New Hybrid Cutting Plane Method For Solving Integer Linear Programming Problems

Abbas Y. Al-Bayati **Nawar N. Abdullah**
profabbasal-bayati@yahoo.com
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul/Iraq

Received: 22/3/2005 **Accepted: 29/6/2005**

ABSTRACT

This work deals with a new method for solving Integer Linear Programming Problems depending on a previous methods for solving these problems such that Branch and Bound method and Cutting Planes method where this new method is a combination between them and we called it Cut and Branch method, The reasons which led to this combination between Cutting Planes method and Branch and Bound method are to defeat from the drawbacks of both methods and especially the big number of iterations and the long time for the solving and getting of a results between the results of these methods where the Cut and Branch method took the good properties from the both methods.

And this work deals with solving a one problem of Integer Linear Programming Problems by Branch and Bound method and Cutting Planes method and the new method, and we made a programs on the computer for solving ten problems of Integer Linear Programming Problems by these methods then we got a good results and by that, the new method (Cut and Branch) became a good method for solving Integer Linear Programming Problems.

The combination method which we doing in this research opened a big and wide field in solving Integer Linear Programming Problems and finding the best solutions for them where we did the combination method again between the new method (Cut and Branch) and the Cutting Planes method then we got a new method with a very good results and solutions.

Keywords: Integer Linear Programming, Cutting Plane Method, Cut and Branch method.

طريقة تهجينية لقطع المستويات مع طريقة التفرعات في مسائل البرمجة الصحيحة

عباس يونس البياتي **نوار نجم عبد الله**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 22 / 3 / 2005 **تاريخ قبول البحث: 29 / 6 / 2005**

الملخص

يتناول هذا البحث طريقة جديدة في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة بالاعتماد على طرق سابقة في حل هذه المسائل منها طريقة التفرعات والعقد وطريقة قطع المستويات المعروفتين حيث تم في هذه الطريقة الجديدة ربط ما بين تلك الطريقتين وسميناها بطريقة القطع والتفرع.

الأسباب التي أدت إلى الربط ما بين طريقة قطع المستويات وطريقة التفرعات والعقد هي للتغلب على المساوئ من كلا الطريقتين وخاصة عدد التكرارات الكبير والوقت المستغرق الكثير في الحل والحصول على نتائج تقع ما بين نتائج كل من تلك الطريقتين حيث أخذت طريقة القطع والتفرع الصفات الجيدة وجزء بسيط من الصفات السيئة من كلا الطريقتين.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الصحيحة، طريقة قطع المستويات، طريقة القطع والتقرع.

1. المقدمة:

مسألة البرمجة الصحيحة Integer Programming Problem هي إحدى أفرع البرمجة الرياضية Mathematical Programming(MP) حيث أن البرمجة الرياضية تهتم في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة تتكون من عدة متغيرات وتحقق عدداً من القيود (معادلات أو متراجحات عادة) والتي يمكن تمثيلها بالشكل:

$$\text{MP: max (min)}\, f(x);\ x \in S \subseteq R^n$$

حيث أن المجموعة S تسمى بمجموعة القيود (Constraints Set) و f تسمى دالة الهدف (Objective Function) وكل $x \in S$ تسمى بالحل الممكن (Feasible Solution) للبرمجة الرياضية. إذا كان هناك $x^* \in S$ تحقق $\left(-\infty < f\left(x^*\right) < f(x)\right)$ للدالة الصغرى و$\left(f(x) < f\left(x^*\right) < \infty\right)$ للدالة العظمى لكل $x \in S$ فأن x^* تسمى بالحل الأمثل (Optimal Solution) لمسألة البرمجة الرياضية.

