On MLGP- Rings

Raida D.mahmood **Ebtehal S. Mageed**
raida.1961@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

ABSTRACT

An ideal K of a ring R is called right (left) generalized pure (GP-ideal)if for every $a \in K$, there exists $m \in Z^+$, and $b \in K$ such that $a^m = a^m\ b$ ($a^m = b\ a^m$) . A ring R is called $MLGP$- ring if every right maximal ideal is left GP- ideal . In this paper have been studied some new properties of $MLGP$- rings and the relation between this rings and strongly π- regular rings some of the main result of the present work are as follows:

1- Let R be a local , $MLGP$ and SXM ring . Then :
   (a) $J(R) = 0$.
   (b) If R is NJ- ring . Then $r(a^m)$ is a direct sum and for all $\in R$, $m \in Z^+$.
2 - Let R be a local , SXM and NJ- ring . Then R is strongly π- regular if and only if R i LGP .

Keywords: NJ Rings , SXM rings ,local strongly regular rings ,pure ideals

حول الحلقات من النمط -MLGP

رائدة داؤد محمود ***إبتهال صباح مجيد***

قسم الرياضيات

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2019\06\18 **تاريخ قبول البحث: 2019\06\30**

الملخص

يقال للمثالي K في الحلقة R ، بأنه مثالي نقي معمم أيمن (أيسر) و اختصاراً من النمط ـ GP إذا كان لكل $a \in K$ يوجد عدد صحيح موجب m و $b \in K$ بحيث إنَ $a^m = a^m\ b$ ($a^m = b\ a^m$) . يقال للحلقة R بأنها حلقة من النمط ـ $MLGP$ إذا كان كل مثالي أعظمي أيمن هو مثالي من النمط ـ GP أيسر . قدمنا في هذا البحث الحلقات من النمط ـ $MLGP$ و بعض الخواص الأساسية و علاقتها مع الحلقات المنتظمة بقوة من النمط ـ π . و من أبرز النتائج التي حصلنا عليها :

(1) لتكن R حلقة محلية من النمط ـ SXM و LGP . فإنَ :

(a) $J(R) = 0$.

(b) إذا كانت R حلقة من النمط ـ NJ ، فإنَ $r(a^m)$ مركبة جمع مباشر لكل $a \in R$ و m عدد صحيح موجب .

(2) لتكن R حلقة محلية من النمط ـ NJ و XM . فإنَ R حلقة منتظمة بقوة من النمط ـ π إذا و فقط إذا كانت R حلقة من النمط ـ $MLGP$.

الكلمات المفتاحية: حلقات NJ ، حلقات SXM ، حلقات محلية منتظمة بقوة ، مثاليات نقية.

1.المقدمة Introduction

في هذا البحث كل حلقة R تجميعية بعنصر محايد . يقال للمثالي K في الحلقة R بأنه مثالي من النمط ـ GP أيمن (أيسر) إذا كان لكل $a \in K$ يوجد $b \in K$ و m عدد صحيح موجب بحيث أنَ $a^m =$ $a^m b$($a^m = b\, a^m$) [5] , [6] . و هو تعميم لمفهوم المثاليات النقية . نحن قدمنا في هذا البحث مفهوم الحلقات من النمط ـ $MLGP$ ، التي تعرف : يقال للحلقة Rبأنها حلقة من النمط ـ $MLGP$ ، إذا كان كل مثالي مثالي أعظمي أيمن هو مثالي من النمط ـ GP أيسر . أعطيت خواص لهذه الحلقات و علاقتها مع الحلقات الأخرى . لكل $x \in R$ ، $r(x)$ ($l(x)$) يرمز إلى التآلف الأيمن (الأيسر) ل x و يستخدم $N(R)$ و $J(R)$ ($Z(R), Y(R)$) رمز مجموعة العناصر المعدومة القوى ، و جذر جاكوبسون و المثالي المنفرد الأيمن (الأيسر) على التوالي .

