Studying the Bessell Equation of Complex Order

Thair Y. Thanoon **Omar Thaher shalal**
thairthanoon@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 07/01/2019 **Accepted on: 28/03/2019**

ABSTRACT

In this paper we derive Bessel equation of complex order $(\mathrm{n}+\mathrm{i})$, after that generalized recurrence relations from Bessel equation of order (n) to Bessel equation of complex order $(\mathrm{n}+\mathrm{i})$ and will satisfy that . We given illustrates example of different cases .

Keywords: Bessell equation, complex order.

دراسة معادلة بيسل من الرتبة العقدية

ثائر يونس ذنون
قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

عمر ظاهر شلال
مديرية تربية نينوى
الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2019\01\07 **تاريخ قبول البحث: 2019\03\28**

الملخص

في هذا البحث اشتقت معادلة بيسل من الرتبة العقدية$(n+i)$. بعد ذلك عممت علاقات المعاودة (الإرجاع) من معادلة بيسل من الرتبة (n) الى معادلة بيسل ذات الرتبة العقدية $(n+i)$ وحققت ، أعطيت أمثلة توضيحية للحالات المختلفة .

الكلمات المفتاحية: معادلة بيسل، الرتبة العقدية.

1. المقدمة Introduction

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والمعاملات المتغيرة التالية

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad , \qquad n\geq 0 \qquad \dots (1.1)$$

تعرف (1.1) بمعادلة بيسل من الرتبة n (Bessels equation of order n) وتظهر هذه المعادلة كثيراً في الرياضيات التطبيقية ومسائل الفيزياء والهندسة. وأي حل يحقق هذه المعادلة يسمى بدالة بيسل (Bessel functions) من الرتبة n . عند حل هذه المعادلة إذا كانت قيمة n عدداً صحيحاً فإن الحل العام يكون بالصيغة الآتية:

$$y(x)=c_1\,J_n(x)+c_2\,y_n(x) \qquad \dots (1.2)$$

إذ إن $J_n(x)$, $y_n(x)$ هي دوال بيسل من النوع الأول والثاني على التوالي وإن c_1 , c_2 هي ثوابت اختيارية وإن:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad \dots (1.3)$$

$$y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi}\left[J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)\right] \quad \dots (1.4)$$

أما اذا كانت n عدداً غير صحيحا فإن الحل العام يكون بالصيغة الآتية:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x)$$

إذ إن $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ هي دوال بيسل من النوع الأول من الرتبة n , $-n$ على التوالي وإن c_1 , c_2 هي ثوابت اختيارية وإن

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad \dots (1.5)$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \quad \dots (1.6)$$

برنولي أول من أعطى مفهوم دالة بيسل في سنة (1732) إذ استخدم الدالة من الرتبة الصفرية حلاً لمسألة تذبذب سلسلة معلقة من طرف واحد , وبعد ذلك قدم العالم الفرنسي ويليم بيسل(1784−1846) تعميم هذه المعادلة إذ استخدمها رياضيون آخرون مثل أويلر واللورد(Rayleigh) ....الخ .

نوقشت معادلة بيسل في حالات عديدة مثلاً من الرتبة الصفرية ،الرتبة $\frac{1}{2}$ ،الرتبة 1 ،الرتبة التكاملية ،وتم الحصول على الحلول لهذه الحالات ([3], [4], [7], [8], [9], [11]) . .

ستتلخص دراستنا في هذا البحث على الحالة التي يكون فيها n عدداً غير صحيح , إذ تتم الدراسة على معادلة بيسل من الرتبة العقدية $(n+i)$ ودراسة بعض خصائصها .

تعريف (1.1): النقطة الشاذه النظامية (Regular singular point) [2] .

اذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

فأذا كانت كل من $p_1(x)$ و $p_2(x)$ هي دوال ليست تحليلية عند النقطة x_0 فإن هذه النقطة تسمى نقطة شاذة (Singular point) للمعادلة التفاضلية . أما إذا كانت الدوال $(x-x_0)p_1(x)$ و $(x-x_0)^2p_2(x)$ هي دوال تحليلية عند النقطة x_0 فإن هذه النقطة تسمى نقطة شاذة نظامية (Regular singular point) للمعادلة التفاضلية أما إذا كانت إحداهما أو كلاهما ليست دوالاً تحليلية عند النقطة x_0 فإن هذه النقطة تسمى نقطة شاذة غير نظامية (irregular singular point) .

تعريف (1.2): دالة كاما (Gamma Function) [1] :تعرف بأنها

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

التي تقترب عندما $n > 0$. وهنالك أيضاً صيغة أخرى

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

كما وتعرف أيضاً بدالة المضروب أي أن

$$\Gamma(n+1) = n!$$

تعريف (1.3): محدد رونسكيان (wronskian) .[8]

إذا كانت $y_2(x)\,, y_1(x)$ دوالاً ذات قيمة حقيقية أو عقدية فإن محدد رونسكيان يساوي

$$w(\,y_1(x)\,,y_2(x)\,) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y`_1 & y`_2 \end{vmatrix} = y_1\,y`_2 - y_2\,y`_1$$

إذا كانت $w(\,y_1(x)\,,y_2(x)\,) = 0$ فإن الحلين معتمدان خطياً أما إذا كانت $w(\,y_1(x)\,,y_2(x)\,) \neq 0$ فإن الحلين مستقلان خطياً .

