

يتناول هذا البحث الحل العددي لنظام Sine-Gordon في بعدين باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية هما طريقة الـ (ADE) وطريقة الـ (ADI) وقد تم عمل مقارنة بين نتائج كلتا الطريقتين وقد تبين أن طريقة الـ ADE هي الأسهل في حين أن طريقة الـ ADI هي الأدق. كما تم دراسة تحليل الاستقرارية لكلتا الطريقتين باستخدام طريقة Fourier (Von Neumann) وتبين أن طريقة الـ ADI مستقرة بدون شرط في حين أن طريقة الـ ADE فتكون مستقرة تحت الشرط $r^2 \le \frac{1}{2}$ و $r^2 \le \frac{1}{2c^2}$ حيث أن c^2 هي نسبة سرعة الموجتين u وw و $r^2 = (\Delta t)^2/(\Delta x)^2$.

الكلمات المفتاحية: طرائق الفروقات المنتهية , نظام Sine-Gordon .

1. المقدمة:

إن العديد من النماذج الرياضية ومنها المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن أن تستخدم لوصف بعض الأنظمة في الفيزياء و الكيمياء و علوم الحياة وجريان الموائع والأنظمة الكهربائية.و أن طريقة الفروقات المنتهية (Finite Differences Method) هي الأكثر استخداما وشيوعا وبشكل تفصيلي لحل صيغ مختلفة لهذه المعادلات وذلك باللجوء إلى تحويل كل معادلة تفاضلية إلى معادلة جبرية قابلة للتطبيق على جزء محدد من المجال المتضمن حل المعادلة التفاضلية. [1]

الحل العددي للمعادلة التفاضلية الجزئية هو إيجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالتعويض عن المعادلة التفاضلية بمعادلة تقريبية ثم حلها، إذ أن طريقة تقريب الفروقات المنتهية تعوض عن المشتقات الجزئية بالفروقات المنتهية وعليه يقرب حل المعادلة التفاضلية الجزئية بحل معادلة الفروقات المنتهية. [2]

وضعت المعادلة Klein-Gordon من قبل العالمين Klein and Gordon في العشرينيات بوصفها نموذجا لمعادلة الموجة اللاخطية، وأول من أطلق اسم Sine-Gordon عليها العالم Kruskal، إذ أن $u(x,t)$ تمثل إزاحة الذرات باتجاه المحور x وأنّ دالة ألـ Sine تمثل دورة الشبكة البلورية. [1]

ودرس كل من Ablowitz, Herbst and Schober عام (1996) السلوك العددي للتقطيع القابل للتكامل التام و المضاعف لمعادلة Sine-Gordon ، إذ بينوا انه يسمح لقيم ابتدائية معينة بعدم الاستقرار على شكل تذبذبات في قياس الشبكة ولقد أوضحوا كذلك طبيعة عدم الاستقرارية من خلال البحث التحليلي المدعوم بالتجارب العددية ، إذ استخدموا تحليل الإزعاج (Perturbation Analysis) للمسألة الطيفية الخطية المرافقة. [4] قام (Xiaown Lu and Rudolf Schmid) عام (1998) بدراسة نظام معادلات Sine-Gordon إذ استخدم طريقة Symplectic Integration لحساب توليد الموجات المنفردة في منظومة Sine-Gordon وتبين أن هذه الخوارزميات تعالج البناء العام والاستقرار التبولوجي للموجات المنفردة بشكل جيد. [9] كما درس Jesus Adrian and Espinola Rocha عام (2000) تحويل منظومة Klein-Gordon من منظومة معادلات تفاضلية جزئية إلى نظام ديناميكي وتم الحصول على بعض الحلول الممكنة، منها ما يتعلق بحلول heteroclinic وHomoclinic [7]. في هذا البحث سوف نقوم بتطبيق طريقة تقريبات الفروقات المنتهية لنظام Sine-Gordon في بعدين باستخدام طريقتين من الطرائق العددية هما طريقة Alternating Direction Explicit Method (ADE) و Alternating Direction Implicit Method (ADI) كما سنقوم بدراسة استقرارية الحل العددي لكل من الطريقتين والمقارنة بينهما.

2. النموذج الرياضي:

إن نظام Sine-Gordon في بعدين يكون بالشكل الآتي [8] :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\delta^2\sin(u-w) \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sin(u-w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

على المنطقة المستطيلة $0 \le x \le 2\pi$ ، $0 \le y \le 2\pi$. إذ أن u تعرف عند الشروط الابتدائية:

$$u(x,y,0)=f(x,y),\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \quad ,0\le x,y\le 2\pi$$

و w تعرف بالشرط الابتدائي:

$$w(x,y,0)=g(x,y),\ \frac{\partial w(x,y,o)}{\partial t}=0,\ \ 0\le x,y\le 2\pi$$

والشرط الحدودي: $u=0$ ، $w=0$ عندما $t\ge 0$.