مسألة البرمجة الخطية Linear Programming Problem (LPP) هي حالة خاصة من البرمجة الرياضية مع الدالة $f(x)$ تكون دالة خطية و S تكون مجموعة من المتغيرات x تحقق منظومة من المعادلات الخطية $Ax = b$ و $x \geq 0$ ، لذلك مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة البرمجة الرياضية بحيث $S \subseteq R^n \subseteq Z^n$ وإن Z^n هي مجموعة من المتجهات الصحيحة ذات البعد n (أي أن كل متغيرات x مقصورة على أن تكون ذات قيم صحيحة). [4]

مسألة البرمجة الصحيحة Integer Programming Problem تكتب للاختصار (IPP) بدأت في 1958 من قبل العالم (Ralph E. Gomory) وهي مسألة أمثلية لتكبير أو لتصغير قيمة دالة مع متغيرات القرار (Decision variables) تحقق مجموعة من المتراجحات. [2]

يوجد هنالك نوعان أساسيان من مسألة البرمجة الصحيحة وهما:

1- مسألة البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear Programming Problem (ILPP)

2- مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة Integer Nonlinear Programming Problem (INLPP)

والفرق في ما بينهما هو خطية و لاخطية دالة الهدف.

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear Programming Problem (ILPP):

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي مسألة البرمجة الخطية بحيث تكون جميع أو بعض متغيرات القرار مقيدة لتكون ذات قيمة صحيحة، و هناك ثلاثة أنواع من مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:

1- مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة Pure Integer Programming Problem (PIPP):
وهي المسألة التي تكون فيها جميع متغيرات القرار ذات قيمة صحيحة.

2- مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المختلطةMixed Integer Programming Problem (MIPP):
وهي المسألة التي تكون فيها بعض متغيرات القرار ذات قيمة صحيحة و بعضها الآخر ذات قيمة غير صحيحة.

3- مسألة البرمجة الخطية الصحيحة الثنائية Binary Integer Programming Problem (BIPP):
وهي المسألة التي تكون فيها جميع متغيرات القرار ذات قيمة صفر أو واحد. [7]

2. طريقة التفرعات والعقد:

طريقة التفرعات والعقد Branch and Bound method (B.B.) هي تقنية عددية منتظمة لحل مسائل البرمجة الصحيحة (IPP)، هذه الطريقة نشأت من قبل العالمين Land و Doig في عام 1960 وطورت بوساطة العالم Dakin في العام 1965، خوارزمية طريقة التفرعات والعقد على مدى تحسيناتها وتوسعاتها تنتج مجموعة بناءة ومضمونة من الحلول لمسألة البرمجة الصحيحة. [6]

تسمية طريقة التفرعات و العقد جاءت من (التفرع) الذي يحدث على العقد المختارة لنمو أكثر وتكوين العقد الجديدة (الأبناء) من هذه العقدة و(التقيد) الذي يحصل عند حساب القيد على أفضل قيمة تم الحصول عليها من نمو العقد. [1]

2.1 خوارزمية طريقة التفرعات والعقد:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &Maximize\ z = c^T x \\ &Subject\ to\ Ax = b \\ &\qquad\qquad x \ge 0 \\ &\qquad\qquad x_j,\quad j \in I,\ integral \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m \times s$ و b من $m \times 1$ و c من $s \times 1$ و x من $s \times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي) أبدأ بحل المسألة المعطاة في (1) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس (Simplex Method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة، توقف، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (تفرع المتغيرات المختارة) اختر من المتغيرات $x_j, j \in I$ المتغير الذي ليس له قيمة صحيحة عند تلك العقدة، متغير واحد يستخدم لتكوين قيود التفرع، قاعدة بسيطة في ذلك الاختيار هي اختيار المتغير التي تكون قيمته لها أكبر جزء كسري. المتغيرات المختارة x_j يجب أن تكون متغيرات أساسية وإلا قيمتها ستكون صفراً.

افرض إن المتغير الأساسي المختار هو المتغير i من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية وتكون قيمته هي x_{Bi} ، حيث نستطيع كتابتها على الشكل التالي $x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 < f_i < 1$ وبما أن x_j يجب أن تكون لها قيم صحيحة، عندئذ تحقق إما:

$$x_j \le [\, x_{Bi}\,] \qquad (2)$$

أو

$$x_j \ge [\, x_{Bi}\,] + 1 \qquad (3)$$

الخطوة 3: (صياغة العقد الجديدة) اعمل على تكوين مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة متمثلتين بالعقد تحت الوصف في الخطوة 2.