يقال للحلقة R بأنها من النمط ـ NJ ، إذا كان $N(R) \subseteq J(R)$ [3] و يطلق على الحلقة R :

(1) من النمط ـ SXM يمنى (يسرى) ، إذا كان لكل $a \in R$ ،فإنَ $r(a) = r(a^n)$ [$l(a) = l(a^n)$] لكل عدد صحيح موجب n يحقق $a^n \neq 0$. [7]

(2) منتظمة بقوة من النمط ـ π ، إذا كان لكل $a \in R$ يوجد $b \in R$ وعدد صحيح موجب n بحيث إنَ ($a^n = a^{2n}\, b$) . [5]

(3) محلية ،إذا كانت تحتوي على مثالي أعظمي وحيد . [2]

(4) حلقة من النمط ـNI إذا كان $N(R)$ هو مثالي .

(5) مختزلة إذا كان $N(R) = 0$.

2.الحلقات من النمط ـ $MLGP$

ندرس في هذا البند المثاليات من النمط ـ GP و الحلقات من النمط ـ $MLGP$ و بعضاً من خواصها الأساسية وعلاقتها مع الحلقات المنتظمة بقوة من النمط ـ π .

مبرهنة 2.1 :

لتكن R حلقة إبدالية ، فإن التقاطع المنتهي للمثاليات من النمط ـ GP هو مثالي من النمط ـ GP.

البرهان : نبرهن بالاستقراء الرياضي على m . إذا كانت m=2 ، نفرض I و J مثاليان من النمط ـGP .

(القضية 3.1.4 [5]) ، فإن $I \cap J$ مثالي من النمط ـ GP . نفترض أن القضية صحيحة ل m من المثاليات من النمط ـ GP . الآن يجب أن نبرهن أنها صحيحة ل m+1 من المثاليات من النمط ـ GP .

ليكن $J =\cap_{k=1}^{m+1} (I_k) =\cap_{k=1}^{m} (I_k) \cap I_{m+1}$ من فرضية أن $\bigcap_{k=1}^{m} I_k$ مثالي من النمط$-GP$ ومن فرضية الأولى بأن تقاطع مثاليين من النمط ـGP هو مثالي من النمط ـ GP ، ومن خاصية الاستقراء الرياضي فإن التقاطع لأي عائلة منتهية من المثاليات من النمط ـ GP يكون مثالي من النمط ـ GP . ■

مبرهنة 2.2 :

لتكن R حلقة من النمط ـ NJ ، و كل مثالي رئيس هو مثالي أيمن من النمط ـ GP ، فإن $J(R) = N(R)$.

البرهان : نفترض أن $0 \neq x \in J(R)$ ، فإن xR مثالي من النمط ـ GP . إذا يوجد $y \in xR$ و عدد صحيح موجب n ، بحيث إن لبعض $a \in R$ ، $x^n = x^n y = x^n xa$ وهذا يؤدي إلى $x^n(1 - xa) = 0$ لذلك فإن $(1 - xa)$ له معكوس ، و بالتالي يوجد على الأقل عنصر $v \in R$ بحيث إن $(1 - x\,a)\,v = 1$. بضرب الطرفين من اليسار ب x^n فنحصل على $(x^n - x^n xa)v = x^n$ اي أنَ $x^n = 0$ لذلك $x \in N(R)$ أي أن $J(R) \subseteq N(R)$ وبما أنَ R حلقة من النمط ـ NJ ، فإنَ $J(R) = N(R)$. ■

قضية 2.3 :

لتكن R حلقة حيث إن كل مثالي رئيس فيها هو مثالي من النمط ـ GP أيمن ، فإن العبارات الآتية متكافئة :

(1) R حلقة مختزلة .

(2) R متناظرة بضعف .

(3) $N(R) = J(R)$.

(4) R حلقة من النمط ـ NI .