3. اشتقاق صيغة طريقة الـ Alternating Direction Explicit (ADE) لنظام Sine-Gordon:

تعرف الإحداثيات (x,y,t) على نقاط الشبكة بالشكل الآتي:

$$x=nh,\ \ y=mk\ ,\ \ t=pz\ ,\ \ n,m=1,2,.....,M\ ,\ \ p=1,2,.....,N$$

إذ أن N,M هي أعداد صحيحة و $z=\Delta t$, $k=\Delta y$, $h=\Delta x$. [5]

وعليه فإنّ نقاط w,u على الشبكة تكون بالشكل الآتي:

$$u(nh,mk,pz)=u_{n,m,p}$$
$$w(nh,mk,pz)=w_{n,m,p}$$

إن التقريب العددي للمشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة (u) بالنسبة إلى (x) و(t) والتي حصلنا عليها باستخدام مفكوك تايلر هي كما يلي [3]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{n,m}=\frac{u_{n+1,m}-u_{n,m}}{h} \qquad \ldots(2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{n,m}=\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{k} \qquad \ldots(3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{n,m}=\frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{h^2} \qquad \ldots(4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{n,m}=\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2} \qquad \ldots(5)$$

وباستخدام المعادلتين (4) و(5) بالنسبة للمتغيرين u و w فإن النظام (1) يصبح:

$$\frac{u_{n,m,p+1}-2u_{n,m,p}+u_{n,m,p-1}}{z^2}=-\delta^2\sin(u_{n,m,p}-w_{n,m,p})+\frac{u_{n+1,m,p}-2u_{n,m,p}+u_{n-1,m,p}}{h^2}+\frac{u_{n,m+1,p}-2u_{n,m,p}+u_{n,m-1,p}}{k^2}$$

$$\frac{w_{n,m,p+1}-2w_{n,m,p}+w_{n,m,p-1}}{z^2}=\sin(u_{n,m,p}-w_{n,m,p})+c^2\frac{w_{n+1,m,p}-2w_{n,m,p}+w_{n-1,m,p}}{h^2}+c^2\frac{w_{n,m+1,p}-2w_{n,m,p}+w_{n,m-1,p}}{k^2}$$

لتكن $r={z}/{h}$ و $k=h$.

$$u_{n,m,p+1}=-z^2\delta^2\sin(u_{n,m,p}-w_{n,m,p})-u_{n,m,p-1}+(2-4r^2)u_{n,m,p}$$

$$+r^2\left(u_{n+1,m,p}+u_{n-1,m,p}+u_{n,m+1,p}+u_{n,m-1,p}\right) \qquad \ldots(6)$$

$$w_{n,m,p+1}=z^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)-w_{n,m,p-1}+\left(2-4c^2r^2\right)w_{n,m,p}$$
$$+c^2r^2\left(w_{n+1,m,p}+w_{n-1,m,p}+w_{n,m+1,p}+w_{n,m-1,p}\right) \qquad \ldots(7)$$

إن المعادلتين (6) و(7) هما صيغة طريقة الـ ADE لنظام Sine-Gordon نلاحظ أنهما تحتاجان إلى توفر ست نقاط في المستوي $p-1, p$.

لأجل حساب القيم يجب أن نجد قيم النقاط في المستوي الثاني،نعوض عن $p=1$ في المعادلتين (6) و(7) فنحصل على:

$$u_{n,m,2}=-z^2\delta^2\sin\left(u_{n,m,1}-w_{n,m,1}\right)-u_{n,m,0}+\left(2-4r^2\right)u_{n,m,1}$$
$$+r^2\left(u_{n+1,m,1}+u_{n-1,m,1}+u_{n,m+1,1}+u_{n,m-1,1}\right) \qquad \ldots(8)$$

$$w_{n,m,2}=z^2\sin\left(u_{n,m,1}-w_{n,m,1}\right)-w_{n,m,0}+\left(2-4c^2r^2\right)w_{n,m,1}$$

$$+c^2r^2\left(w_{n+1,m,1}+w_{n-1,m,1}+w_{n,m+1,1}+w_{n,m-1,1}\right) \qquad ...(9)$$

وباستخدام الفروقات المركزية في تطبيق الشروط الابتدائية نحصل على:

$$\frac{u_{n,m,2}-u_{n,m,o}}{2k}=0 \quad \Rightarrow \quad u_{n,m,2}=u_{n,m,0} \qquad \ldots(10)$$

$$\frac{w_{n,m,2}-w_{n,m,o}}{2k}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{n,m,2}=w_{n,m,0} \qquad \ldots(11)$$

