Journal of Education and Science
Vol. 28, No.4, 2019, pp.142-157
ISSN 1812-125X
http://edusj.mosuljournals.com

Solve the Initial Value Problems of Fractional Order Using The Homotopy Analytical Method and Improve Them Using Pade' Approximations

Heba Sh. Mahmmood **Kais I. Ibraheem**
Department of Mathematics, College of Education Pure Science University of Mosul ,Iraq
Mosul.nice.57@gmail.com **kaisismail@yahoo.com**
DOI: 10.33899/edusj.1999.163332

Received 27/ 03 / 2018 **Accepted** 26 / 06 / 2018

ABSTRACT

In this research , the initial value problems of the caputo- fractional order are solved using the homotopy analysis method. The Pade' approximation is added to the fractional order to improve this method. The improvement is confirmed through two examples by comparing the value of mean square error for homotopy analysis method and the improved method.

Key words : Homotopy Analysis Method (HAM), Pade' Approximation (PA), Mean Square Error(MSE).

حل مسائل القيم الابتدائية ذات الرتب الكسرية باستخدام طريقة هوموتوبي التحليلية وتحسينها باستخدام تقريبات بادي

هبة شكر محمود قيس اسماعيل ابراهيم

قسم الرياضيات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة الموصل ، العراق
Mosul.nice.57@gmail.com kaisismail@yahoo.com

DOI: 10.33899/edusj.1999.163332

الاستلام القبول

2018 / 03 / 27 2018 /06 / 26

الخلاصة

في هذا البحث تم حل مسائل القيم الابتدائية ذات الرتب الكسرية من نوع كابوتو باستعمال طريقة هوموتوبي التحليلية, و قد تم أضافة تقريبات بادي لهدف تحسين نتائج هذه الطريقة . وقد أثبتنا هذا التحسين من خلال أخذ مثالين ومقارنة نتائج متوسط مربع الخطأ لطريقة هوموتوبي التحليلية وطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي .

الكلمات المفتاحية : طريقة هوموتوبي التحليلية , تقريبات بادي , متوسط مربع الخطا.

1- المقدمة

يعد موضوع حساب التفاضل والتكامل الكسري محط أهتمام الباحثين في أوائل عقد هذا القرن ومازال البحث عن هذا الموضوع مستمر [1,2,3,4,5]، بسبب استعمالاتها في مجالات عده منها الكهربائية, الانتشار , ألكهرومغناطيسي، ألسيطره ، أجهزة الاعلام المثقّبة، ألعمليات ديناميكية الخ [6]. في السنوات الأخيرة كان هناك اهتمام كبير لتقديم طرائق عددية كفوءة لإيجاد حلّ تقريبي أكثر دقة للمعادلات التفاضلية الكسرية ومن هذه الطرائق، طريقة هوموتوبي التحليلية التي اقترحت اولا من قبل الباحث Liao في اطروحته للدكتوراه [7] التي فيها طور المفاهيم الاساسية لطريقة هوموتوبي التحليلة في الهندسة اللاكمية لاقتراح طريقة تحليلة عامة لحل المشاكل غير الخطية. إن طريقة هوموتوبي التحليلية لاتعتمد على معلمة صغيرة على خلاف التقنيات التحليلية الاخرى مثل طريقة المجال المتفسخ, طريقة التغايرية التكرارية وطريقة هوموتوبي المضطربة إذ تعدُ هذه الطرائق حالات خاصة من طريقة هوموتوبي التحليلة كما أنها تزودنا بطريقة سهلة للتعديل والسيطرة على تقارب سلسلة الحل من خلال التحكم بقيمة الخطأ عن طريق معلمة سيطرة التقارب h [8], هذه الطريقة حققت نجاحاً كبيراً لحل العديد من المشاكل غير الخطية [9,10,11,12] .

في هذا البحث استعملنا طريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي لحل مسائل القيم الابتدائية التي تحتوي على مشتقة كسرية من نوع كابوتو وتكون بالصيغة الاتية بشكل معمم:

$$N\,[y(t)] = D^{\alpha}y(t) + \delta y(t) - f(t) \qquad (1)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(t) = d_i\,, \qquad i=0,1,\cdots,n-1 \qquad (2)$$

إذ δ ثابت ، $n-1<\alpha\le n$ ، $n\epsilon N$()، D^{α} تشير الى مشتقة كابوتو الكسرية و $f(t)$ دالة معطاة [13] .