(5) لكل $a \in N(R)$ فإن Ra مثالي معدوم .

(6) $R/J(R)$ حلقة من النمط ـ NJ .

(7) R حلقة من النمط ـ NJ .

البرهان : واضح (1)←(2) و (3)←(2) ، بما أن $N(R) = J(R)$ فإن R حلقة من النمط ـ NI وبالتالي R حلقة متناظرة بضعف حسب القضية [مبرهنة 2.10 و 1] . (1)←(3) حسب . (3)←(4) و (4)←(5) البرهان واضح . (6) ← (7) حسب القضية الآتية [قضية 1.3 , 3] . (7)←(3) حسب المبرهنة 2.2 . ■

الآن نعطي التعريف الآتي :

تعريف 2.4 :

يقال للحلقة R بأنها حلقة من النمط ـ $MLGP$ إذا كان كل مثالي أعظمي أيمن هو مثالي من النمط ـ GP أيسر .

مثال : لتكن $R = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in Z_2\right\}$ حلقة فإنَ $I = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

مثالي أعظمي أيمن وهو مثالي من النمط ـ GP أيسر ، بالتالي فإن R حلقة من النمط ـ $MLGP$.

قضية 2.5 :

لتكن R حلقة محلية من النمط ـ SX و $MLGP$ فإنَ :

(1) $J(R) = 0$.

(2) إذا كانت R حلقة من النمط ـ NJ ، فإنَ $r(a^n)$ مركبة جمع مباشر لكل $a \in R$ و n عدد صحيح موجب .

البرهان : (1) بما أن R حلقة محلية ، $J(R)$ هو مثالي أعظمي أيمن وحيد في R [4] أي أن $J(R)$ مثالي من النمط ـ GP بالتالي فإن لكل $a \in J(R)$ يوجد n عدد صحيح موجب و $b \in J(R)$ بحيث إن $a^n = ba^n$.
بما أن $b \in J(R)$ فإن $(1-b)$ لها معكوساً أي إن $(1-b)u = 1$ وإن $u(1-b)a = a$ وهذا يؤدي إلى $a = 0$ لذلك فإن $J(R) = 0$.

(2) لكل $a \in R$ و n عدد صحيح موجب ، نفترض أن $a^n\,R + r(a^n) = R$ إذا كان $a^n\,R + r(a^n) \neq R$فإنه يوجد مثالي أعظمي أيمن M بحيث إنَ $a^n\,R + r(a^n) \subseteq M$بما أنَ R حلقة من النمط ـ $MLGP$ فإن M مثالي من النمط ـ GP أيسر لهذا يوجد $x \in M$ وعدد صحيح موجب n بحيث إنَ $a^n = x\,a^n$ و هكذا نحصل على $(1-x) \in l(a^n) = r(a^n) \subseteq M$ وهذا يؤدي $M1 \in$ ، وهذا تناقض إذاً $a^n\,R + r(a^n) = R$ بما أن R حلقة مختزلة (قضية مساعدة 3.1.2 , [5])

فإن $a^nR \;\cap r(a^n) = 0$ لهذا فإن $r(a^n)$ مركبة جمع مباشر لكل $a \in R$ و n عدد صحيح موجب . ■

نتيجة 2.6 :

لتكن R حلقة محلية من النمط ـ SXM ، NJ و $MLGP$ ، فإن

(1) R حلقة مختزلة .

(2) $Y(R) = Z(R) = 0$.

البرهان : (1) حسب القضية (2.5) فإن $J(R) = 0$ و $N(R) \subseteq J(R)$ (القضية 1.3,[3]) فإن R حلقة مختزلة . (2) من (1) نحصل $Y(R) = Z(R) = 0$. ■

من الواضح أنَ كل حلقة منتظمة بقوة من النمط ـ π هي حلقة من النمط ـ $MLGP$ ، لكن العكس غير صحيح . المبرهنة الآتية تعطي الشرط الكافي في الحلقة $MLGP$ لتكون حلقة منتظمة بقوة من النمط ـ π .