2- حل معادلة بيسل من الرتبة العقدية بطريقة متسلسلات القوى.

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والمعاملات المتغيرة الآتية:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - (n+i)^2)y = 0 \qquad , n \geq 0 \qquad \dots (2.1)$$

معادلة بيسل من الرتبة $(n+i)$. النقطة $x = 0$ نقطة شاذة نظامية (Regular singular point) . نبدأ حل معادلة (2.1) بطريقة فروبينيوس (Frobenus method) بفرض أن

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots) \quad , \qquad m > 0 \qquad \dots(2.2)$$

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,x^{m+r} \qquad , \qquad a_r \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)\,x^{m+r-1} \qquad \dots(2.3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)(m+r-1)\,x^{m+r-2} \qquad \dots(2.4)$$

نعوض المعادلة (2.2) والمعادلة (2.3) والمعادلة (2.4) في المعادلة (2.1) فنحصل على

$$x^2\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)(m+r-1)\,x^{m+r-2} + x\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)\,x^{m+r-1} + (x^2 - (n+i)^2)\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)(m+r-1)\,x^{m+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)\,x^{m+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,x^{m+r+2} - (n+i)^2\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)(m+r-1)\,x^{m+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(m+r)\,x^{m+r} + \sum_{r=2}^{\infty} a_{r-2}\,x^{m+r} - (n+i)^2\sum_{r=0}^{\infty} a_r\,x^{m+r} = 0$$

$$m(m-1)a_0x^m + m(m+1)a_1x^{m+1} + ma_0x^m + (m+1)a_1x^{m+1} - (n+i)^2a_0x^m - (n+i)^2a_1x^{m+1}$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}\big[[\,(m+r)(m+r-1) + (m+r) - (n+i)^2]a_r + a_{r-2}\big]\,x^{m+r} = 0$$

بمساواة معامل x^m نحصل على

$$[m(m-1) + m - (n+i)^2]a_0 = 0 \qquad , \qquad a_0 \neq 0$$
$$m^2 - (n+i)^2 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 = (n+i)^2$$

أما $m = n + i$ او $m = -(n+i)$

بمساواة معامل x^{m+1} نحصل على

$[m(m+1)+m+1-(n+i)^2]\,a_1=0$

الحالة الأولى عندما $m=n+i$ نحصل على

$[2m+1]a_1=0$

بما أن $2m+1\neq 0$ لان $m>0$

إذن $a_1=0$

بمساواة معامل x^{m+r} نحصل على

$$[\,(m+r)(m+r-1)+(m+r)-(n+i)^2]a_r+a_{r-2}=0$$
$$[m^2+2mr+r^2-(n+i)^2]a_r=-a_{r-2}$$

بما أن $m=n+i$ نحصل على

$$[(n+i)^2+2(n+i)r+r^2-(n+i)^2]a_r=-a_{r-2}$$
$$r[2(n+i)+r]a_r=-a_{r-2}$$
$$a_r=\frac{-a_{r-2}}{r[2(n+i)+r]}\quad,\quad r\geq 2 \qquad \dots (2.5)$$
$$a_2=\frac{-a_0}{2[2(n+i)+2]}\quad\Rightarrow a_2=\frac{-a_0}{2^2[(n+i)+1]}$$
$$a_3=\frac{-a_1}{3[2(n+i)+3]}\quad \because\ a_1=0\ \Rightarrow\ a_3=0$$
$$a_4=\frac{-a_2}{4[2(n+i)+4]}\ \Rightarrow a_4=\frac{-1}{4[2(n+i)+4]}\cdot\frac{-a_0}{2^2[(n+i)+1]}$$
$$a_4=\frac{a_0}{4[2(n+i)+4]\ 2^2\,[(n+i)+1]}$$
$$a_5=\frac{-a_3}{5[2(n+i)+5]}\quad \because\ a_3=0\ \Rightarrow\ a_5=0$$

إذن

$$a_1=a_3=a_5=\ a_7=\cdots=0$$

وعليه

$a_{2n-1}=0\quad,\quad$ n=1 ,2 ,3,..........