2- تعاريف

في هذا البند سنقدم بعض التعاريف الأساسية المرتبطة بالبحث

أ- الدالة الحقيقية $f(x)$ ، $x>0$ ، يقال بأنها في الفضاء C_{μ} ، $\mu\epsilon\mathbb{R}$ إذا وجد عدد حقيقي $P>\mu$ ، إذ أن $f(x)=x^{P}f_1(x)$ ، إذ $f_1(x)\in C[0,1)$ ويقال بأنها في الفضاء C_{μ}^{n} إذا وفقط إذا كان $f^{(n)}(x)\in C_{\mu}$، $n\in\mathbb{N}$ [8] .

ب- تكامل ريمان ليوفيل الكسري (Riemann-Liouvillel Fractional Integral) [**8**]:

تكامل ريمان ليوفيل الكسري من الرتبة $\alpha>0$ للدالة $f(x)\in C_{\mu}$, $\mu\ge-1$, يرمز له بالرمز J^{α} ويعرف كالأتي :

$$J^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\ , x>0, \qquad (3)$$

$$J^{0}f\,(x) = f(x), \qquad (4)$$

عندما $f\epsilon\, C_{\mu}$, $\mu\ge-1$, $\alpha,\beta\ge0$ و $\gamma\ge-1$ ومن خصائص J^{α}

$$J^{\alpha}\,J^{\beta}f(x) = J^{\beta}\,J^{\alpha}f(x) \qquad (5)$$

$$J^{\alpha}\,x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma} \qquad (6)$$

قضية :

إذا كانت

$\mu\ge-1\,, f\in C_{\mu}^{n}$ و $n\in\mathbb{N}, n-1<\alpha\le n$

عندئذ

$$D_*^{\alpha}J^{\alpha}f(x) = f(x), x>0. \qquad (7)$$

$$J^{\alpha}D_*^{\alpha}f(x) = f(x) - \sum_{K=0}^{n-1}f^{(k)}(0^{+})\frac{x}{k!}\ , x>0. \qquad (8)$$

ج-مشتقة كابوتو الكسرية(Caputo Fractional Devrative) [14]:

لتكن $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, عندئذ المشتقة الكسرية لكابوتو للدالة $f \in C_\mu$ تعرف كالأتي :

$$D_x^\alpha f(x) = J^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \quad (9)$$

,

بالاعتماد على خصائص D_x^α نحصل على الاتي :

قضية : اذا كانت $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ و $f \in C_\mu^n$, $\mu \geq -1$ عندئذ

$$D_x^\alpha D_x^\beta f(x) = D_x^{\alpha+\beta} f(x) = D_x^\beta D_x^\alpha f(x) \qquad (10)$$

$$D_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} x^{\gamma-\alpha}, x > 0 \qquad (11)$$

د- تقريبات بادي (Pade' Approximate) [**15**]

تقريب بادي للدالة متعددة الحدود $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ هو محاولة لتقليل قيمة الخطأ الاكبر في جزء من هذه الفترة إذ يعرف تقريب بادي للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ بأنه حاصل قسمة متعددات الحدود $P_N(x)$ على $Q_M(x)$ من الدرجة N و M على التوالي إذ أن N و M اعداد طبيعية ويرمز لتقريب بادي بالرمز $[N/M]$ سنستعمل الرمز $R_{N,M}(x)$ للاشارة الى هذا التقسيم إذ أن

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \qquad (12)$$

متعددات الحدود $P_N(x)$،$Q_M(x)$ يتم تركيبهم إذ أن الدالة $f(x)$ و $R_{N,M}(x)$ بالإضافة الى مشتقاتهم الى الرتبة N+M متطابقتين عندما $x = 0$. نفرض أن الدالة $f(x)$ تحليلية وتمتلك توسيع سلسلة Maclaurin

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \qquad (13)$$

وبصيغة أخرى $f(x)\ Q_M(x) - P_N(x) = Z_N(x)$:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{M} q_i x^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{N} p_i x^i\right) = \left(\sum_{i=}^{\infty} c_i x^i\right), \qquad (14)$$

بتوسيع المعادلة (14) ومقارنة معاملات القوى بالنسبة لـ x^i الى الصفر وذلك عندما تكون $i = 0,1,\ldots,N+M$

ينتج معادلة خطية من الرتبة $N + M + 1$ والتي تحل بتحديد قيم المعاملات $q_1, q_2, \ldots, q_M, p_0, p_1 \ldots p_N$

.

