

## Studying the Stability of One of Non-Linear Autoregressive Relational Models

Abdulghafoor Salim N Hamed Mohammed Kalaf

drabdul\_salim@uomosul.edu.iq

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 6/12/2010

Accepted on: 16/3/2011

### ABSTRACT

Time series are usually built on basic assumptions involving stability, Linearity and normality, these three features are so important in both estimating and building the time series models.

The study of time series involves these assumption and how to manipulate the unstable time series on the basis of which the suitable mathematical models fit for these series.

In this paper, we suggestion the stationarity of one of the non linear -Autoregressive time series models called rational model has been studied which is a fraction whose numerator is the cosine function and its denominator is an exponential Autoregressive models. The singular point and the limit cycle of the models and its stationarity study have been found by adopting the linear approximation technique.

**Keywords:** Stability, Non-Linear Autoregressive.

دراسة استقرارية أحد نماذج الانحدار الذاتي النسبي غير الخطي

حامد محمد خلف

عبد الغفور جاسم سالم

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 16 / 3 / 2011

تاريخ استلام البحث: 6 / 12 / 2010

### المخلص

عادة تبني السلاسل الزمنية على افتراضات أساسية تشمل على المروحة (Stationarity)، والخطية (Linearity)، والطبيعية (Normality)، إن هذه الصفات الثلاث مهمة جداً في التقدير وبناء نماذج السلاسل الزمنية. وأن دراسة السلاسل الزمنية تشمل على هذه الافتراضات، وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة، التي على أساسها يتم ملائمة النماذج الرياضية الملائمة لتلك السلاسل.

تم في هذا البحث اقتراح أحد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطية، الذي يدعى بالأنموذج النسبي (Rational Model)، وهو عبارة عن كسر بسطه دالة الجيب تمام ومقامه أنموذج انحدار ذاتي أسي، وحاولنا إيجاد استقرارية هذا الأنموذج وإيجاد النقطة الثابتة (Singular Point) ودورة النهاية (Limit Cycle) للأنموذج ودراسة استقراريته باستخدام تقنية التقريب الخطية.

الكلمات المفتاحية: الاستقرارية، نموذج انحدار ذاتي غير خطي.

### 1- المقدمة:

إن السلاسل الزمنية من الطرائق الرياضية المهمة والمفيدة للبحوث والدراسات العلمية، وتعدُّ الركيزة الأساسية للخطط التنموية وتطوير أساليب التخطيط، ومدخلاً رئيساً للتصدي الحازم لبعض المشكلات والتغيرات القائمة في الجوانب الطبية والاقتصادية والخدمية ... الخ [1]. إن دراسة السلاسل الزمنية تشمل على افتراضات أساسية متمثلة بالخطية (Linearity)، والمرحلية (Stationarity)، والطبيعية (Normality) وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة لبناء نماذج رياضية ملائمة لها كأن تكون نماذج خطية أم غير خطية، ستركز بحثنا على دراسة استقرارية أحد النماذج النسبية المقترح الذي يدعى بأنموذج الانحدار الذاتي النسبي (Autoregressive Rational Model)، بحيث تكون معلمات (Parameters) الأنموذج عبارة عن دالة كسرية

بسببها دالة الجيب تمام ومقامها أنموذج انحدار ذاتي أسي. هذا الأنموذج يمتلك عادة سلوكية غير خطية على شكل دورات نهاية (Limit Cycle)، وتم استخدام طريقة التقريب الخطية المقترحة من الباحث Ozaki في عام 1985 لإيجاد الاستقرار لهذا الأنموذج وبعض الصفات الإحصائية الأخرى.

## 2- مفاهيم أساسية:

### 2-1 أنموذج الانحدار الذاتي Autoregressive Model [7]

يعد أنموذج الانحدار الذاتي (AR model) للسلسلة الزمنية من النوع المتقطع من أكثر النماذج استخداماً في التطبيقات المختلفة، والصيغة العامة لأنموذج الانحدار الذاتي من المرتبة P، الذي يرمز له بـ AR(P) هي

$$x_t = M + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + z_t \quad (1-1)$$

إذ إنَّ M و  $a_1, a_2, \dots, a_p$  هي ثوابت، وإنَّ  $\{z_t\}$  هي عملية عشوائية بحتة (Purely Random Process) غير مترابطة (Uncorrelated) وتسمى بالإزعاج الأبيض (White Noise). وتمتلك الصفات الآتية:

$$\text{Cov}(z_t, z_{t+k}) = 0, \quad \forall k \neq 0, \quad \text{Var}(z_t) = \sigma_z^2, \quad E(z_t) = 0$$

ويمكن كتابة الأنموذج (1-1) بالشكل الآتي:

$$\alpha(B)x_t = M + z_t \quad (1-2)$$

إذ إنَّ  $\alpha(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p$ ، وان B يمثل مؤثر الإزاحة الخلفية (Feedback Shift Operator) الذي يعرف بالشكل  $B^n x_t = x_{t-n}$  لكل  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  وعادة يأخذ أنموذج الانحدار الذاتي بالشكل الآتي:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + z_t \quad (1-3)$$

إن الحل العام للأنموذج (1-3) هو

$$X_t = f(t) + \alpha^{-1}(B) z_t \quad (1-4)$$

إذ إنَّ f(t) هي الدالة المتممة (Complementary Function) التي تمثل حل المعادلة الفرقية المتجانسة  $\alpha(B).x_t = 0$ ، التي لها الصيغة الآتية:

$$f(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t \quad (1-5)$$

حيث  $A_1, A_2, \dots, A_p$  ثوابت اختيارية و  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  هي جذور المعادلة المميزة

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \lambda^{p-i} = 0 \quad (1-6)$$

وان  $\alpha^{-1}(B)z_t$  تمثل الحل الخاص للأنموذج .