هذا يعني أن معاملات المعادلة (2.1) هي فقط المعاملات الزوجية. لذلك نعوض عن r في الصيغة التكرارية (2.5) بـ 2k فنحصل على

$$a_{2k}=\frac{-a_{2k-2}}{2k[2(n+i)+2k]}\quad,\quad k=1,2,3,4,\dots$$
$$a_{2k}=\frac{-a_{2k-2}}{4k[(n+i)+k]}$$
$$k=1\quad\Rightarrow\ a_2=\frac{-a_0}{4[(n+i)+1]}$$
$$k=2\Rightarrow a_4=\frac{-a_2}{4\ .2[(n+i)+2]}\quad\Rightarrow a_4=\frac{-1}{4\ .2[(n+i)+2]}\cdot\frac{-a_0}{4[(n+i)+1]}$$
$$\Rightarrow a_4=\frac{a_0}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2][(n+i)+1]}$$
$$k=3\ \Rightarrow\ a_6=\frac{-a_4}{4\ .3[(n+i)+3]}$$
$$\Rightarrow\quad a_6=\frac{-1}{4\ .3[(n+i)+3]}\cdot\frac{a_0}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2][(n+i)+1]}$$

$$\Rightarrow\ a_6=\frac{-a_0}{4^3\ .3\ .2\ .1\ [(n+i)+3]\ [(n+i)+2][(n+i)+1]}$$

وعليه فإن

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{4^k\ k!\ [(n+i)+k]\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.[(n+i)+1]}$$

نعوض المعاملات في المعادلة (2.2) مع $m=n+i$ فنحصل على

$$y=x^{n+i}(a_0-\frac{a_0}{4[(n+i)+1]}\ x^2+\frac{a_0}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^4 -\frac{-a_0}{4^3\ .3\ .2\ .1\ [(n+i)+3]\ [(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^6+\cdots)$$

$$y=a_0\ x^{n+i}\left(1-\frac{1}{4[(n+i)+1]}\ x^2+\frac{1}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^4 -\frac{1}{4^3\ .3\ .2\ .1\ [(n+i)+3]\ [(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^6+\cdots\right)\dots(2.6)$$

إذا اخترنا قيمة الثابت a_0 بالشكل [3] :

$$a_0=\frac{1}{2^{n+i}\ (n+i)!}\qquad\dots(2.7)$$

نعوض المعادلة (2.7) في المعادلة (2.6) فنحصل على

$$y=\frac{1}{2^{n+i}\ (n+i)!}\ x^{n+i}(1-\frac{1}{4[(n+i)+1]}\ x^2+\frac{1}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^4 -\frac{1}{4^3\ .3\ .2\ .1\ [(n+i)+3]\ [(n+i)+2][(n+i)+1]}\ x^6+\cdots)$$

$$y=(\frac{x}{2})^{n+i}\left[\frac{1}{(n+i)!}-\frac{1}{4[(n+i)+1]!}\ x^2-\frac{1}{4^2\ .2\ .1[(n+i)+2]!}\ x^4 -\frac{1}{4^3\ .3\ .2\ .1\ [(n+i)+3]\ !}\ x^6+\cdots\right]\qquad\dots(2.8)$$

بما أن $\Gamma(n+i+1)=(n+i)!$ [12] فأنه :

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{n+i}\left[\frac{1}{\Gamma(n+i+1)}-\frac{1}{4\Gamma(n+i+2)}\ x^2+\frac{1}{4^2\ .2\ .1\Gamma(n+i+3)}\ x^4 -\frac{1}{4^3\ .3\ .2\ .1\ \Gamma(n+i+4)}\ x^6+\cdots\right]$$

$$y=(\frac{x}{2})^{n+i}[\frac{1}{\Gamma(n+i+1)}-\frac{1}{\Gamma(n+i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2\ .1\Gamma(n+i+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 -\frac{1}{3\ .2\ .1\ \Gamma(n+i+4)}\left(\frac{x}{2}\right)^6\ +\cdots]$$

$$y_{n+i}=J_{n+i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\ \Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r}\qquad\dots(2.9)$$

تسمى $J_{n+i}(x)$ دالة بيسل من النوع الأول والرتبة $n+i$ ولإيجاد الحل الآخر لمعادلة بيسل نأخذ $m=-(n+i)$ فإن الصيغة التكرارية (2.5) تصبح

$$a_r=\frac{-a_{r-2}}{r[r-2(n+i)]}\qquad,\quad r\geq 2\quad,\quad r\neq 2(n+i)$$

وباستخدام الخطوات نفسها التي أجريناها للحصول على $J_{n+i}(x)$ فاننا سنحصل على الحل الأخر لمعادلة بيسل الذي يأخذ الصورة الآتية:

$$J_{-(n+i)}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-(n+i)+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-(n+i)+2r} \quad \dots(2.10)$$

وتسمى هذه الدالة بدالة بيسل من النوع الأول والرتبة $-(n+i)$ وبالتالي يكون الحل العام لمعادلة بيسل من الرتبة $n+i$ العقدية على الشكل الآتي:

$$y(x)=c_1\,J_{n+i}(x)+c_2\,J_{-(n+i)}(x)$$

مثال(1) : جد الحل العام لمعادلة بيسل الآتية:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-(3+i)^2)y=0$$

الحل:

معادلة بيسل من الرتبة$i+3$ والحل العام لهذا المعادلة هو

$$y(x)=c_1\,J_{3+i}(x)+c_2\,J_{-3-i}(x)$$

إذ أن c_1 و c_2 هي ثوابت أخيارية وإن

$$J_{3+i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(3+i+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i+2r}$$

$$J_{3+i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i}\left[\frac{1}{0!\,\Gamma(3+i+1)}-\frac{1}{1!\,\Gamma(3+i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!\,\Gamma(3+i+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 -\frac{1}{3\,!\,\Gamma(3+i+4)}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots\right]$$

$$J_{3+i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i}\left[\frac{1}{\Gamma(4+i)}-\frac{1}{4\Gamma(5+i)}\,x^2+\frac{1}{4^2\,.2\,.1\Gamma(6+i)}\,x^4 -\frac{1}{4^3\,.3\,.2\,.1\,\Gamma(7+i)}\,x^6+\cdots\right]$$

$$J_{3+i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i}\left[\frac{1}{(3+i)!}-\frac{1}{4(4+i)!}\,x^2+\frac{1}{4^2\,.2\,.1(5+i)!}\,x^4 -\frac{1}{4^3\,.3\,.2\,.1\,(6+i)!}\,x^6+\cdots\right]$$

$$J_{3+i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i}\left[\frac{1}{1.55+4.98i}-\frac{1}{4(1.22+21.47i)}\,x^2+\frac{1}{32(-15.37+108.57i)}\,x^4 -\frac{1}{384\,(-200.79+636.05i)}\,x^6+\cdots\right]$$

$$J_{3+i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3+i}[\,0.0569-0.18306i-(0.00065-0.0116i)x^2 -(0.00003+0.0002i)x^4+(0.000001+0.000003i)x^6+\cdots]$$

$$J_{-3-i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-3-i+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i+2r}$$

$$J_{-3-i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i}\left[\frac{1}{0!\,\Gamma(-3-i+1)}-\frac{1}{1!\,\Gamma(-3-i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!\,\Gamma(-3-i+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4}-\frac{1}{3\,!\,\Gamma(-3-i+4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{6}+\cdots\right]$$
$$J_{-3-i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i}\left[\frac{1}{\Gamma(-2-i)}-\frac{1}{4\Gamma(-1-i)}\,x^{2}+\frac{1}{4^{2}\,.2\,.1\Gamma(-i)}\,x^{4}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4^{3}\,.3\,.2\,.1\,\Gamma(1-i)}\,x^{6}+\cdots\right]$$
$$J_{-3-i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i}\left[\frac{1}{(-3-i)!}-\frac{1}{4(-2-i)!}\,x^{2}+\frac{1}{4^{2}\,.2\,.1(-1-i)!}\,x^{4}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4^{3}\,.3\,.2\,.1\,(-i)!}\,x^{6}+\cdots\right]$$
$$J_{-3-i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i}\left[\frac{10}{1.339+0.963i}-\frac{1}{2(-0.343-0.653i)}\,x^{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{32(-0.155+0.498i)}\,x^{4}-\frac{1}{384\,(0.498+0.155i)}\,x^{6}+\cdots\right]$$
$$J_{-3-i}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-3-i}\left[\begin{array}{c}4.9224-3.5401i+(0.3152-0.6001i)x^{2}\\-(0.0178+0.0572i)\,x^{4}-(0.0047-0.0014i)\,x^{6}+\cdots\end{array}\right]$$

قضية(2.1):

إذا كانت $J_{n+i}(x)$, $J_{-(n+i)}(x)$ دوال بيسل من النوع الأول والثاني على التوالي فإن هذه الدوال مستقلة خطياً للمعادلة (2.1) عندما $x\neq 0$. وأن الحل العام للمعادلة (2.1) يملك الشكل

$$y(x)=c_1\,J_{n+i}(x)+c_2\,J_{-(n+i)}(x)$$

إذ إن c_1 و c_2 هي ثوابت أخيارية .

البرهان:

لإثبات أن دوال بيسل $J_{n+i}(x)$, $J_{-(n+i)}(x)$ هي دوال مستقلة خطياً يكفي أن نبين أن رونسكيان (wronskian) لا يساوي صفر.

$$W(\,J_{n+i}(x)\;,\;J_{-(n+i)}(x)\,)=\begin{vmatrix}J_{n+i}(x) & J_{-(n+i)}(x)\\ J`_{n+i}(x) & J`_{-(n+i)}(x)\end{vmatrix}$$

بما أن $J_{n+i}(x)$, $J_{-(n+i)}(x)$ تحقق المعادلة (2.1)

$$x^{2}J``_{n+i}(x)+x\,J`_{n+i}(x)+(x^{2}-(n+i)^{2})\,J_{n+i}(x)=0$$
$$x^{2}J``_{-(n+i)}(x)+x\,J`_{-(n+i)}(x)+(x^{2}-(n+i)^{2})J_{-(n+i)}(x)=0$$

نضرب هاتين المعادلتين بواسطة $J_{-(n+i)}(x)$, $J_{n+i}(x)$ على التوالي وطرحهما من بعضهما وقسمة الناتج على x فنحصل على

$$x(J_{n+i}(x)J``_{-(n+i)}(x)-J_{-(n+i)}(x)J``_{n+i}(x)+J_{n+i}(x)J`_{-(n+i)}(x)$$
$$-J_{-(n+i)}(x)J`_{n+i}(x)=0$$

وهذا يكافىء

$$\frac{d}{dx}(x(J_{n+i}(x)J`_{-(n+i)}(x) - J_{-(n+i)}(x)J`_{n+i}(x)$$
$$= \frac{d}{dx}(x\,W\big(J_{n+i}(x)\ ,\ J_{-(n+i)}(x)\big) = 0$$
$$W\big(J_{n+i}(x)\ ,\ J_{-(n+i)}(x)\big) = \frac{c}{x} \qquad ,\quad x \neq 0$$
$$W\big(J_{n+i}(x)\ ,\ J_{-(n+i)}(x)\big) \neq 0$$

إذن دوال بيسل $J_{n+i}(x)$, $J_{-(n+i)}(x)$ مستقلة خطياً .