لقيم $N + M$, الخطأ في التقريبات يصبح أصغر عندما $P_N(x)$ و $Q_M(x)$ لهما الدرجة نفسها أو عندما $P_N(x)$ لها درجة أكبر بمقدار واحد من $Q_M(x)$.

هـ- متوسط مربع الخطأ Mean Square Error (**MSE**) [**16**]

ليكن لدينا المتجهات $\vec{x_i}$ إذ أن i=1,2,... نعرف متوسط مربع الخطأ لها على أنه مجموع مربع الفرق بين الحل المضبوط $Ex\ (x_i)$ والحلول التقريبية $\emptyset(x_i)$ مقسوما على عدد النقاط المستعملة N

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(E\ x\ (x_i) - \emptyset(x_i)\right)^2 \qquad (15)$$

3- طريقة هوموتوبي التحليلية (HAM) [17]

في هذا البند سوف نعطي بعض المفاهيم الاساسية لطريقة هوموتوبي التحليلية .

لتكون لدينا المعادلة الاتية :

$$N[y(t)] = 0 \quad , \ t \geq 0 \qquad (16)$$

إذ أن N يمثل مؤثر غير خطي, t متغير مستقل و y دالة غير معروفة .

من خلال تعميم طريقة هوموتوبي التقليدية ثم إشتقاق معادلة التشوه من الرتبة الصفرية وصيغتها:

$$(1-q)\,\mathcal{L}[\emptyset(t\,,q\,) - y_0(t)] = qhH(t)N[\emptyset(\,t\,,q\,)] \qquad (17)$$

إذ $q \in [0,1]$ معلمة التضمين "تسمى معلمة الهوموتوبي" , $\mathcal{L}$ هو الحد الخطي المساعد الذي يحقق الخاصية $\mathcal{L}(0) = 0$ عندما $\mathcal{L}(y) = 0$, $\emptyset(\,t\,,q\,)$ حل المعادلة (16), $y_0(t)$ تخمين أولي للحل المضبوط y(t), $h \neq 0$ تسمى " بمعلمة سيطرة التقارب", و $H(t) \neq 0$ دالة مساعدة على التوالي. من الجدير بالذكر أنه في اطار الهوموتوبي نمتلك حرية كبيرة لاختيار الحد الخطي المساعد $\mathcal{L}$, التخمين الاولي $y_0(t)$ والمعلمات $H(t)$ وh

عندما q =0 , بسبب الخاصية $\mathcal{L}(0) = 0$, نحصل من المعادلة (17) على الحل:

$$\emptyset(t,0) = y_0(t) \qquad (18)$$

وعندما q =1 و بما أن $h \neq 0$ و $H(t) \neq 0$, فإن المعادلة (17) تكون مكافئة لـ(16) عندئذ:

$$\emptyset(\,t\,,1) = y(t) \qquad (19)$$

إذ y(t) هو حل للمعادلة الاصلية (16) . وهكذا معلمة الهوموتوبي q تتزايد من الصفر الى الواحد , الحل $\emptyset(\,t\,,q\,)$ يتغير بشكل مستمر من التخمين الاولي $y_0(t)$ الى الحل المضبوط y(t) , هذا النوع من التغير المستمر في الحل يسمى بالتشوه في الهوموتوبي. بتوسيع $\emptyset(\,t\,,q\,)$ باستعمال سلسلة Taylor بالنسبة لـ q نحصل على :

$$\emptyset(\,t\,,q\,) = y_0(t) + \textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} y_m\,(t)\,q^m \qquad (20)$$

إذ أن:

$$y_m(t) = \left.\frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m \emptyset(\,t\,,q\,)}{\partial q^m}\right|_{q=0} \qquad (21)$$

إذا كانت $\mathcal{L}$, $y_0(t)$، $H(t)$ و h قد تم إختيارهم بشكل صحيح فإن معادلة السلسلة (20) تقترب عندما $q =$ 1 , لذلك بناءً على هذه الفرضية يصبح الحل بالشكل الاتي :

$$y(\mathrm{t}) = \emptyset(\,t\,,1) = y_0(t) + \textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} y_m\,(t) \qquad (22)$$

الان نعرف المتجه الاتي :

$$\vec{y}_n(t) = \{y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} \qquad (23)$$