أن أنموذج الانحدار الذاتي AR(p) يكون مستقرّاً تحادياً إذا فقط إذا كان  $|\lambda_i| < 1$  لكل  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ . [7].

### 2-2 أنموذج الانحدار الذاتي النسبي (الأنموذج المقترح):

لنكن لدينا  $\{X_t\}$  سلسلة زمنية حيث  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  يعرف الأنموذج النسبي للانحدار الذاتي من المرتبة P بأنه الأنموذج الذي يحقق العلاقة الآتية:

$$X_t = \frac{P_1(\cdot)}{P_2(\cdot)} x_{t-i} + z_t; \quad i=1,2,\dots,p$$

إذ إنَّ  $P_1(\cdot)$  و  $P_2(\cdot)$  متعدّدات حدود، أو دوال خطية أو غير خطية. سوف نفترض أنّ

$$P_1(X) = \sum_{i=1}^p \alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)$$

$$P_2(X) = \sum_{i=1}^p (\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2 t})$$

تمثل دالة الجيب تمام، وان  $\Phi$  ،  $W$  ،  $\alpha$  ثوابت  $P_1(\cdot)$  إذ إنّ  
يمثل أنموذجاً أسياً وان  $\pi$  ،  $P_2(\cdot)$  وإن  $w$  ، ثوابت  $\gamma$   
هي سلسلة الأخطاء العشوائية (إزجاج أبيض).  $\{Z_t\}$  و  
فيصبح الأنموذج كالآتي:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2 t}} x_{t-i} + z_t \quad (1-7)$$

### 2-3 النقطة الثابتة Fixed (Singular) Point [5] [6]

ليكن لدينا الأنموذج الآتي:

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}) \quad (1-8)$$

تعرف النقطة المنفردة  $\zeta$  للأنموذج (1-8) بأنها تلك النقطة التي يقترب منها مسار الأنموذج أعلاه، فإذا كان اقتراب المسار من  $\zeta$  عندما  $t \rightarrow \infty$  فتسمى  $\zeta$  نقطة منفردة مستقرة. أما إذا كان الاقتراب من  $\zeta$  عندما  $t \rightarrow -\infty$  فتدعى  $\zeta$  نقطة منفردة غير مستقرة. والشرط الضروري والكافي ل  $\zeta$  هو ان تحقق العلاقة الآتية:-  
 $\zeta = f(\zeta, \zeta, \dots, \zeta)$ .

### 2-4 دورة النهاية Limit Cycle [5]

ليكن لدينا الأنموذج الآتي  $X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$

تعرف دورة النهاية للأنموذج أعلاه على أنها المسار المعزول والمغلق  $X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+q} = X_t$  إذ إنّ  $q$  تمثل عدداً صحيحاً موجباً. ويعرف المسار المعزول بأنه أي مسار يبدأ قريباً جداً من دورة النهاية، ويقترب منها عندما  $t \rightarrow \infty$  أو  $t \rightarrow -\infty$  فإذا كان الاقتراب منها عندما  $t \rightarrow \infty$  فتسمى دورة نهاية مستقرة (Stable Limit cycle) أما إذا كان الاقتراب عندما  $t \rightarrow -\infty$  فتسمى دورة نهاية غير مستقرة (Unstable Limit Cycle) ، أما المسار المغلق فهو إذا كانت القيم الابتدائية  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$  تنتمي لدورة النهاية فإن  $(X_{1+kq}, X_{2+kq}, \dots, X_{p+kq}) = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  لكل عدد صحيح موجب  $k$ . حيث  $p$  هو الدورة Period لدورة النهاية (Limit Cycle) وهو عدد نقاط المسار المغلق، وان كلاً من  $k$  و  $q$  تمثلان عدداً صحيحاً موجباً [Ozaki – 85].

### 2-5 طريقة التقريب الخطية [5]

لقد اقترحت طريقة التقريب الخطية المحلية من قبل الباحث (Ozaki : 1985) لإيجاد استقرارية النماذج غير الخطية، وتم تلخيص الطريقة بالمراحل الآتية:

- \* المرحلة الأولى: إيجاد النقاط المنفردة غير الصفرية للأنموذج غير الخطي.
- \* المرحلة الثانية: اختبار استقرارية تلك النقطة باستخدام تقنية التقريب الخطية.