المسألة الأولى متكونة من إضافة القيد (2) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد (3)، حل كل من هاتين المسألتين على أنهما مسائل البرمجة الخطية مستخدما طريقة سمبلكس.

الخطوة 4: (اختبار العقدة النهائية) كل من العقد المتكونة في الخطوة 3 ربما تكون عقدة نهائية لواحد من السببين الآتيين:

1- المسألة عند تلك العقدة ليس لها حل ممكن واذهب إلى الخطوة 5.

2- قيم المتغيرات $x_j, j \in I$ جميعها صحيحة، وبذلك قارن قيمة دالة الهدف عند تلك العقدة مع أفضل قيمة توصلت إليها، إذا كانت قيمة دالة الهدف عند العقدة الجديدة أفضل فغير قيمة العقدة القديمة بهذه العقدة واذهب إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار العقدة)

1- إذا كانت بالضبط عقدة واحدة في الخطوة 4 منتهية، استخدم العقدة غير المنتهية واذهب إلى الخطوة 2.

2- إذا كانت كل العقد في الخطوة 4 غير منتهية، اختر العقدة الأكثر ضمانة للوصول إلى الهدف، وهي العقدة التي تكون عندها دالة الهدف اكبر ما يمكن، اذهب إلى الخطوة 2.

الصفة السلبية الأساسية لهذه الخوارزمية تكمن في حل مسألة البرمجة الخطية كاملة عند كل عقدة وهذا عند المسائل الكبيرة سيأخذ وقت كبير وعدد تكرارات اكبر [5].

2.2 خواص طريقة التفرعات والعقد:

إيجابيات طريقة التفرعات والعقد:

1) الوقت المستغرق في الحل Central Processing Unit (CPU) قليل.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة التجزئة وذلك بتجزئة (تفرع) المتغيرات ذات القيم الحقيقية من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية ونستمر بالتجزئة إلى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على طريقة سمبلكس.

3) طريقة التفرعات والعقد طريقة مضمونة الوصول إلى الهدف.

سلبيات طريقة التفرعات و العقد:

1) عدد التكرارات Number of Iterations (NOI) في الحل كبير وخاصة عند البدء بتفرع قيمة غير كفوءة.

2) يجب الاستمرار بالتفرع حتى ولو حصلنا على الحل إلى حين الحصول على عقد مكررة و خارجة عن المنطقة.

3) عدد العقد المولدة في طريقة التفرعات والعقد ممكن أن يكون عددا كبيرا.

3. طريقة قطع المستويات:

طريقة قطع المستويات Cutting Planes method (C.P.) هي طريقة فريدة من نوعها، وهي الطريقة التقاربية الثانية لحل مسائل البرمجة الصحيحة والتي نشرت في عام 1958 عن طريق العالم Ralph E. Gomory وقد سميت على اسمه Gomory's Cutting Planes method.

الفكرة الأساسية لطريقة قطع المستويات هي إضافة قيد (قاطع) للمسألة مرة تلو الأخرى إلى أن تتكون مسألة البرمجة الخطية مع الحل الأمثل مع القيم الصحيحة.

لهذا القيد خاصتان أساسيتان: الأولى، الحل الأمثل غير الصحيح لمسألة البرمجة الخطية لن يحقق هذا القيد، الثانية، كل الحلول الممكنة الصحيحة للمسألة الأصلية سوف تحقق هذا القيد الجديد. [6]

3.1 خوارزمية طريقة قطع المستويات:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} & Maximize\ z = c^T x \\ & Subject\ to\ Ax = b \\ & \qquad x \geq 0 \\ & \qquad x_j,\quad j \in I,\ \text{integral} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m \times s$ و b من $m \times 1$ و c من $s \times 1$ و x من $s \times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

<u>الخطوة 1</u>: (الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (4) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس (Simplex Method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة، توقف، وإلا اذهب إلى <u>الخطوة 2</u>.