مبرهنة 2.7 :

لتكن R حلقة محلية من النمط ـ NJ و SXM . فإن R حلقة منتظمة بقوة من النمط ـ π إذا وفقط إذا كانت R حلقة من النمط ـ $MLGP$.

البرهان : نفترض أنَ لكل $a \in R$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث إنَ $a^n\,R + r(a^n) \neq R$ إذاً يوجد مثالي أعظمي أيمن M . بحيث إنَ $a^n\,R + r(a^n) \subseteq M$ بما أن R حلقة من النمط ـ $MLGP$ فإنَ M مثالي

من النمط ـ GP أيسر لذلك يوجد $x \in M$ و m عدد صحيح موجب بحيث إنَ $(a^n)^m = x\,(a^n)^m$ وهذا يؤدي إلى أن (R مختزلة) $(1-x) \in l(a^{nm}) = r(a^n) \subseteq M$ إذاً $M1 \in$ وهذا تناقض .

لذلك فإنَ $a^n R + r(a^n) = R$ بصورة عامة $a^n d + c = 1$ لبعض $d \in R$ و $c \in r(a^n)$ ، لذلك فإن $a^{2n} d = a^n$ وهذا يؤدي إلى أَنَ R حلقة منتظمة بقوة من النمط ـ π . العكس : البرهان واضح . ■

يقال للحلقة R شبه إبدالية بضعف إذا كان $a\,b = 0$ فإنَ $a\,R\,b \subseteq N(R)$ لكل $a, b \in R$. [1]

المبرهنة الآتية تبين متى تكون الحلقة الشبه إبدالية بضعف حلقة مختزلة .

مبرهنة 2.8 :

لتكن R حلقة محلية من النمط ـ SXM و $MLGP$ ، فإن R حلقة شبه إبدالية بضعف إذا وفقط إذا كانت R حلقة مختزلة .

البرهان : نفترض أنَ R حلقة غير مختزلة عند ذلك يوجد $a \in R \neq 0$ بحيث إنَ $a^2 = 0$ إذاً لكل $r \in R$ فإن $r\,a\,a = 0$ ومنها نحصل على $r\,a\,r\,a \in N(R)$ وهذا يؤدي إلى أن $R\,a$ مثالي أيسر معدوم في R أي إن $R\,a \subseteq J(R) = 0$ لذلك فإن $a = 0$ ومنها نحصل على إن R حلقة مختزلة . العكس : البرهان واضح . ■

المصادر

[1] Abdullah , H. Handan , K. and Bureu , U. (2018), " On Weak symmetric property of rings" , Sou . Asian , Bull . of Math . 42 , pp 31 – 40 .

[2] *Burton* , D.M. (1970) ; "***AFirstcourseinRingsandideals***", *AddisonWeslypublishing* .

[3] Chang ,L. and Soo, Y. p. (2018) " When nilpotents are contanined in Jacobson radicals " J . Korean . Math . Soc . 55 , No .5, pp , 1193-1205 .

[4] Hazewinkel , M . , Gubareni , N . and Kiriehenko V. V. , (2004) , " Algebras , Rings and Modules " Vol .1 Kluwer Academic publishers .

[5] *Mahmood* , *R. D.* (2000) , "***Onpureidealsandpuresubmodule*** When nilpotents are contanined in Jacobson radicals " , *Ph .D.* , *Thesis* , *Mosuluniversity* .

[6] Mahmood , R. D. and Mahmood , A. B. (2008), " Maximal generalization of pure ideals " Raf . J . of comp . and Math , Vol . 5 , N1 , pp, 21 – 27.

[7] Wei , J. C. (2007) , " On simple singular YJ-injective modules " , Sou. Asian Bull . Of Math. 31, pp.1-10 .