**3- استقرارية أنموذج الانحدار الذاتي النسبي:**

### 3-1 الاستقرارية [2] Stability

تصادفنا في كثير من المسائل الفيزيائية الهندسية عمليات يمكن وصفها بأنها في حالة اتزان إحصائي Statistical Equilibrium، ومعنى ذلك أننا لو حصلنا على مشاهدات لعملية من هذا النوع وتم تقسيمها إلى مجاميع من الفترات الزمنية فإن المقاطع المختلفة لهذه المشاهدات تبدو متشابهة، وبكلام أكثر دقة إنَّ الصفات الإحصائية ثابتة لا تتغير مع الزمن. إنَّ العمليات التصادفية التي تتصرف على هذا النحو تدعى عمليات مُراوحة [2] Stationary، وتعني عدم وجود نمو أو اضمحلال لبيانات السلسلة الزمنية، بمعنى آخر إنَّ البيانات تكون منتشرة حول وسط ثابت ولها تباين ثابت. ذلك يعني  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$  يجب أن يكون لها دالة الكثافة الاحتمالية نفسها، أي  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_t) = f(x_{1+k}, x_{2+k}, x_{3+k}, \dots, x_{t+k})$  إذ إنَّ  $k$  تمثل عدداً حقيقياً. وإنَّ التوزيع الاحتمالي المشترك لا يتغير مع تغيير الفترة الزمنية أو عند الإزاحة بأعداد ثابتة.

**نتيجة [2]:** إن العمليات المرحلية Stationary تنشأ عادة من خلال نظام مستقر Stable يصل إلى حالة الثبات Steady State بعد فتره زمنية مناسبة. وقد عرّف Wei (1990) النظام المستقر (Stable) بأنه النظام الذي ينتج الإدخال المحدود فيه دائماً إخراجاً محدداً، وعليه يكون النظام مستقراً Stability رياضياً إذا كانت جذور متعدد الحدود لمعادلة النظام في صيغة عامل التخلف (Laq Operator) تقع كلها خارج دائرة الوحدة (Unit Circle)، أو إن جذور المعادلة المميزة تقع كلها داخل دائرة الوحدة [2].

### 3-2 استقرارية أنموذج الانحدار الذاتي الخطي [4] Stability of Linear Autoregressive Models

إنَّ الدالة المتممة  $f(t)$  (Complementary Function) في المعادلة (1-5)، التي تمثل حل المعادلة الفرقية المتجانسة  $x_t = 0$  تقترب من الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$  إذا فقط إذا كانت القيم المطلقة لجميع جذور المعادلة المميزة أقل من الواحد أي إنَّ شرط الاستقرارية المحاذية (Asymptotically Stationarity) لأنموذج الانحدار الذاتي هو أن جميع جذور المعادلة المميزة تقع داخل دائرة الوحدة (Unit Circle)، وهي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 [2].

### 3-3 استقرارية النماذج غير الخطية [5] [3] Stationarity of Non Linear Models

إنَّ التقنيات المطورة لدراسة الاستقرارية لنماذج السلاسل الزمنية الخطية تعتمد اعتماداً كبيراً على الافتراضية الخطية، ولذلك لا يمكن التوسع بسهولة إلى الحالة غير الخطية. وسوف ندرس حالات خاصة من النماذج غير الخطية، وهناك دراسات عديدة لإيجاد الاستقرارية للنماذج غير الخطية منها إيجاد الاستقرارية حسب طريقة لابنوف (Lyapunov) المباشرة، التي تعتمد الاستقرارية مع الشرط الابتدائي، وتعتمد على أكثر من متغير. وكذلك استقرارية لاكرانج (Lagrange) التي تكون عادةً مقتصرة على سلسلة أو عدة سلاسل، ويجب أن تكون السلسلة محددة أي  $|x_t| \leq m$  إذ إنَّ  $m$  ثابت، وتستخدم في إيجاد استقرارية السلاسل الزمنية مستمرة الزمن أو

المتقطعة الزمن. وكذلك طريقة التقريب الخطية كطريقة الباحث الياباني Ozaki لدراسة الاستقرارية للنماذج غير الخطية، وسوف يتركز اهتمامنا على دراسة الاستقرارية لأحد نماذج الانحدار الذاتي النسبية حسب طريقة الباحث اوزاكي.

#### 3-4 استقرارية نموذج الانحدار الذاتي (المقترح):

إن إيجاد الاستقرارية للنماذج النسبية ليس بالعملية السهلة، لذلك نأخذ حالات خاصة وبصيغ مبسطة يمكن إيجاد الاستقرارية باستخدام صيغة استقرارية النماذج الخطية، فعلى سبيل المثال يمكن اختبار استقرارية الأنموذج النسبي الآتي ومعاملته معاملة النماذج الخطية:

$$y(t) = \frac{0.99 + e^2(t-1)}{1 + 0.1y^2(t-1) + e^2(t-1)} y(t-1) + z(t) \quad (2-1)$$

هذا الأنموذج يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

$$y(t) = \varphi y(t-1) + z(t)$$

إذ إن

$$\varphi = \frac{0.99 + e^2(t-1)}{1 + 0.1y^2(t-1) + e^2(t-1)}$$

والمعادلة المميزة لهذا الأنموذج هي

$$v - \varphi = 0$$

فيكون شرط الاستقرارية  $|m| < 1$  إذ إن  $m$  هو جذر المعادلة المميزة وبما أن

$$0 < \frac{0.99 + e^2(t-1)}{1 + 0.1y^2(t-1) + e^2(t-1)} < 1$$

وهو ضمن الفترة  $-1 < m < 1$  فإن الأنموذج يكون مستقراً.

وقد حاول عدد من الباحثين دراسة استقرارية هذه النماذج الخطية وغير الخطية وبحالات خاصة. فقد قام بدراسة نماذج الانحدار الذاتي الأسي بطريقة التقريب الخطية العالم اوزاكي (Ozaki)، ففي عام (1985) قدم العالم Ozaki بحثاً مختصاً بالاهتزازات العشوائية اللاخطية في الأنظمة الحركية ونمذجتها باستخدام الأنموذج الأسي للانحدار الذاتي [5].