<u>الخطوة 2</u>: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

<u>الخطوة 3</u>: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

$$x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_i\ ,\quad j \in I$$

فان

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \leq 0$$

القيد الجديد

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0 \tag{5}$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} $0 \leq f_{ij} < 1$

$0 \leq f_i < 1$ حيث $f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i

δ متغير منحل جديد ممكن وصحيح.

<u>الخطوة 4</u>: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (5) للجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس وقم بالحل على أنها مسألة البرمجة الخطية، إذا كانت جميع المتغيرات $x_j,\ j \in I$ صحيحة فالمسألة انتهت، وإلا اذهب إلى <u>الخطوة 2</u>.

3.2 خواص طريقة قطع المستويات:

إيجابيات طريقة قطع المستويات:

1) عدد التكرارات NOI قليل.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة القواطع التي يمكن استخراجها من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية حيث يتم قطع منطقة الحل إلى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على طريقة سمبلكس.

سلبيات طريقة قطع المستويات:

1) الوقت المستغرق في الحل CPU كثير.
2) في بعض الأحيان لا نحصل على الحل وخاصة حين البدء بالحل بأحد القواطع غير الكفوءة وبذلك تكون طريقة قطع المستويات غير مضمونة الوصول إلى الهدف.
3) عدد القيود المولدة في طريقة قطع المستويات ممكن أن يكون كبيرا.

4. طريقة القطع والتفرع (الجديدة):

طريقة القطع و التفرع Cut and Branch method (C.B.) هي تقنية ناجحة جدا في حل مجموعة واسعة من مسائل البرمجة الصحيحة وهي توفر ضمانية الوصول إلى الحل الأمثل. وسوف نقوم بتوضيح كيفية أداء هذه التقنية.

مساحة خوارزمية طريقة القطع والتفرع مستمرة التطور وهي واعدة بان تكون ذات أهمية أكبر مع استغلال سرعة الحاسوب.

عدد كبير من مسائل البرمجة الخطية الصحيحة ممكن حلها بوساطة طريقة القطع والتفرع والتي تكون خوارزميتها متكونة بالضبط من (التركيب ما بين طريقة قطع المستويات وطريقة التفرعات والعقد) وهي تعمل كسابقتها في حل سلسلة (متتابعة) من مسائل البرمجة الخطية للحصول على حل مسألة البرمجة الصحيحة.

طريقة قطع المستويات التي تم توضيحها في الفصل السابق لا تظهر طريقة قوية مؤدية إلى تقارب بطيء وربما لا تؤدي إلى الحل الأمثل كما في طريقة التفرعات والعقد التي تكون أكثر سرعة وضمانة للوصول إلى الحل الأمثل لذلك حاولنا جعل طريقة قطع المستويات أفضل من السابق بوساطة طريقة التفرعات والعقد والتي أسميناها بطريقة القطع والتفرع.

4.1 خوارزمية طريقة القطع والتفرع:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &Maximize\ z = c^T x \\ &Subject\ to\ Ax = b \\ &\qquad x \ge 0 \\ &\qquad x_j,\quad j \in I,\ \text{integral} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m \times s$ و b من $m \times 1$ و c من $s \times 1$ و x من $s \times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (6) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس (Simplex Method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة، توقف، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.
الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.
الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

فان $x_{Bi}+\sum_{j} a_{ij}x_j = b_i \;,\;\; j\in I$

$$x_{Bi}+\sum_{j}([a_{ij}]+f_{ij})x_j=[b_i]+f_i$$

$$x_{Bi}+\sum_{j}[a_{ij}]x_j-[b_i]=f_i-\sum_{j}f_{ij}x_j\le 0$$

القيد الجديد

$$f_i-\sum_{j}f_{ij}x_j+\delta=0 \qquad (7)$$

حيث $f_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} $0\le f_{ij}<1$

$0\le f_i<1$ حيث $f_i=b_i-[b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i

δ متغير منحل جديد ممكن وصحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (7) إلى الجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس لمسألة البرمجة الخطية وحلها على أنها مسألة البرمجة الخطية، إذا كانت:

1- المتغيرات $x_j, j\in I$ ذات قيم صحيحة ممكنة فان المسألة انتهت. وإلا اذهب إلى 2 .