باشتقاق معادلة التشويه(17) من الرتبة الصفرية m من المرات بالنسبة للمعلمة q ثم التعويض عن q بصفر واخيرا بتقسيم المعادلة على $m!$، نحصل على معادلة التشوه (deformation equation) التالية من الرتبة m:

$$\mathcal{L}[y_m(t) - \chi_m y_{m-1}(t)] = hH(t)\,R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) \qquad (24)$$

إذ:

$$R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) = \frac{1}{(m-1)!} \left.\frac{\partial^{m-1} N[\emptyset(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\right|_{q=0} \quad (25)$$

و

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad (26)$$

4- تطبيق طريقة هوموتوبي التحليلية (HAM):

في هذا البند سنستعمل طريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي لحل مسألة القيم الابتدائية (1) [18]. لذلك سنعيد كتابة المعادلة (1) بالشكل :

$$N[y(t)] = 0 \quad (27)$$

إذ أن:

$$N[y(t)] = D^{\alpha} y(t) + \delta y(t) - f(t) \quad (28)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(t) = d_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \quad (29)$$

سنعرف معادلة التشوه (deformation equation) من الرتبة الصفرية بالشكل:

$$(1-q)\, D^{\alpha}[\emptyset(t,q) - y_0(t)] = qhH(t)N[\emptyset(t,q)] \alpha > 0 \quad (30)$$

إذ:

$$\emptyset^{(i)}(0;q) = d_i \qquad i = 0,1,\dots,n-1 \quad (31)$$

من الواضح عندما q=0 و $y_0(t)$ تحقق الشرط الابتدائي (29) و $\mathcal{L} = D^{\alpha}$، $\alpha > 0$، $n-1 < \alpha \le n$، نحصل على ,

$$\emptyset(t,0) = y_0(t) \quad (32)$$

باستعمال معادلة التشوه (deformation equation) (24) من الرتبة m نحصل على :

$$D^{\alpha}[y_m(t) - \chi_m y_{m-1}(t)] = hH(t)\, R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) \quad (33)$$

$$y_m^{(i)}(0) = 0 \qquad i = 0,1,\dots,n-1 \quad (34)$$

إذ:

$$R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left.\left(D^{\alpha} y(t) + \delta y(t) - f(t) \right)\right|_{q=0} \quad (35)$$

بأخذ $H(t) = 1$ إذ $n-1 < \alpha \le n$، $n \in N$، وبالتعويض في المعادلة (33) نحصل على الصيغة التكرارية الآتية :

$$D^{\alpha} y_m(t) = \chi_m D^{\alpha} y_{m-1}(t) + h\, R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) \quad (36)$$

الان نطبق تكامل ريمان ليوفيل J^{α} على طرفي المعادلة (36) نحصل على:

$$y_m(t) = \chi_m y_{m-1}(t) - \chi_m \sum_{j=0}^{n-1} {y_{m-1}}^{(j)}(0^+)\frac{t^j}{j!}$$

$$+h\, J^{\alpha}[\, R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right)] \qquad m = 1,2,3,\ldots \qquad (37)$$

بالتعويض عن قيم $m = 1,2,3,\ldots$ في المعادلة (37) ، نحصل على التكرارات: $y_1(t), y_2(t), y_3(t), \ldots$

بعد تعويضها مع $y_0(t)$ في المعادلة (22) نحصل على حل تقريبي لمسألة القيم الابتدائية (28) بالشكل:

$$y(t) = \textstyle\sum_{m=0}^{k} y_m\,(t) = \sum_{m=0}^{k} a_m t^{\beta_m} \qquad (38)$$

إذ أن $a_0, a_1, \ldots, a_k$ ثوابت، $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ أسس طبيعية وكسرية بشكل متناوب و m تمثل عدد التكرارات

الان نربط المتسلسلة (38) بتقريبات بادي وذلك باستعمال الفرضية الاتية:

$$t^{\omega} = x \qquad (39)$$

إذ أن ω يمثل عدد كسري ،بعد التعويض في الحل التقريبي (38) نحصل على متسلسلة اسسها اعداد طبيعية حينها نتمكن من ربطها بتقريبات بادي و اخيرا نعيد اسس متسلسلة بادي التي حصلنا عليها الى أصلها [18] .

$\mathbf{1.4}$ – الأمثلة:

في هذا البند سنقوم بحل مثالين يوضحان كفاءة طريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي لحل مسائل القيم الابتدائي الكسرية (1).