وسوف نحاول في السطور القادمة دراسة استقرارية نموذج الانحدار الذاتي النسبي، وبحالة خاصة عندما تكون  $P_1(\cdot)$  دوالاً مثلثية،  $P_2(\cdot)$  أنموذجاً أسياً وهو الأنموذج المقترح. ودراسة استقرارية هذا الأنموذج تكون من خلال إيجاد النقطة المنفردة، ونختبر استقراريته وباستخدام طريقة التقريب الخطية أو دورة النهاية. و نبدأ بحالات خاصة للأنموذج (1-7) ثم نحاول تعميم الفكرة لتشمل الأنموذج من الرتبة  $p$ .

#### 3-5 إيجاد النقطة المنفردة للأنموذج المقترح :

ليكن لدينا الأنموذج المعرف في (1-7)

$$x_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2}} x_{t-i} + z_t$$

معرفه سابقاً و  $\{Z_t\}$  إزجاجات بيضاء  $\gamma, \theta, \pi, w, \phi, \alpha$

عندما  $p=1$  فنحصل على

$$x_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-\gamma x_{t-1}}} x_{t-1} + z_t \quad (2-2)$$

وهو أنموذج نسبي من المرتبة الأولى.

نفرض تأثير  $\{Z_t\}$  يساوي صفراً، ثم نستخدم تعريف النقطة المنفردة

فنحصل على

$$\zeta = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-\gamma \zeta}} \zeta \quad (2-3)$$

إن  $\zeta = 0$  تمثل النقطة الثابتة الصفرية، وهو أحد الحلول والذي يسمى بالحل التافه (Trivial Solution)، وبقيّة النقاط الثابتة (غير الصفرية) يمكن إيجادها من حل المعادلة (2-3)، وكما يأتي:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-\gamma \zeta^2}} \\ \Rightarrow \theta_1 e^{-\gamma \zeta^2} &= \alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1 \\ \Rightarrow -\gamma \zeta^2 &= \ln[(\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1) / \theta_1] \\ \Rightarrow \zeta^2 &= \frac{-\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1}\right]}{\gamma} \\ \Rightarrow \zeta &= \pm \sqrt{\frac{-\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1}\right]}{\gamma}} \quad (2-4) \end{aligned}$$

وهذا الحل إن وجد فهو يمثل نقطتين منفردتين متناظرتين أي إن:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{\frac{-\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1}\right]}{\gamma}} \\ \zeta_2 &= -\sqrt{\frac{-\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1}\right]}{\gamma}} \end{aligned}$$

النقطة المنفردة للأنموذج النسبي من المرتبة  $P$ :

ولإيجاد النقطة المنفردة للأنموذج النسبي من المرتبة  $p$ ، نهمل تأثير  $\{Z_t\}$  في الأنموذج المقترح (1-7) فنحصل

على:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2}} X_{t-i}$$

وباستخدام تعريف النقطة المنفردة نحصل على

$$\zeta = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2}} \zeta$$

حيث  $\zeta=0$  هي إحدى الحلول، وتسمى النقطة الصفرية للأنموذج (1-7). ولإيجاد بقية النقاط المنفردة لأي مرتبة معطاة تتبع صيغة مشابهة لطريقة إيجاد النقاط المنفردة عندما  $P=1$ .

### 3-6 مأخوذة [5]

ليكن لدينا الأنموذج الآتي:  $X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$

حيث  $f(\cdot)$  تمثل دالة أسية

إن الشروط الضرورية التي يجب أن تتحقق لكي يمتلك الأنموذج دورة نهاية هي:

1- جميع جذور المعادلة المميزة تقع داخل دائرة الوحدة عندما تكون  $X_{t-1}$  كبيرة جداً أي  $(|X_{t-1}| \rightarrow \infty)$ .

2- على الأقل أحد جذور المعادلة المميزة تقع داخل دائرة الوحدة، عندما تكون

$X_{t-1}$  صغيرة جداً أي أن  $(|X_{t-1}| \rightarrow 0)$ .

3-

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i}{\sum_{i=1}^p \pi_i} < 1 \text{ or } \frac{1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i}{\sum_{i=1}^p \pi_i} > 0$$

### 3-7 دورة النهاية للأنموذج المقترح:

سوف نحاول إيجاد دورة النهاية بالاستناد إلى المأخوذة (3-6) أعلاه وبعد إهمال تأثير الإزعاجات وكما

يأتي:

1- عندما تكون  $X_{t-1}$  كبيرة جداً أي انه عندما تكون  $|X_{t-1}| \rightarrow \infty$  فنحصل على المقدار

$$e^{-x_{t-1}^2} \rightarrow 0$$

ونعوض في الأنموذج (1-7) فنحصل على

$$x_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i} x_{t-i}$$

والذي يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$X_t = A_i X_{t-1}; \quad i=1, 2, 3, \dots, P \quad (2-5)$$

إذ إن

$$A_i = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i}$$

والمعادلة المميزة له هي

$$V^p - A_1 V^{p-1} - A_2 V^{p-2} - \dots - A_p = 0$$

ويحل هذه المعادلة نحصل على الجذور.