مبرهنة(2.2): إذا كانت

$$J_{n+i}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r} \qquad , \quad n > -1$$

فإن

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_{n+i}(x)}{x^{n+i}} = \frac{1}{2^{n+i}\,\Gamma(n+i+1)}$$

البرهان: من المعادلة (2.8)

$$J_{n+i}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i}\left[\frac{1}{\Gamma(n+i+1)} - \frac{1}{4\Gamma(n+i+2)}\,x^2 + \frac{1}{4^2 .2 .1\Gamma(n+i+3)}\,x^4 - \frac{1}{4^3 .3 .2 .1\Gamma(n+i+4)}\,x^6 + \cdots\right]$$

$$\frac{J_{n+i}(x)}{x^{n+i}} = \frac{1}{2^{n+i}\Gamma(n+i+1)}\left[1 - \frac{1}{4(n+i+1)}\,x^2 + \frac{1}{4^2 .2 .1(n+i+2)(n+i+1)}\,x^4 - \frac{1}{4^3 .3 .2 .1(n+i+3)(n+i+2)(n+i+1)}\,x^6 + \cdots\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_{n+i}(x)}{x^{n+i}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2^{n+i}\Gamma(n+i+1)}\left[1 - \frac{1}{4(n+i+1)}\,x^2 + \frac{1}{4^2 .2 .1(n+i+2)(n+i+1)}\,x^4 - \frac{1}{4^3 .3 .2 .1(n+i+3)(n+i+2)(n+i+1)}\,x^6 + \cdots\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_{n+i}(x)}{x^{n+i}} = \frac{1}{2^{n+i}\Gamma(n+i+1)}$$

قضية(2.2):العلاقة التالية تربط بين دوال بيسل من النول الأول .

$$J_{-(n+i)}(x) = (-1)^{n+i}J_{n+i}(x)$$

البرهان:

$$J_{-(n+i)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-(n+i)+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-(n+i)+2r}$$
$$= \sum_{r=0}^{(n+i)-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n+i)+2r}}{r!\Gamma(-(n+i)+r+1)} + \sum_{r=n+i}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n+i)+2r}}{r!\Gamma(-(n+i)+r+1)}$$
$$= 0 \quad + \sum_{r=n+i}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n+i)+2r}}{r!\Gamma(-(n+i)+r+1)}$$

الآن نضع بدلاً عن $r=(n+i)+k$ فنحصل على

$$J_{-(n+i)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+i)+k}\ (\frac{x}{2})^{(n+i)+2k}}{((n+i)+k)!\,\Gamma(k+1)}=(-1)^{n+i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2k}}{k!\,\Gamma(n+i+k+1)}$$

$$J_{-(n+i)}(x)=(-1)^{n+i}\ J_{n+i}(x)$$

3-علاقات المعاودة أو الإرجاع (Recurrence relations) .

ذكرت علاقات المعاودة أو الإرجاع في [3] .في حالة n عدد صحيح .سنتناول هذه العلاقات في الحالة العقدية $(n+i)$.

قضية(3.1) : إذا كانت

$$J_{n+i}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r}$$

فإن

1. $x\,J\grave{}_{n+i}=(n+i)\,J_{n+i}-x\,J_{n+1+i}$
2. $x\,J\grave{}_{n+i}=-(n+i)\,J_{n+i}+x\,J_{n-1+i}$

برهان العلاقة 1 :

$$x\,J\grave{}_{n+i}=(n+i)\,J_{n+i}-x\,J_{n+1+i}$$

من المعلوم لدينا

$$J_{n+i}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r}$$

$$J\grave{}_{n+i}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}\,(n+i+2r)}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$=(n+i)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}\,2r}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$x\,J\grave{}_{n+i}=x(n+i)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$+x\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r}\,2}{(r-1)!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$=x(n+i)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}\ \frac{1}{2}$$

$$+x\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{(r-1)!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}$$

$$=(n+i)\,J_{n+i}\ +x\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{(r-1)!\,\Gamma(n+i+r+1)}\ (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}$$