وبتعويض المعادلتين (10) و(11) في المعادلتين (8) و(9) وبالترتيب ينتج:

$$u_{n,m,2}=\frac{1}{2}\left[-z^2\delta^2\sin\left(u_{n,m,1}-w_{n,m,1}\right)+\left(2-4r^2\right)u_{n,m,1}\right.$$
$$\left.+r^2\left(u_{n+1,m,1}+u_{n-1,m,1}+u_{n,m+1,1}+u_{n,m-1,1}\right)\right] \qquad \ldots(12)$$

$$w_{n,m,2}=\frac{1}{2}\left[z^2\sin\left(u_{n,m,1}-w_{n,m,1}\right)+\left(2-4c^2r^2\right)w_{n,m,1}\right.$$
$$\left.+c^2r^2\left(w_{n+1,m,1}+w_{n-1,m,1}+w_{n,m+1,1}+w_{n,m-1,1}\right)\right] \qquad \ldots(13)$$

4. اشتقاق صيغة طريقة Alternating Direction Implicit (ADI) لنظام Sine-Gordon:

هذه الطريقة تم تطويرها من قبل العالمين (Peaceman) و(Rachford) عام 1955 [10]، وهي تتطلب خزنا قليلاً في الحاسبة كما أنها طريقة دقيقة. تشمل الطريقة تعاقب خطوتين مختلفتين من تقريبات الفروقات المنتهية في بعدين.

في تقريب طريقة الـ ADI معادلة الفروقات المنتهية تكتب بصيغة كميات في مستويين من مستويات x وبشكل عام فإنّ تقريبين من تقريبات الفروقات المنتهية استخدمت بالتعاقب، احدها لحساب التقدم من المستوي $p-1$ إلى المستوي $p+1$ والثاني لحساب التقدم من المستوي p إلى المستوي $p+2$. في هذه الطريقة كل من الخطوتين تشمل الحركة في كل من الاتجاهين x و y ، ففي الخطوة الأولى الحركة في الاتجاه x تصاغ ضمنياً في حين الحركة في الاتجاه y تصاغ بشكل صريح، أما في الخطوة الثانية فإنّ الحركة بالاتجاه x تصاغ بشكل صريح والحركة بالاتجاه y تصاغ ضمنياً. ([5]، [6]، [11])

في الخطوة الأولى يمكن تمثيل الحركة من المستوي $p-1$ إلى المستوي $p+1$ باستبدال $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ بتقريب الفروقات المنتهية الضمنية عند المستوي $p+1$ واستبدال $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ بتقريب الفروقات المنتهية الصريحة عند المستوي $p-1$ وكما يأتي:-

$$\frac{u_{n,m,p+1}-2u_{n,m,p}+u_{n,m,p-1}}{z^2}=-\delta^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)+\frac{u_{n+1,m,p+1}-2u_{n,m,p+1}+u_{n-1,m,p+1}}{h^2}+\frac{u_{n,m+1,p-1}-2u_{n,m,p-1}+u_{n,m-1,p-1}}{k^2}$$

$$\frac{w_{n,m,p+1}-2w_{n,m,p}+w_{n,m,p-1}}{z^2}=\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)+c^2\left(\frac{w_{n+1,m,p+1}-2w_{n,m,p+1}+w_{n-1,m,p+1}}{h^2}\right)+c^2\left(\frac{w_{n,m+1,p-1}-2w_{n,m,p-1}+w_{n,m-1,p-1}}{k^2}\right)$$

$$\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p+1}-r^2\left(u_{n+1,m,p+1}+u_{n-1,m,p+1}\right)=-z^2\delta^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)-\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p-1}+r^2\left(u_{n,m+1,p-1}+u_{n,m-1,p-1}\right)+2u_{n,m,p} \qquad \ldots(14)$$

$$\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p+1}-c^2r^2\left(w_{n+1,m,p+1}+w_{n-1,m,p+1}\right)=z^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)-\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p-1}+c^2r^2\left(w_{n,m+1,p-1}+w_{n,m-1,p-1}\right)+2w_{n,m,p} \qquad \ldots(15)$$

المعادلات(14) و(15) تمثل صيغة ألـ (ADI) لنظام Sine-Gordon، أما بالنسبة للنقاط في المستوي $p+1$ فلدينا ثلاث نقاط مجهولة في حين أن لدينا أربع نقاط معلومة في المستوي $p-1$ والمستوي p .