2- عندما تكون  $X_{t-1}$  صغيرة جداً أي أن  $|X_{t-1}| \rightarrow 0$  ومنها نحصل على:

$$e^{-x_{t-1}^2} \rightarrow 1$$

وبالتعويض بالأنموذج (1-7) نحصل على

$$x_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i} x_{t-i}$$

وهو أنموذج انحدار ذاتي من المرتبة  $p$  ومعادلاته المميزة هي

$$V^p - A'_1 V^{p-1} - A'_2 V^{p-2} - \dots - A'_p = 0$$

إذ أن

$$A'_i = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i}$$

ويحل المعادلة نحصل على الجذور.

3- تكون النقطة المنفردة غير الصفريّة موجودة وحقيقية إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 < \frac{\left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1} \right]}{\gamma} < 1$$

### 3-8 استقرارية النقطة المنفردة غير الصفريّة للأنموذج (المقترح):

سوف نحاول اختبار استقرارية النقطة المنفردة غير الصفريّة باستخدام طريقة التقريب الخطي المحلية بالقرب

من النقطة المنفردة وكما يأتي:

ليكن لدينا الأنموذج (1-7) الذي صيغته

$$x_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-x_{t-1}^2}} x_{t-i} + z_t$$

نفترض تأثير  $z_t$  معدوماً، ونفرض أن  $X_{t-i} = \zeta + \zeta_{t-i}$ ;  $i=0, 1, 2, 3, \dots, p$  حيث  $\zeta$  مقدار صغير جداً ونفرض

أن  $\gamma = 1$  فنحصل على:

$$\zeta + \zeta_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-(\zeta + \zeta_{t-1})^2}} (\zeta + \zeta_{t-i});$$

$$\zeta + \zeta_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2 - 2\zeta\zeta_{t-1} - \zeta_{t-1}^2}} (\zeta + \zeta_{t-i})$$

حيث  $\zeta_t^n \rightarrow 0$  لكل  $n \geq 2$ .

$$\zeta + \zeta_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2 - 2\zeta\zeta_{t-1}}} (\zeta + \zeta_{t-i})$$



بما أن  $\zeta_t$  ،  $\zeta_{t-1}$  صغيرة جداً. نفترض أن  $0 \cong \zeta_{t-1} \cong 2$  ، فنحصل على

$$\zeta_t + \zeta_{t-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2}} (\zeta + \zeta_{t-i})$$

$$\zeta_t + \zeta_{t-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2}} \zeta + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2}} \zeta_{t-i}$$

$$\zeta_t = \left( \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2}} - 1 \right) \zeta + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\zeta^2}} \zeta_{t-i}$$

نعوض عن قيمة  $\zeta$  المعرفة في المعادلة (2-4) وكما يأتي:

$$\begin{aligned} \theta_i e^{-\zeta^2} &= \theta_i e^{\frac{\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i}\right]}{\gamma}} \\ &= \theta_i e^{\frac{1}{\gamma} \ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i}\right]} = \theta_i e^{\frac{\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i}\right]}{\gamma}} \\ &= \theta_i \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

فيصبح النموذج كالاتي:

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \zeta_{t-i} + \\ &\left( \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} - 1 \right) \left( \mp \sqrt{\frac{-\ln\left[\frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi) - \pi_1}{\theta_i}\right]}{\gamma}} \right) \\ \zeta_t &= M + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\theta_i} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \zeta_{t-i} \end{aligned}$$

إذ تمثل M كمية ثابتة. والمعادلة أعلاه هي معادلة تمثل أنموذج انحدار ذاتي خطي من المرتبة p بدون إزعاج ابيض أي أن

$$\zeta_t = A + h_1 \zeta_{t-1} + h_2 \zeta_{t-2} + \dots + h_p \zeta_{t-p} \quad (2-6)$$

إذ أن

$$h_1 = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\theta_1} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (2-7)$$

$$h_j = \frac{\alpha \cos(2\pi w_j t + \phi)}{\pi_j + \theta_j \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_j t + \phi)}{\theta_j} \right]^{\frac{1}{\gamma}}}; \quad j=2, 3, 4, \dots, p \quad (2-8)$$

وباستخدام شرط استقرارية أنموذج الانحدار الذاتي الخطي نجد أن الأنموذج يكون مستقراً إذا فقط إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة

$$\lambda^p - \sum_{j=1}^p h_j \lambda^{p-j} + A = 0$$

تقع داخل دائرة الوحدة.

### 3-9 شرط استقرارية دورة النهاية:

إذا وجدت دورة نهاية بالدورة q للأنموذج النسبي المقترح (1-7) من المرتبة الأولى والذي صيغته

$$x_t = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2 t}} x_{t-i} + z_t$$

عندما يكون P=1 فان المبرهنة الآتية تعطينا شرط الاستقرارية بدلالة معاملات وثوابت الأنموذج أعلاه.