نفرض ان $s=r-1$

$$x\,J'_{n+i} = (n+i)\,J_{n+i} + x\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s!\,\Gamma(n+i+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2s+1}$$

$$x\,J'_{n+i} = (n+i)\,J_{n+i} - x\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s}}{s!\,\Gamma(n+i+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2s+1}$$

$$x\,J'_{n+i} = (n+i)\,J_{n+i} - x\,J_{n+1+i}$$

برهان العلاقة 2 :

$$x\,J'_{n+i} = -(n+i)\,J_{n+i} + x\,J_{n-1+i}$$

من المعلوم أن

$$J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

$$J'_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,(n+i+2r)}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r-1} \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,[2(n+i)+2r-(n+i)]}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r-1} \frac{1}{2}$$

$$x\,J'_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,[2(n+i)+2r-(n+i)]}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,[2(n+i)+2r]}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

$$-(n+i)\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

$$x\,J'_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,2[(n+i)+r]}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r} - (n+i)\,J_{n+i}$$

$$x\,J'_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,2[(n+i)+r]}{r!\,(n+i+r)\Gamma(n+i+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r} - (n+i)\,J_{n+i}$$

$$x\,J'_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}\,2}{r!\,\Gamma(n+i+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r} - (n+i)\,J_{n+i}$$

$$x\,J'_{n+i} = x\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r-1} - (n+i)\,J_{n+i}$$

$$x\,J'_{n+i} = x\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+i+2r} - (n+i)\,J_{n+i}$$

$$x\,J'_{n+i} = x\,J_{n-1+i} - (n+i)\,J_{n+i}$$

نتيجة(3.2): إذا كانت

$$J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

فإن

3. $2\,J'_{n+i} = J_{n-1+i} - J_{n+1+i}$

4. $2(n+i)J_{n+i} = x\,(J_{n-1+i} + J_{n+1+i})$

برهان العلاقة 3 :

$2\,J^{`}_{n+i} = J_{n-1+i} - J_{n+1+i}$

من القضية(3.1) نحصل على

$x\,J^{`}_{n+i} = (n+i)\,J_{n+i} - x\,J_{n+1+i}$ ... (3.1)

$x\,J^{`}_{n+i} = -(n+i)\,J_{n+i} + x\,J_{n-1+i}$ ... (3.2)

بجمع (3.1) و(3.2) نحصل على

$2x\,J^{`}_{n+i} = -x\,J_{n+1+i} + x\,J_{n-1+i}$

بالقسمة على x , $x \neq 0$

$2\,J^{`}_{n+i} = -\,J_{n+1+i} + J_{n-1+i}$

$2\,J^{`}_{n+i} = J_{n-1+i} - J_{n+1+i}$

برهان العلاقة 4 :

$2(n+i)J_{n+i} = x\,(J_{n-1+i} + J_{n+1+i})$

من القضية(3.1) نحصل على

$x\,J^{`}_{n+i} = (n+i)\,J_{n+i} - x\,J_{n+1+i}$ ... (3.3)

$x\,J^{`}_{n+i} = -(n+i)\,J_{n+i} + x\,J_{n-1+i}$ ... (3.4)

بتعويض المعادلة (3.4) في المعادلة (3.3)نحصل على

$-(n+i)\,J_{n+i} + x\,J_{n-1+i} = (n+i)\,J_{n+i} - x\,J_{n+1+i}$

$2(n+i)\,J_{n+i} - x\,J_{n+1+i} - x\,J_{n-1+i} = 0$

$2(n+i)\,J_{n+i} = x\,J_{n+1+i} + x\,J_{n-1+i}$

$2(n+i)\,J_{n+i} = x(J_{n+1+i} + J_{n-1+i})$

قضية(3.3):إذا كانت

$$J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

فإن

5. $\frac{d}{dx}\left(x^{-(n+i)}\,J_{n+i}\right) = -x^{-(n+i)}J_{n+1+i}$

6. $\frac{d}{dx}\left(x^{(n+i)}\,J_{n+i}\right) = x^{(n+i)}\,J_{n-1+i}$

برهان العلاقة 5 :

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-(n+i)}\,J_{n+i}\right) = -x^{-(n+i)}\,J_{n+1+i}$$

من المعلوم أن

$$J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+i+r+1)}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$

$$x^{-(n+i)}\,J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\;x^{2r}}{r!\;2^{n+i+2r}\,\Gamma(n+i+r+1)}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-(n+i)}J_{n+i}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad 2r \quad x^{2r-1}}{r!\ 2^{n+i+2r}\Gamma(n+i+r+1)}$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad 2 \quad x^{2r-1}}{(r-1)!\ 2^{n+i+2r}\Gamma(n+i+r+1)}$$

نفرض أن $r = k+1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \quad 2 \quad x^{2k+1}}{k!\ 2^{n+i+2k+2}\Gamma(n+i+k+2)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \quad 2 \quad x^{n+i+2k+1} \quad x^{-(n+i)}}{k!\ 2^{n+i+2k+1} \quad 2\Gamma(n+i+k+2)}$$
$$= x^{-(n+i)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ (-1) \quad x^{n+i+2k+1}}{k!\ 2^{n+i+2k+1} \quad \Gamma(n+i+k+2)}$$
$$= -x^{-(n+i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \quad x^{n+i+2k+1}}{k!\ 2^{n+i+2k+1} \quad \Gamma(n+i+k+2)}$$
$$= -x^{-(n+i)}J_{n+1+i}$$