المثال(**1**) [**19**]:

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية الخطية ذات الرتبة الكسرية

$$D^{\alpha}y(t) + y(t) = 0\ , \qquad 0 < \alpha \leq 1\ \ , t \geq 0 \qquad (40)$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(0) = 1$$

و الحل المضبوط للمسألة (40)هو

$$y(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-t^{\alpha})^K}{\Gamma(\alpha K + 1)}$$

نفرض أن $y_0(t) = 1$ و بالاستعانة بالمعادلة (35) نستطيع تركيب هوموتوبي كآلاتي :

$$R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) = D^{\alpha} y_{m-1}(t) + y_{m-1}(t)$$

والآن باستعمال معادلة التشويه من الرتبة m (37)عندما $m \geq 1$ تصبح:

$$y_m(t) = \chi_m\, y_{m-1}(t) - \chi_m \textstyle\sum_{j=0}^{0}\ {y_{m-1}}^{(j)}(0^+)\frac{t^j}{j!}\alpha$$

$$+h\, J^{\alpha}[\, R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right)] \qquad (41)$$

عندما $m = 1$, بالتعويض في المعادلة (41) نحصل على :

$$y_1(t) = h\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}\right)$$

وعندما $m = 2,3,\cdots$, فإن

$$y_m(t) = y_{m-1}(t) + h\,[y_{m-1}(t) + J^{\alpha} y_{m-1}(t)] \qquad (42)$$

بالتعويض عن $m = 2$ في المعادلة والاستعانة بخصائص تكامل ريمان ليوفيل نحصل على :

$$y_2(t) = y_1(t) + h[y_1(t) + J^{\alpha} y_1(t)]$$

$$y_2(t) = h(1+h)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + h^2\left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right)$$

بالتعويض عن $m = 3$ في المعادلة (42) نحصل على:

$$y_3(t) = y_2(t) + h[y_2(t) + J^{\alpha} y_2(t)]$$

$$y_3(t) = h(h+1)^2\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 2h^2(h+1)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + h^3\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

وهكذا بتكرار هذه العملية نحصل على حل تقريبي $y(t)$ إذ أن:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{5} y_m(t) = h[1 + (1+h) + (1+h)^2 + (1+h)^3 + (1+h)^4]\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \cdots + h^5\frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha+1)} \qquad (43)$$

نربط متسلسلة الحل $y(t)$ الناتجة بتقريبات بادي بعد التعويض عن قيم مختلفة لـ α .

الان بأخذ قيم مختلفة ل α وتعويضها في متسلسلة الحل $y(t)$ ثم ربطها بتقريبات بادي

أولا:

بالتعويض عن $\alpha = 0.35$، $h = -0.35$ في متسلسلة الحل (43) نحصل على:

$$y(t) = -4.1468\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}e^{-4}t^{1.75} + 7.9925\pi\sqrt{3}e^{-3}t^{1.40} - 1.2980\sqrt{\pi}e^{-1}t^{1.05} + 6.2905e^{-1}t^{0.70} - 9.9194e^{-1}t^{0.35} + 1 \qquad (44)$$

بأخذ قيم مختلفة لـt وتعويضهم في متسلسلة الحل(44) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية وكما موضح في الجدول (1) .

لحل المتسلسلة (44) بتقريبات بادي نفرض أن $x = t^{0.35}$ ثم نعوضها في متسلسلة الحل (44) نحصل على :

$$y^*(x) = -4.1468\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}e^{-4}x^5 + 7.9925\pi\sqrt{3}e^{-3}x^4 - 1.2980\sqrt{\pi}e^{-1}x^3 +$$

$$6.2905e^{-1}x^2 - 9.9194e^{-1}x^1 + 1 \qquad (45)$$

ألان نقوم بحل متسلسلة الحل الناتجة $y^*(x)$ بتقريبات بادي $[2/1]$ ثم نفرض أن $x = t^{0.35}$ نحصل على :

$$[2/1] = \frac{1 - 6.2620e^{-1}t^{0.35} + 2.6627e^{-1}t^{0.70}}{1 + 3.6573e^{-1}t^{0.35}} \qquad (46)$$