### 3-10 مبرهنة:

دورة النهاية بالدورة q (إن وجدت) للأنموذج أعلاه عندما يكون P=1 تكون مستقرة مدارياً (Orbitally Stable) إذا تحقق الشرط :-

$$\left| \prod_{i=1}^q \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_i + \theta_i e^{-\lambda_i^2 t}} \right] \right| < 1$$

البرهان : نفترض أن الأنموذج المقترح (1-7) يمتلك دورة نهاية بالدورة q و  $q > 1$  بالشكل:

$$x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}, \dots, x_{t+q} = x_t$$

وهو مسار مغلق ومعزول. كل نقطة  $x_s$  على مسار قريب من دورة النهاية يمكن التعبير عنها بـ  $x_s + \zeta_s$  بحيث أن

$$|\zeta_s| \text{ صغيرة جداً أي أن } |\zeta_s|^n \rightarrow 0 \text{ لكل } n \geq 2 \text{ لـ } s = t, t-1$$

بالغاء تأثير الإزعاج الأبيض  $z_t$  وإحلال  $x_t + \zeta_t$  بدلا من  $x_t$  و  $x_{t-1} + \zeta_{t-1}$  بدلا من  $x_{t-1}$  وبفرض  $\gamma = 1$  في المعادلة

(1-7) إذ إنّ P=1 نحصل على:

$$X_t + \zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-(x_{t-1} + \zeta_{t-1})^2}} (x_{t-1} + \zeta_{t-1})$$

$$X_t + \zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x_{t-1}^2 - 2x_{t-1}\zeta_{t-1} - \zeta_{t-1}^2}} (x_{t-1} + \zeta_{t-1})$$

$$X_t + \zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1} - 2x_{t-1}\zeta_{t-1}}} (x_{t-1} + \zeta_{t-1})$$

$$\zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1} - 2x_{t-1}\zeta_{t-1}}} x_{t-1} + \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1} - 2x_{t-1}\zeta_{t-1}}} \zeta_{t-1} - x_t$$

بما أن

$$X_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1}}} x_{t-1}$$

فإن

$$\zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1} - 2x_{t-1}\zeta_{t-1}}} \zeta_{t-1}$$

وبما أن  $\zeta_{t-1}$  صغيرة جداً و  $x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \dots = \zeta_t$  فإن  $x_{t-1}\zeta_{t-1} \cong 0$

$$\Rightarrow \zeta_t = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1}}} \zeta_{t-1} \quad (2-9)$$

$$\frac{\zeta_t}{\zeta_{t-1}} = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1}}}$$

ليكن

$$T(x_{t-1}) = \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x^2_{t-1}}}$$

فان المعادلة (2-9) يعبر عنها بالشكل الآتي:

$$\zeta_t = T(x_{t-1})\zeta_{t-1}$$

أي أن:-

$$\zeta_{t+1} = T(x_t)\zeta_t$$

$$\zeta_{t+2} = T(x_{t+1})\zeta_{t+1}$$

$$\zeta_{t+3} = T(x_{t+2})\zeta_{t+2}$$

.

.

.

$$\zeta_{t+q} = T(x_{t+q-1})\zeta_{t+q-1}$$

أي

$$\zeta_{t+q} = T(x_{t+q-1}) \cdot T(x_{t+q-2}) \cdot T(x_{t+q-3}) \dots T(x_t)\zeta_t$$

وبالتالي فإن:-

$$\zeta_{t+q} = \left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right| \zeta_t$$

أي

$$\left| \frac{\zeta_{t+q}}{\zeta_t} \right| = \left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right|$$

ولأجل التقارب نحو الصفر يجب أن تكون هذه النسبة أقل من واحد أي أن

$$\left| \prod_{i=1}^q T(x_{t+q-i}) \right| < 1$$

أو

$$\left| \prod_{i=1}^q \frac{\alpha \cos(2\pi w_i t + \phi)}{\pi_1 + \theta_1 e^{-x_{t+q-i}^2}} \right| < 1$$

أي أنّ دورة النهاية مستقرة مدارياً. وبهذا يتم البرهان .

**4- أمثلة توضيحية:** في هذا البند نستعرض أمثلة عددية ونجد شروط استقراريتها بتطبيق الطرق الأنفة الذكر ونبين بعض الأشكال التي تبين استقرارية الأنموذج المقترح.

**4-1 مثال:** ليكن لدينا الأنموذج الآتي:

$$X_t = \frac{-0.5 * \cos(6.28 * 3 + 2)}{-0.5 + 0.5e^{-0.5x_{t-1}^2}} x_{t-1} + z_t$$

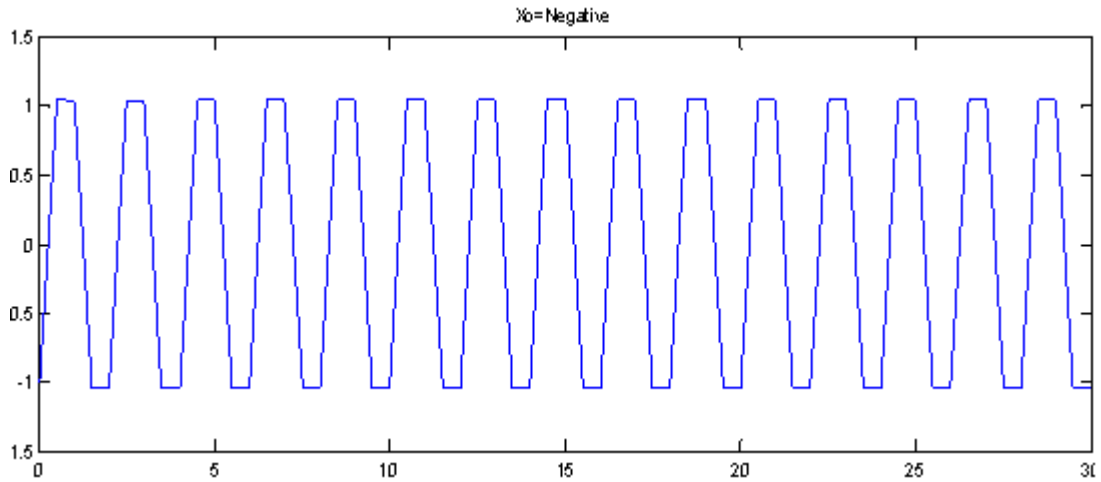
وبالرجوع إلى الفقرة (3-7) نجد أن شرط الاستقرارية لهذا الأنموذج هو