وللبدء في إيجاد الحسابات نحتاج إلى إيجاد الحسابات في المستوي الثاني وسوف نستخدم تقريب الفروقات الأمامية للشرط الابتدائي $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ و $\frac{\partial w}{\partial t}=0$ لإيجاد المستوي الثاني

$$\frac{u_{n,m,2}-u_{n,m,1}}{z}=0\ u_{n,m,2}=u_{n,m,1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{w_{n,m,2}-w_{n,m,1}}{z}=0 \quad \Rightarrow w_{n,m,2}=w_{n,m,1}$$

المعادلات (14) و(15) تكوّن نظام جبري ثلاثي الأقطار

AX=B
VX=C

الشروط الحدودية في المعادلة الأولى والأخيرة وكما يأتي:-

$$u_{1,m,p+1}=0 \quad و \quad u_{M,m,p+1}=0$$

$$w_{1,m,p+1}=0 \quad و \quad w_{M,m,p+1}=0$$

أما في الخطوة الثانية فتمثل الحركة من المستوي p إلى المستوي $p+2$ باستبدال $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ بتقريب الفروقات المنتهية الصريحة عند المستوي p واستبدال $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ بتقريب الفروقات المنتهية الضمنية عند المستوي $p+2$ وكما يأتي :-

$$\frac{u_{n,m,p+2}-2u_{n,m,p+1}+u_{n,m,p}}{z^2}=-\delta^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)+\frac{u_{n+1,m,p}-2u_{n,m,p}+u_{n-1,m,p}}{h^2}+\frac{u_{n,m+1,p+2}-2u_{n,m,p+2}+u_{n,m-1,p+2}}{k^2}$$

$$\frac{w_{n,m,p+2}-2w_{n,m,p+1}+w_{n,m,p}}{z^2}=\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)+c^2\left(\frac{w_{n+1,m,p}-2w_{n,m,p}+w_{n-1,m,p}}{h^2}\right)+c^2\left(\frac{w_{n,m+1,p+2}-2w_{n,m,p+2}+w_{n,m-1,p+2}}{k^2}\right)$$

$$\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p+2}-r^2\left(u_{n,m+1,p+2}+u_{n,m-1,p+2}\right)=-z^2\delta^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)-\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p}+r^2\left(u_{n+1,m,p}+u_{n-1,m,p}\right)+2u_{n,m,p+1}\quad\ldots(16)$$

$$\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p+2}-c^2r^2\left(w_{n,m+1,p+2}+w_{n,m-1,p+2}\right)=z^2\sin\left(u_{n,m,p}-w_{n,m,p}\right)-\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p}+c^2r^2\left(w_{n+1,m,p}+w_{n-1,m,p}\right)+2w_{n,m,p+1}\quad\ldots(17)$$

المعادلات (16) و(17) تمثل صيغة ألـ (ADI) لنظام Sine-Gordon ،أما بالنسبة للنقاط في المستوي $p+2$ فلدينا ثلاث نقاط غير معروفة في المستوي $p+2$ وأربع نقاط معلومة في المستويين $p+1$ و p .

المعادلات (16) و(17) تكوّن كذلك نظام جبري ثلاثي الأقطار

AX=B
VX=C

الشروط الحدودية تستخدم في المعادلة الأولى والأخيرة فحسب وكما يأتي:-

$u_{n,1,p+2}=0$ و $u_{n,M,p+2}=0$

$w_{n,1,p+2}=0$ و $w_{n,M,p+2}=0$

5. تحليل الاستقرارية لطريقة الـ (ADE) لنظام Sine-Gordon باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann)

إن المبدأ العام لهذه الطريقة هو استبدال الحل بطريقة الفروقات المنتهية عند الزمن (t) بالمقدار $\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$, $\gamma^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ حيث أن $i=\sqrt{-1}$

$$x=nh\,,\ y=mk\,,\ t=pz\,,h=\Delta x\,,\ k=\Delta y\,,\ z=\Delta t\,,\ \alpha>0,\beta>0\,,\ \sigma>0$$

$$u_{n,m,p}=e^{\sigma pz}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}=\left(e^{\sigma z}\right)^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}=\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$$

([11] ،[6])

لتطبيق طريقة Von-Neumann على النظام (1) نقوم بإهمال الحد اللاخطي منه وباستخدام طريقة الـ ADE نحصل على:

$$u_{n,m,p+1}=-u_{n,m,p-1}+\left(2-4r^2\right)u_{n,m,p}+r^2\left(u_{n+1,m,p}+u_{n-1,m,p}+u_{n,m+1,p}+u_{n,m-1,p}\right)\quad\ldots(18)$$

$$w_{n,m,p+1}=-w_{n,m,p-1}+\left(2-4c^2r^2\right)w_{n,m,p}+c^2r^2\left(w_{n+1,m,p}+w_{n-1,m,p}+w_{n,m+1,p}+w_{n,m-1,p}\right)\ldots(19)$$