2- متغيرات $x_j, j\in I$ ذات قيم غير صحيحة فاذهب إلى الخطوة 2. وإلا اذهب إلى 3.

3- متغير واحد من المتغيرات $x_j, j\in I$ له قيمة صحيحة وبذلك ابدأ باستخدام طريقة التفرعات والعقد لتفرع المتغير غير الصحيح أي اذهب إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتغير المتفرع) اختر المتغير ذا القيمة غير الصحيحة من $x_j, j\in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.

المتغير x_j المختار يجب أن يكون متغيرا أساسيا وإلا ستكون قيمته صفرا. افرض أن المتغير هو المتغير الأساسي i من الجدول الأخير لحل طريقة سمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} . سوف نكتب $x_{Bi}=[x_{Bi}]+f_i$ حيث $0<f_i<1$. بما أن المتغير x_j قيمة صحيحة. فيجب أن يحقق إما:

$$x_j\le [\,x_{Bi}\,] \qquad (8)$$

أو

$$x_j\ge [\,x_{Bi}\,]+1 \qquad (9)$$

الخطوة 6: (صيغة العقدة الجديدة) كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في الخطوة 5. مسألة واحدة متكونة من إضافة القيد (8) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد (9) وحل كل من هاتين المسألتين على أنهما مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلكس.

الخطوة 7: (اختبر العقدة المنتهية) كل عقدة من العقد المتكونة في الخطوة 6 ما تكون عقدة منتهية لسبب واحد من الأسباب الآتية، أولا، المسألة المتمثلة بهذه العقدة ليس لها حل ممكن، ثانيا، قيمة المتغيرات $x_j, j\in I$ جميعها صحيحة وهذا هو الحل الأمثل للمسألة (6). أما إذا كانت تلك العقدة غير منتهية فأرجع إلى الخطوة 5.

4.2 خوارزمية ثانية إلى طريقة القطع والتفرع (طريقة القطع والتفرع والقطع):

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &Maximize\ z = c^T x \\ &Subject\ to\ Ax = b \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \\ &\qquad\qquad x_j,\quad j \in I,\ \text{integral} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m \times s$ و b من $m \times 1$ و c من $s \times 1$ و x من $s \times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (10) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس (Simplex method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة، توقف، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

$$x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_i \ , \quad j \in I$$

فان

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \leq 0$$

القيد الجديد

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0 \qquad (11)$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} $0 \leq f_{ij} < 1$

$0 \leq f_i < 1$ حيث $f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i

δ متغير منحل جديد ممكن و صحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (11) إلى الجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس لمسألة البرمجة الخطية وحلها على أنها مسألة البرمجة الخطية، إذا كانت:

1- كل المتغيرات $x_j, j \in I$ ذات قيم صحيحة ممكنة فان المسألة انتهت. وإلا اذهب إلى 2.

2- كل المتغيرات $x_j, j \in I$ ذات قيم غير صحيحة فاذهب إلى الخطوة 2. وإلا اذهب إلى 3.

3- متغير واحد من المتغيرات $x_j, j \in I$ له قيمة صحيحة وبذلك ابدأ باستخدام طريقة التفرعات والعقد لتفرع المتغير غير الصحيح أي اذهب إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتغير المتفرع) اختر المتغير ذا القيمة غير الصحيحة من $x_j, j \in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.