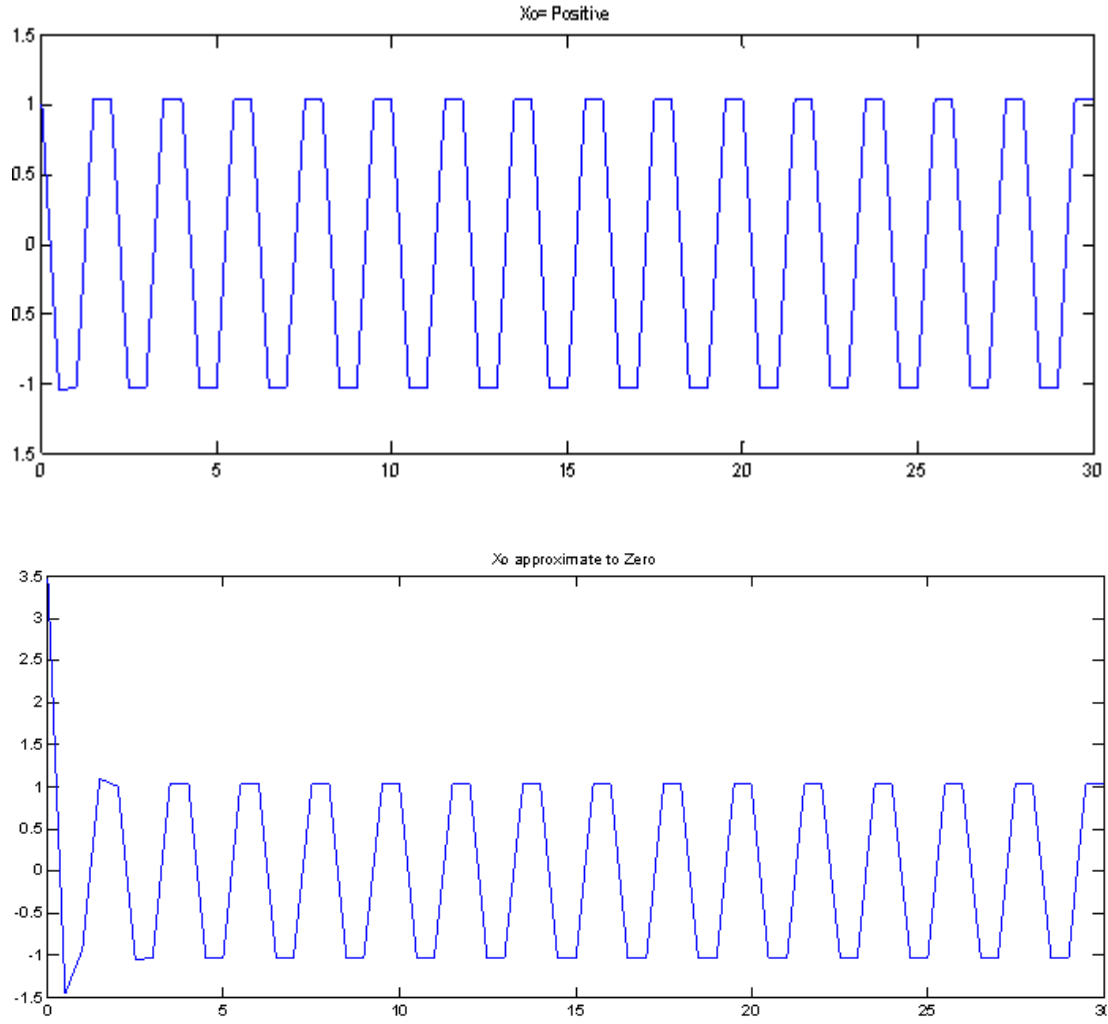
$$0 < \left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \phi) - \pi_1}{\theta_1} \right] < 1$$

وان شرط الاستقرارية يكون 0.130845

بما أن  $0.130845 < 1$  فإن الأنموذج مستقر .

والأشكال الآتية تبين استقرارية الأنموذج وبفرض قيم أولية (Initial Value) مختلفة.





الشكل - 1

نلاحظ من الأشكال أعلاه أنّ السلسلة المولدة من الأنموذج لا تعتمد على الشرط الابتدائي، وأن المسارات تقترب من دورة النهاية.