وبالتعويض عن $u_{n,m,p}=\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk},\ w_{n,m,p}=\gamma^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ في المعادلتين (18) و(19) وبالترتيب نحصل على:

$$\zeta^{p+1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}=-\zeta^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}+\left(2-4r^2\right)\zeta^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$$
$$+r^2\left(\zeta^{p}e^{i\beta(n+1)h}e^{i\alpha mk}+\zeta^{p}e^{i\beta(n-1)h}e^{i\alpha mk}+\zeta^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m+1)k}+\zeta^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m-1)k}\right)$$
$$\gamma^{p+1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}=-\gamma^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}+\left(2-4r^2c^2\right)\gamma^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$$
$$+c^2r^2\left(\gamma^{p}e^{i\beta(n+1)h}e^{i\alpha mk}+\gamma^{p}e^{i\beta(n-1)h}e^{i\alpha mk}+\gamma^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m+1)k}+\gamma^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m-1)k}\right)$$

وبقسمة المعادلتين أعلاه على $\zeta^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ و $\gamma^{p}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ وبالترتيب ينتج:

$$\zeta=-\zeta^{-1}+\left(2-4r^2\right)+r^2\left(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h}+e^{i\alpha k}+e^{-i\alpha k}\right)$$
$$\gamma=-\gamma^{-1}+\left(2-4c^2r^2\right)+c^2r^2\left(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h}+e^{i\alpha k}+e^{-i\alpha k}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{\zeta^2+1}{\zeta}=\left(2-4r^2\right)+r^2\left(2\cos(\beta h)+2\cos(\alpha k)\right)$$
$$\Rightarrow\frac{\gamma^2+1}{\gamma}=\left(2-4c^2r^2\right)+c^2r^2\left(2\cos(\beta h)+2\cos(\alpha k)\right)$$
$$\Rightarrow\frac{\zeta^2+1}{\zeta}=2-4r^2+2r^2\left[1-2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\frac{\gamma^2+1}{\gamma}=2-4c^2r^2+2c^2r^2\left[1-2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\frac{\zeta^2+1}{\zeta}=2\left[1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\frac{\gamma^2+1}{\gamma}=2\left[1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\frac{\zeta^2+1}{\zeta}=2A$$
$$\Rightarrow\frac{\gamma^2+1}{\gamma}=2B$$

إذ أنّ

$$A=\left[1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\mathbf{B}=\left[1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\zeta^2-2\zeta A+1=0$$
$$\Rightarrow\gamma^2-2B\gamma+1=0$$

أو

$$\Rightarrow\zeta=A\mp\sqrt{A-1}$$
$$\Rightarrow\gamma=B\mp\sqrt{B-1}$$

لكي تكون $|\zeta|\le 1$ و $|\gamma|\le 1$ من الضروري أن تكون $|A|\le 1$ و $|B|\le 1$ وبالترتيب

$$\Rightarrow\left|1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right|\le 1\qquad\ldots(20)$$

$$\Rightarrow \left|1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right|\le 1 \qquad \ldots(21)$$

وبأخذ المتباينة (20)

$$-1\le 1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\le 1$$

وبأخذ الطرف الأيمن للمتباينة نحصل على:-

$$1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\le 1$$

$$-2r^2\left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\le 0$$

$$r^2\left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\ge 0$$

لبعض قيم β و α يكون $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)=1$ و $\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)=1$

$$r^2\ge 0$$

وهذا صحيح دائما. وبأخذ الطرف الأيسر للمتباينة نحصل على :-

$$-1\le 1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)$$

$$-2\le -2r^2\left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)$$

$$r^2\left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\le 1$$

$$r^2\le \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}$$

$$\frac{z^2}{h^2}\le \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}$$

$$z^2\le \frac{h^2}{\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}$$

وعليه فإنّ الطريقة تكون مستقرة تحت الشرط

$$z^2\le \frac{h^2}{2}$$

وبنفس الأسلوب يجرى على المتباينة (21) فنحصل على

$$c^2r^2\ge 0$$

وعليه فإنّ الطريقة تكون مستقرة تحت الشرط

$$z^2 \le \frac{h^2}{2c^2}$$

6. تحليل الاستقرارية لطريقة الـ (ADI) لنظام Sine-Gordon باستخدام طريقة :Fourier(Von-Neumann)