المتغير x_j المختار يجب أن يكون متغيرا أساسيا وإلا ستكون قيمته صفرا. افرض أن المتغير هو المتغير الأساسي i من الجدول الأخير لحل طريقة سمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} . سوف نكتب $x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 < f_i < 1$. بما أن المتغير x_j قيمة صحيحة. فيجب أن يحقق إما:

$$x_j \le [\, x_{Bi} \,] \tag{12}$$

أو

$$x_j \ge [\, x_{Bi} \,] + 1 \tag{13}$$

<u>الخطوة 6</u>: (صيغة العقدة الجديدة) كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في <u>الخطوة 5</u>. مسألة واحدة متكونة من إضافة القيد (12) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد (13) وحل كل من هاتين المسألتين على أنهما مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلكس. إذا كانت :

1- كل المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة ممكنة فالمسألة (10) انتهت لقد حصلنا على الحل الأمثل وإلا اذهب إلى 2:

2- الحل غير ممكن أي خارج منطقة الحل عندها توقف وخذ عقدة أخرى وإلا اذهب إلى 3:

3- أحد المتغيرات $x_j, j \in I$ له قيمة صحيحة عندها ابدأ باستخدام <u>طريقة قطع المستويات</u> كما في <u>الخطوة 3</u> أعلاه على المتغير غير الصحيح في كل من العقدتين الناتجتين من <u>طريقة التفرعات والعقد</u> عندها سوف نحصل على الحلّين الآتيين من كل عقدة:

1− الحل الأمثل الممكن (Optimal Solution) للمسألة (10).

2− الحل غير ممكن (Infeasible Solution) عندها توقف.

4.3 خواص طريقة القطع والتفرع:

1) عدد التكرارات NOI قليل (ما بين عدد تكرارات كل من طريقة قطع المستويات والتفرعات والعقد).

2) الوقت المستغرق في الحل CPU قليل (ما بين الوقت المستغرق في حل كل من طريقة قطع المستويات والتفرعات والعقد).

3) يتم الحصول على الحل أولا بوساطة القواطع التي يمكن استخراجها من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية ثم بعد ذلك بتجزئة (تفرع) المتغيرات ذات القيم الحقيقية ونستمر بالتجزئة إلى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على طريقة سمبلكس.

4) أصبحت طريقة مضمونة الوصول إلى الهدف لأنها تنتهي بالحل بطريقة التفرعات والعقد.

5. النتائج العددية والعمل المستقبلي:

5.1 النتائج العددية:

في هذه البحث تم اختيار عشرة مسائل [3] من البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة وحلها بالحاسوب لأجل ملاحظة مدى دقة النتائج ونجاح طريقة الحل الجديدة وهذه المسائل هي كالآتي:

الجدول (1).

E x a m p l e s		dBranch and Boun		sCutting Plane		WN E	
		IN O	UC P)(sec	IN O	)CPU (sec	IN O	CPU (sec)
$Q1$	$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$ *Subject to* $5x_1 + 4x_2 \le 21$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	4	40 . 2	3	60 . 2	3	60 . 4
$Q2$	$Max Z = 10x_1 + x_2$ *Subject to* $2x_1 + 5x_2 \le 11$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	4	20 . 2	2	80 . 3	3	90 . 2
$Q3$	$Max Z = 4x_1 + 3x_2$ *S u b j e c t t o* $3x_1 + 2x_2 \le 18$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	2	10 . 1	1	2. 3 0	1	00 . 2
$Q4$	$Max\ Z = 120x_1 + 80x_2$ *Subject to* $2x_1 + x_2 \le 6$ $7x_1 + 8x_2 \le 28$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	7	30 . 3	4	00 . 9	5	00 . 7
$Q5$	$Max\ Z = 5x_1 + 8x_2$ *Subject to* $x_1 + x_2 \le 6$ $5x_1 + 9x_2 \le 45$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	8	70 . 3	3	70 . 8	3	50 . 6
$Q6$	$Max\ Z = 3x_1 + x_2$ *Subject to* $x_1 + 2x_2 \le 8$ $3x_1 - 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	9	90 . 4	4	31 . 0	5	40 . 7
$Q7$	$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$ *Subject to* $2x_1 + x_2 \le 11$ $-x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	7	10 . 3	4	80 . 9	6	70 . 7
$Q8$	$Max\ Z = 6x_1 + 7x_2$ *Subject to* $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 4$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0,\ integers$	9	20 . 7	2	71 . 0	3	40 . 8