برهان العلاقة 6 :

$$\frac{d}{dx}(x^{(n+i)}J_{n+i}) = x^{(n+i)}J_{n-1+i}$$

من المعلوم أن

$$J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\ \Gamma(n+i+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r}$$
$$x^{n+i} \quad J_{n+i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad x^{2(n+i)+2r}}{r! \quad 2^{n+i+2r} \ \Gamma(n+i+r+1)}$$
$$\frac{d}{dx}[x^{n+i} \quad J_{n+i}] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \ (2(n+i)+2r) \quad x^{2(n+i)+2r-1}}{r! \quad 2^{n+i+2r} \ \Gamma(n+i+r+1)}$$
$$\frac{d}{dx}[x^{n+i} \quad J_{n+i}] = x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \ 2(n+i) \quad x^{n+i+2r-1}}{r! \quad 2^{n+i+2r} \ \Gamma(n+i+r+1)} + x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \ 2r \quad x^{n+i+2r-1}}{r! \quad 2^{n+i+2r} \ \Gamma(n+i+r+1)}$$
$$\frac{d}{dx}[x^{n+i} \quad J_{n+i}] = x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \ (n+i) \quad x^{n+i+2r-1}}{r! \quad 2^{n+i+2r-1} \ \Gamma(n+i+r+1)} + x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \ r \quad x^{n+i+2r-1}}{r! \quad 2^{n+i+2r-1}\Gamma(n+i+r+1)}$$
$$= x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r-1} \quad (n+i+r)}{r! \ \Gamma(n+i+r+1)}$$
$$= x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{n+i+2r-1} \quad (n+i+r)}{r! \ (n+i+r)\Gamma(n+i+r)}$$

$$= x^{n+i}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \quad (\frac{x}{2})^{n+i+2r-1}}{r! \quad \Gamma(n+i+r)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{(n+i)}J_{n+i}\right) = x^{(n+i)}J_{n-1+i}$$

أمثلة توضيحية كتطبيق للعلاقات السابقة .

مثال(1): اكتب دالة بيسل J_{5+i} بدلالة كل من دوال بيسل J_{1+i} ، J_{2+i}

الحل: العلاقة الرابعة من نتيجة (3.2)

$$2(n+i)J_{n+i} = x\,(J_{n-1+i} + J_{n+1+i}) \quad \ldots (3.5)$$

عندما $n = 4$

$$2(4+i)J_{4+i} = x\,(J_{3+i} + J_{5+i})$$

$$\left(\frac{8+2i}{x}\right)J_{4+i} = (J_{3+i} + J_{5+i})$$

$$J_{5+i} = \left(\frac{8+2i}{x}\right)J_{4+i} - J_{3+i} \quad \ldots (3.6)$$

عندما $n = 3$ في المعادلة (3.5) نحصل على

$$2(3+i)J_{3+i} = x\,(J_{2+i} + J_{4+i})$$

$$\left(\frac{6+2i}{x}\right)J_{3+i} = (J_{2+i} + J_{4+i})$$

$$J_{4+i} = \left(\frac{6+2i}{x}\right)J_{3+i} - J_{2+i} \quad \ldots (3.7)$$

عندما $n = 2$ في المعادلة (3.5) نحصل على

$$2(2+i)J_{2+i} = x\,(J_{1+i} + J_{3+i})$$

$$\left(\frac{4+2i}{x}\right)J_{2+i} = (J_{1+i} + J_{3+i})$$

$$J_{3+i} = \left(\frac{4+2i}{x}\right)J_{2+i} - J_{1+i} \quad \ldots (3.8)$$

نعوض المعادلة (3.7) والمعادلة (3.8) في المعادلة (3.6) فنحصل على

$$J_{5+i} = \left(\frac{8+2i}{x}\right)\left(\left(\frac{6+2i}{x}\right)\left[\left(\frac{4+2i}{x}\right)J_{2+i} - J_{1+i}\right] - J_{2+i}\right) - \left[\left(\frac{4+2i}{x}\right)J_{2+i} - J_{1+i}\right]$$

$$J_{5+i} = \frac{44+28i}{x}\left(\frac{4+2i}{x}J_{2+i} - J_{1+i}\right) - \frac{8+2i}{x}J_{2+i} - \frac{4+2i}{x}J_{2+i} + J_{1+i}$$

$$J_{5+i} = \frac{120+200i}{x^3}\,J_{2+i} - \frac{44+28i}{x^2}\,J_{1+i} - \frac{8+2i}{x}\,J_{2+i} - \frac{4+2i}{x}J_{2+i} + J_{1+i}$$

$$J_{5+i} = \frac{120+200i}{x^3}\,J_{2+i} - \frac{44+28i}{x^2}\,J_{1+i} - \frac{12+4i}{x}\,J_{2+i} + J_{1+i}$$

$$J_{5+i} = \left[1 - \frac{44+28i}{x^2}\right]J_{1+i} + \left[\frac{120+200i}{x^3} - \frac{12+4i}{x}\right]J_{2+i}$$

مثال(2): برهن أن

$$\frac{d}{dx}\left[J_{n+i}^2(x) + J_{n+1+i}^2(x)\right] = 2\left[\frac{n+i}{x}\,J_{n+i}^2(x) - \frac{(n+1+i)}{x}\,J_{n+1+i}^2(x)\right]$$