سنقوم أولا بدراسة استقرارية الخطوة الأولى لطريقة الـ ADI، أي الحركة من المستوى $p-1$ إلى المستوى $p+1$ ([6]، [11]). وباستخدام طريقة الـ ADI للنظام (1) بعد إهمال الحد اللاخطي منه نحصل على:

$$\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p+1}-r^2\left(u_{n+1,m,p+1}+u_{n-1,m,p+1}\right)=$$
$$\ldots(22)\;-\left(1+2r^2\right)u_{n,m,p-1}+r^2\left(u_{n,m+1,p-1}+u_{n,m-1,p-1}\right)+2u_{n,m,p}$$

$$\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p+1}-c^2r^2\left(w_{n+1,m,p+1}+w_{n-1,m,p+1}\right)=$$
$$\ldots(23)\;-\left(1+2c^2r^2\right)w_{n,m,p-1}+c^2r^2\left(w_{n,m+1,p-1}+w_{n,m-1,p-1}\right)+2w_{n,m,p}$$

وبالتعويض عن $u_{n,m,p}=\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk},\; w_{n,m,p}=\gamma^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ في المعادلتين (22) و(23) وبالترتيب نحصل على:

$$\left(1+2r^2\right)\zeta^{p+1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}-r^2\left(\zeta^{p+1}e^{i\beta(n+1)h}e^{i\alpha mk}+\zeta^{p+1}e^{i\beta(n-1)h}e^{i\alpha mk}\right)$$
$$=-\left(1+2r^2\right)\zeta^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}+r^2\left(\zeta^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m+1)k}+\zeta^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m-1)k}\right)+2\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$$
$$\left(1+2c^2r^2\right)\gamma^{p+1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}-c^2r^2\left(\gamma^{p+1}e^{i\beta(n+1)h}e^{i\alpha mk}+\gamma^{p+1}e^{i\beta(n-1)h}e^{i\alpha mk}\right)$$
$$=-\left(1+2c^2r^2\right)\gamma^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}+c^2r^2\left(\gamma^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m+1)k}+\gamma^{p-1}e^{i\beta nh}e^{i\alpha(m-1)k}\right)+2\gamma^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$$

وبقسمة المعادلتين أعلاه على $\zeta^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ و $\gamma^p e^{i\beta nh}e^{i\alpha mk}$ وبالترتيب

$$\left(1+2r^2\right)\zeta-r^2\left(\zeta e^{i\beta h}+\zeta e^{-i\beta h}\right)=-\left(1+2r^2\right)\zeta^{-1}+r^2\left(\zeta^{-1}e^{i\alpha k}+\zeta^{-1}e^{-i\alpha k}\right)+2$$
$$\left(1+2c^2r^2\right)\gamma-c^2r^2\left(\gamma e^{i\beta h}+\gamma e^{-i\beta h}\right)=-\left(1+2c^2r^2\right)\gamma^{-1}+c^2r^2\left(\gamma^{-1}e^{i\alpha k}+\gamma^{-1}e^{-i\alpha k}\right)+2$$
$$\left(1+2r^2\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-2=r^2\left(\zeta\left(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h}\right)\right)+r^2\left(\zeta^{-1}\left(e^{i\alpha k}+e^{-i\alpha k}\right)\right)$$
$$\left(1+2c^2r^2\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-2=c^2r^2\left(\gamma\left(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h}\right)\right)+c^2r^2\left(\gamma^{-1}\left(e^{i\alpha k}+e^{-i\alpha k}\right)\right)$$
$$\left(1+2r^2\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-2=2r^2\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-4r^2\zeta\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-4r^2\zeta^{-1}\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)$$
$$\left(1+2c^2r^2\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-2=2c^2r^2\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-4c^2r^2\gamma\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)-4c^2r^2\gamma^{-1}\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)$$
$$\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\left(1+2r^2-2r^2\right)+4r^2\zeta\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+4r^2\zeta^{-1}\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)-2=0$$
$$\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)\left(1+2c^2r^2-2c^2r^2\right)+4c^2r^2\gamma\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+4c^2r^2\gamma^{-1}\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)-2=0$$
$$\zeta^2+1+4r^2\zeta^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+4r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)-2\zeta=0$$
$$\gamma^2+1+4c^2r^2\gamma^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)-2\gamma=0$$

$$\zeta^2\left(1+4r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)-2\zeta+\left(1+4r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)=0$$

$$\gamma^2\left(1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)-2\gamma+\left(1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)=0$$

$$\zeta^2-\left(\frac{2}{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}\right)\zeta+\left(\frac{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}\right)=0$$

$$\gamma^2-\left(\frac{2}{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}\right)\gamma+\left(\frac{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}\right)=0$$