$Q9$	$Max\ Z = x_1 + 9x_2 + x_3$ $Subject\ to$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0, integers$	**5**	**80.3**	**2**	**50.8**	**3**	**60 . 5**
$Q10$	$Max\ Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ $Subject\ to$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 \le -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0, integers$	**2**	**10.3**	**1**	**60.6**	**1**	**90 . 4**
	Total	75	**83.4**	62	**87.6**	33	**05 . 7**

Performance percentage of improving the new algorithm compared with the two other standards

Tools	NEW	Branch and Bound	Cutting Planes
NOI	**100%**	**172.72%**	**78.79%**
CPU	**100%**	**61.05%**	**134.73%**

من جدول النسبة المئوية السابق نلاحظ تحقق الصفات 1 و2 من صفات طريقة القطع والتفرع:

عدد تكرارات طريقة التفرعات والعقد NOI of Cutting and Bound $\le$ عدد تكرارات طريقة القطع والتفرع NOI of Cut and Branch $\le$ عدد تكرارات طريقة قطع المستويات NOI of Cutting Planes

الوقت المستغرق لطريقة التفرعات والعقد CPU of Cutting and Bound $\ge$ الوقت المستغرق لطريقة القطع والتفرع CPU of Cut and Branch $\ge$ الوقت المستغرق لطريقة قطع المستويات CPU of Cutting Planes

5.2 العمل المستقبلي:

من هذا العمل نستنتج انه يمكن تركيب طريقتين للحصول على طريقة ثالثة ذات نتائج أفضل، فمن الممكن ربط طريقة قطع المستويات وطريقة التفرعات والعقد أكثر من مرة كما لاحظنا في الفقرة 4.2 حيث تم الربط مرة أخرى بقطع المستويات أي حصلنا على (قطع وتفرع وقطع) فانتهى الناتج إلى حلين، حل خارج عن المنطقة (غير ممكن) (Infeasible Solution) وحل أمثل للمسألة (Optimal Solution) فأصبح هذا التركيب الثلاثي الجديد تركيباً جيد جداً حيث أخذ الصفات الجيدة ما بين الطريقة الجديدة (القطع والتفرع) وطريقة قطع المستويات وهذا يفتح مستقبلا مجالا جديدا وواسعا في مسائل البرمجة الخطية الصحيحة (المطلقة والمختلطة) وإيجاد أفضل الحلول لها.

المصادر

[1] Chinneck, J. W. (2003): *Practical optimization: A Gentle Introduction*, Chapter12, pp.2-3, [http://www.sce.carleton.ca/faculty/ chinneck/po.html].

[2] Eudoxus System Ltd. (2003): *Practical integer programming*, Perth House Leighton Buzzard LU7 2RN UK, [http://www.eudoxus.com/lect5.pdf.].

[3] Gomory, R. E. (1973): *An all-integer programming algorithm*, Rand report, R.M. 25797, New York, Chapter 3, pp.46-66.

[4] Grafinkel, R. S. and Nemhauser, G. L. (2003): *Integer programming*, MATH3902 operation researches II, Chapter 1, pp.1-5.

[5] Taha, H. A. (1979): *Operations research an introduction*, Macmillan, New York, USA. Chapter 8, p.258.

[6] Thie, P. R. (1979): *An introduction to linear programming and game theory*, John Wiley Press, New York, USA, Chapter 6, p.187.

[7] Villalobos, J. R.; Hogg, G. L. and Griffin, P. M. (2002): *Introduction to integer programming*. Arizona state University and George institute of technology, pp.4-7.