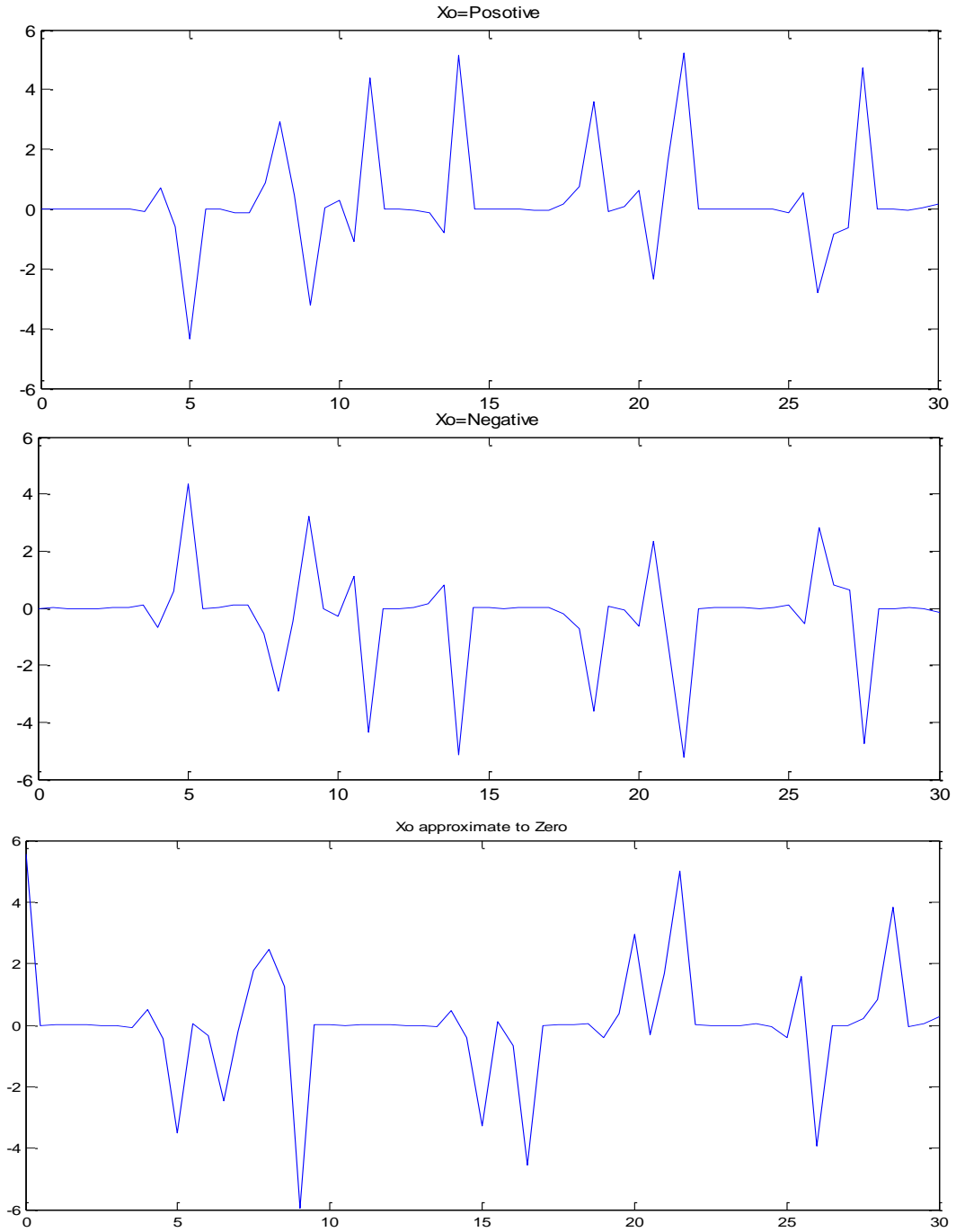
**4-2 مثال:** ليكن لدينا الأنموذج الآتي:  $X_t = +z_t x_{t-1} \frac{0.5 * \cos(6.28*3 + 0.2)}{-0.5 + 0.5e^{-0.5x_{t-1}^2}}$

وبالرجوع إلى الفقرة (3-7) نجد أن شرط الاستقرارية لهذا الأنموذج هو

$$0 < \frac{\left[ \frac{\alpha \cos(2\pi w_1 t + \varphi) - \pi_1}{\theta_1} \right]}{\gamma} < 1$$

وأن شرط الاستقرارية يكون 3.890583

بما أن  $3.8905831 <$  فإن الأنموذج غير مستقر. والأشكال الآتية توضح عدم استقرارية الأنموذج.



**الشكل - 2 -**

نلاحظ من الأشكال أعلاه أن الأنموذج لا يمتلك دورة النهاية.

المصادر

- [1] أبو صالح، محمد صبحي، (2000)، "مقدمة في الطرق الإحصائية"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان الأردن.
- [2] البدراني، ظافر رمضان مطر، (2002)، "دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادية مع إشارة خاصة إلى أسلوب فضاء الحالة والاستقرارية"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.
- [3] المهداوي، هيفاء جعفر، (1991)، "الانحدار الذاتي غير المستقر ذو الدرجات العليا"، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية.
- [4] Chatfield, C., (1984), "The Analysis of Time Series An Introduction", 3rd Ed., J.W. Arrow smith Ltd., Bristol, GB.
- [5] James D.Hamilton, (1994), "Time Series Analysis", Princeton university press. USA.
- [6] Ozaki, T., (1985), "Nonlinear Time Series Models and Dynamical System", E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, M, M.Rao, eds., Handbook of statistics, Vo1.5, PP.25-83.
- [7] Priestley, M.B., (1981), "Spectral Analysis and Time Series", Volume 1, "UNIVARIATESERIES ", Academic Press. Inc. London.