البرهان : من القضية (3.1) نحصل على

$$x\,J'_{n+i}(x) = (n+i)\,J_{n+i}(x) - x\,J_{n+1+i}(x) \quad \ldots (3.9)$$

$$x\,J'_{n+i}(x) = -(n+i)\,J_{n+i}(x) + x\,J_{n-1+i}(x) \quad \ldots (3.10)$$

نضع الصيغة(3.10) بدلاً عن كل n بـ $n+1$ فنحصل على

$$x\,J\grave{}_{n+1+i}(x) = -(n+1+i)\,J_{n+1+i}(x) + x\,J_{n+i}(x) \qquad \dots(3.11)$$

$$\frac{d}{dx}\left[J^2_{n+i}(x) + J^2_{n+1+i}(x)\right] = 2J_{n+i}(x)\,J\grave{}_{n+i}(x) + 2J_{n+1+i}(x)\,J\grave{}_{n+1+i}(x) \qquad \dots(3.12)$$

قيم $J\grave{}_{n+i}(x)$ و $J\grave{}_{n+1+i}(x)$ في الصيغة (3.9)(3.11),على التوالي نعوضهما في (3.12) فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[J^2_{n+i}(x) + J^2_{n+1+i}(x)\right] = 2\,J_{n+i}(x)\left[\frac{n+i}{x}\,J_{n+i}(x) - J_{n+1+i}(x)\right] + 2\,J_{n+1+i}(x)\left[\frac{-(n+1+i)}{x}\,J_{n+1+i}(x) + J_{n+i}(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[J^2_{n+i}(x) + J^2_{n+1+i}(x)\right] = \frac{2}{x}\,J_{n+i}(x)\left[\,(n+i)J_{n+i}(x) - x\,J_{n+1+i}(x)\,\right] + \frac{2}{x}\,J_{n+1+i}(x)\left[-(n+1+i)J_{n+1+i}(x) + x\,J_{n+i}(x)\right]$$

$$= 2\,\frac{n+i}{x}\,J^2_{n+i}(x) - 2\,J_{n+i}(x)\,J_{n+1+i}(x) - 2\,\frac{(n+1+i)}{x}\,J^2_{n+1+i}(x) + 2\,J_{n+1+i}(x)J_{n+i}(x)$$

$$= 2\left[\frac{n+i}{x}\,J^2_{n+i}(x) - \frac{(n+1+i)}{x}\,J^2_{n+1+i}(x)\right]$$

مثال(3): إذا كانت $n > -1$ برهن أن

$$\int_0^x x^{-(n+i)}\,J_{n+1+i}(x)\;dx = \frac{1}{2^{n+i}\Gamma(n+i+1)} - x^{-(n+i)}\,J_{n+i}(x)$$

البرهان : العلاقة الخامسة من قضية (3.3) نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-(n+i)}\,J_{n+i}\right) = -x^{-(n+i)}\,J_{n+1+i}$$

$$\int_0^x x^{-(n+i)}\,J_{n+1+i}(x)\;dx = -\left[x^{-(n+i)}\,J_{n+i}(x)\right]_0^x$$

$$= -x^{-(n+i)}\,J_{n+i} + \lim_{x\to 0}\frac{J_{n+i}(x)}{x^{n+i}}$$

حسب مبرهنة (2.2) نحصل على

$$= -x^{-(n+i)}\,J_{n+i} + \frac{1}{2^{n+i}\,\Gamma(n+i+1)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+i}\,\Gamma(n+i+1)} - x^{-(n+i)}\,J_{n+i}(x)$$

المصادر

[1] Artin, E. The gamma function. Courier Dover Publications , (2015).

[2] Bowm[2] Bowman, F. Introduction to Bessel functions. Courier Corporation, Springer , (2012).

[3] Dass H. K. Er. Rajnish Verma, "Higher Engineering Mathematics", First Edition, Springer, (2011).

[4] Fedoryuk, M. V. Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations. Springer Science & Business Media,(2012).

[5] Korenev B. G. "Bessel Functions And Their Applications"CRC Press, Springer, (2003).

[6] Kreyszig E. "Advanced Engineering Mathematics", Wiley, Springer , (2013) .

[7] Luke, Y. L. Integrals of Bessel functions. Courier Corporation, (2014) .

[8] Markel E. G., "Bessel Functions and Equations of Mathematical Physics", Supervisor, Judith Rivas Ulloa, Leioa, 25 June (2015).

[9] Mclachlan N. W. "Bessel Functions For Engineers", 2nd Edition, Oxford University, Press, London, (1955).

[10] Okrasinski W., L. Płociniczak, "A Note on Fractional Bessel Equation and Its Asymptotics", Fract. Calc. Appl. Anal., 16 (2013).

[11] Robin W., "Ladder-operator Factorization and the Bessel Differential Equations", Math. Forum, 9 (2014).

[12] Thukral A. K. "Factorials Of Real Negative And Imaginary Numbers-A new Perspetive", Published (2014).