نفرض أنّ

$$H=\frac{1}{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \quad , \quad G=\frac{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}{1+4r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

$$I=\frac{1}{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \quad , \quad J=\frac{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}{1+4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

$$\zeta^2-2H\zeta+G=0$$

$$\gamma^2-2I\gamma+J=0$$

$$\zeta=H\mp\sqrt{H^2-G}$$

$$\gamma=I\mp\sqrt{I^2-J}$$

الآن إذا كان $|H|\le 1$, $|I|\le 1$ فإنّ $H^2-G<0$, $I^2-J<0$

$$\zeta=H\mp i\sqrt{G-H^2}$$

$$\gamma=I\mp i\sqrt{J-I^2}$$

$$|\zeta|=(G)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\gamma|=(J)^{\frac{1}{2}}$$

ولبعض القيم لـ β,α تكون كل من $J=1, G=1$

$$|\zeta|=1$$

$$|\gamma|=1$$

وعليه فإنّ الخطوة الأولى تكون مستقرة بدون شروط.

وبنفس الأسلوب نقوم بدراسة استقرارية الخطوة الثانية لطريقة الـ ADI للحركة من المستوي p إلى المستوي $p+2$ ونستنتج أن الخطوة الثانية تكون مستقرة أيضاً بدون شرط.

7. النتائج العددية

لغرض الحل العددي نأخذ نظام Sine-Gordon في بعدين والمتمثل بالنظام (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\delta^2\sin(u-w)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sin(u-w)$$

على المنطقة المستطيلة $0\le x\le 2\pi$ ، $0\le y\le 2\pi$. بالشروط الابتدائية:

$$u(x,y,0)=f(x,y)\quad,\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0\quad,\quad 0\le x,y\le 2\pi$$

$$w(x,y,0)=g(x,y)\quad,\quad \frac{\partial w(x,y,o)}{\partial t}=0\quad,\quad 0\le x,y\le 2\pi$$

والشرط الحدودي: $u=0$, $w=0$ عندما $t\ge 0$ ، وإن:

$$u(x,y,0)=\sin(x)*\sin(y)$$

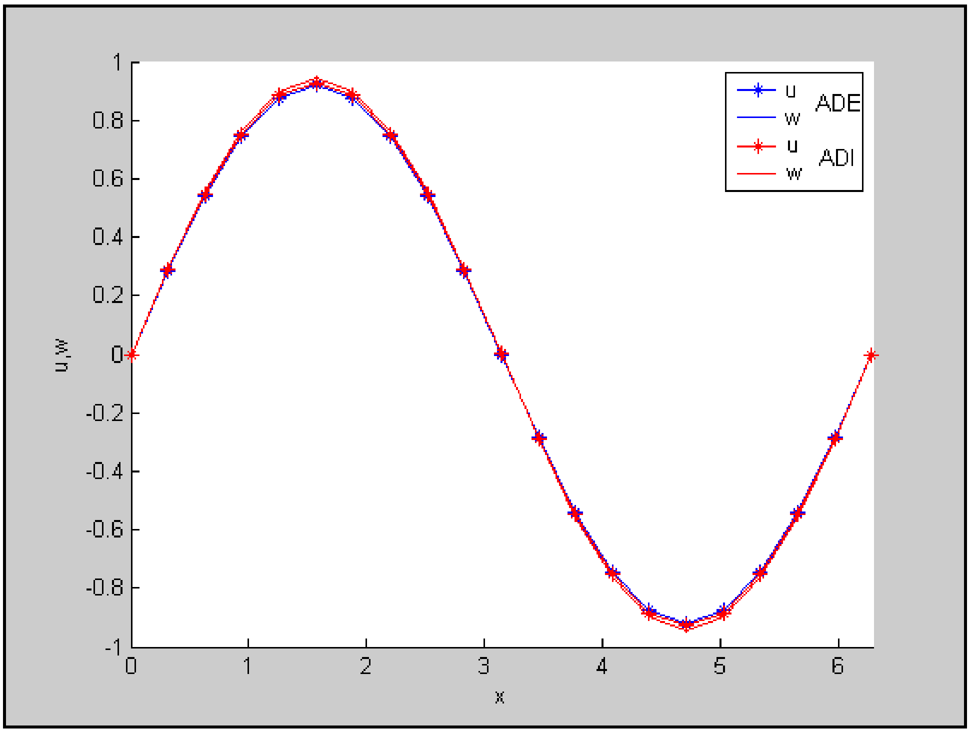
$$w(x,y,0)=\sin(x)*\sin(y)$$

جدول (1). مقارنة بين طريقتي الـ ADE و الـ ADI

ADE Method (fourth level) x=1.88495559 h=0.31415927 k=0.31415927 z=0.22214415 c=0.5 $\delta=1$		ADI Method (fourth level) x=1.88495559 h=0.31415927 k=0.31415927 z=0.22214415 c=0.5 $\delta=1$	
$u(x,y,t)$	$w(x,y,t)$	$u(x,y,t)$	$w(x,y,t)$
0	0	0	0
0.2838	0.2911	0.2871	0.2921
0.5399	0.5536	0.5461	0.5556
0.7431	0.7620	0.7517	0.7647
0.8736	0.8958	0.8837	0.8989
0.9185	0.9419	0.9291	0.9452
0.8736	0.8958	0.8837	0.8989
0.7431	0.7620	0.7517	0.7647
0.5399	0.5536	0.5461	0.5556
0.2838	0.2911	0.2871	0.2921
0	0	0	0
-0.2838	-0.2911	-0.2871	-0.2921
-0.5399	-0.5536	-0.4561	-0.5556
-0.7431	-0.7620	-0.7517	-0.7647

-0.8736	-0.8958	-0.8837	-0.8989
-0.9185	-0.9419	-0.9291	-0.9452
-0.8736	-0.8958	-0.8837	-0.8989
-0.7431	-0.7620	-0.7517	-0.7647
-0.5399	-0.5536	-0.5461	-0.5556
-0.2838	-0.2911	-0.2871	-0.2921
0	0	0	0

من خلال ملاحظة النتائج نستنتج أن طريقة الـ ADI هي أفضل من طريقة الـ ADE في بعدين كما أن الحل العددي في بعدين يكون دورياً ومتناظراً أي أن الحل يعيد نفسه لكل فترة ولذلك فإننا نحتاج إلى حسابات أقل وبالتالي إلى وقت أقل.



شكل (1). مقارنة بين طريقتي الـ ADE والـ ADI عندما $c = 0.5$ و $\delta = 1$

8. الاستنتاجات:

من خلال المقارنة بين حل نظام Sine-Gordon في بعدين فقد تبين أنّ حل نظام Sine-Gordon باستخدام طريقة الـ ADI أفضل من الحل بطريقة الـ ADE، كما أنّ الحل بطريقة الـ ADE يكون أسهل وأسرع من الحل بطريقة الـ ADI، وأنّ الحل بكلتا الطريقتين يكون متناظرا مما يؤدي الى توفير الوقت والجهد، وتم تحليل الاستقرارية لكل من الطريقتين باستخدام طريقة (Von-Neumann) Fourier وتبين أنّ طريقة الـ ADI تكون مستقرة لجميع قيم r^2 أي انها تكون مستقرة على نحو غير مشروط في حين طريقة الـ ADE تكون مستقرة تحت الشرط $r^2 \le \frac{1}{2c^2}$ و $r^2 \le \frac{1}{2}$ أي $\Delta t^2 \le \frac{\Delta h^2}{2c^2}$.

المصادر

[1] الدلفي، حسن مجيد حسون ومشكور، محمود عطا الله مشكور، (1999)، "**التحليل الهندسي والعددي التطبيقي**"، الجامعة التكنلوجية، بغداد.

[2] العاني، عطا الله ثامر العاني، (1982)، "**المعادلات التفاضلية الجزئية للكليات العلمية_والهندسية**"، جامعة بغداد.

[3] شكر، نزار حمدون، (1989)، "**مسائل القيم الحدودية**"، جامعة الموصل.

[4] Ablowitz, M.J., Herbst, B.M. and Schober, C., (1996), **"On the numerical solution of the Sine-Gordon equation**: **I, Integrable discretizations and howoclinic manifolds"**, J. Compnt. Phys. 126, pp.299-314.

[5] Gordon D. Smith (1965); "**Numerical Solution of Partial Differential Equations :Finite Difference Methods",** second edition, Oxford University press.

[6] Jain, M.K., Iyengar, S. R.K., and Jain, R.K., (1985); "**Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation",** second edition, Wiley Eastern Limited.

[7] Jesus Adrian Espinola Rocha, (2000), "**Some exact solutions of a coupled system of Klein-Gordon eqations"**, The nonlinear journal ,Vol.2, PP.1-13.

[8] Khomeriki, R., and Leon, J., (2005), "**Bistability in Sine-Gordon:The ideal switch"**, Phys. Rev. E71, 056620.

[9] Lu, X., and Schmid, R., (1998), " **Symplectic integration of Sine-Gordon type systems"**, IMACS international conference MODELLING 98, Prague, July 7-11.

[10] Peaceman, D. W. and Rechford, H.H., (1955), **"The numerical solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations"**, SIAM J., 3, P.28

[11] Shanthakumar, M., (1989); **"Computer Based Numerical Analysis"**, Khanna Publishers.