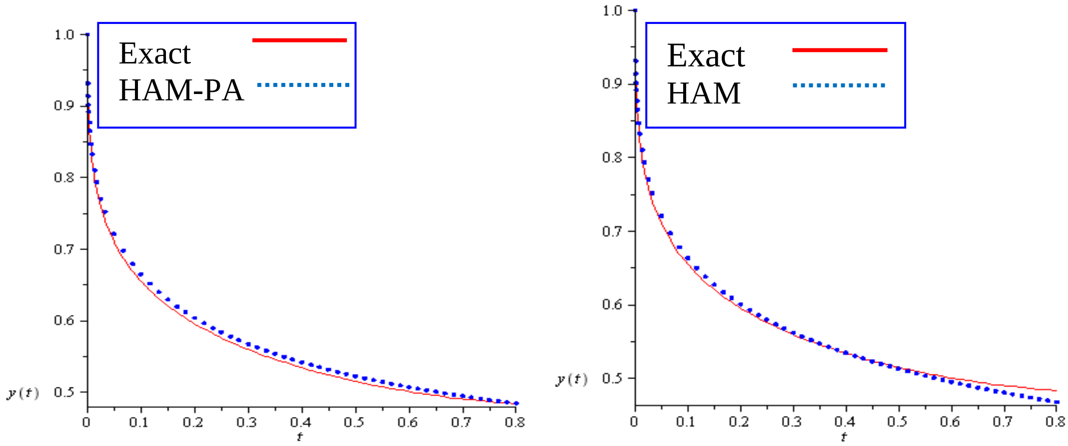
بأخذ قيم مختلفة لـ t وتعويضهم في متسلسلة بادي (46) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي وكما موضح في ألجدول(1)

جدول (1): يتضمن نتائج الحل المضبوط , الحلول التقريبية بطريقة الهوموتوبي و الحلول التقريبية لمتسلسلة بادي (46)عند قيم t المختلفة.

t	Exact Solution	Approximate Solution using Reliable HAM	Approximate Solution using HAM-PA
0	1	1	1
0.1	$6.5490e^{-1}$	$6.6359e^{-1}$	$6.6480e^{-1}$
0.2	$5.9584e^{-1}$	$6.0107e^{-1}$	$6.0401e^{-1}$
0.3	$5.5993e^{-1}$	$5.6264e^{-1}$	$5.6755e^{-1}$
0.4	$5.3348e^{-1}$	$5.3493e^{-1}$	$5.4196e^{-1}$
0.5	$5.1542e^{-1}$	$5.1336e^{-1}$	$5.2262e^{-1}$
0.6	$5.010e^{-1}$	$4.9577e^{-1}$	$5.0735e^{-1}$
0.7	$4.9067e^{-1}$	$4.8098e^{-1}$	$4.9494e^{-1}$
0.8	$4.8398e^{-1}$	$4.6826e^{-1}$	$4.8466e^{-1}$
0.9	$4.8102e^{-1}$	$4.5714e^{-1}$	$4.7601e^{-1}$
1.0	$4.8198e^{-1}$	$4.4727e^{-1}$	$4.6865e^{-1}$

الجدول(2) يوضح الفرق بين متوسط مربع الخطأ بطريقة الهوموتوبي التحليلية للمتسلسلة (44) وطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي $[2/1]$.

MSE- HAM	$2.0544e^{-4}$
MSE - PA- HAM	$5.3830e^{-5}$



(b) $\qquad$ (a)

الشكل(1) : مقارنة بين الحل المضبوط والطرق المستخدمة عندما $m = 6$, $\alpha = 0.35$

(a) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية

(b) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية _ تقريبات بادي

ثانيا:

ثم بالتعويض عن $\alpha = 0.5$ ، $h = -0.6$ في متسلسلة الحل (43) نحصل على:

$$y(t) = -2.3398\mathrm{e}^{-2}t^{2.5} + 1.6848\mathrm{e}^{-1}t^{2} - 5.1345\mathrm{e}^{-1}t^{1.5} + 9.2960\mathrm{e}^{-1}t - 1.1168t^{0.5} + 1 \qquad (47)$$

بأخذ قيم مختلفة لـt وتعويضهم في متسلسلة الحل(47) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية وكما موضح في الجدول (3) .

نفرض أن $t^{0.5} = x$ ثم نعوضها في متسلسلة الحل (47) نحصل على :

$$y^{*}(x) = -2.3398\mathrm{e}^{-2}x^{5} + 1.6848\mathrm{e}^{-1}x^{4} - 5.1345\mathrm{e}^{-1}x^{3} + 9.2960\mathrm{e}^{-1}x^{2} - 1.1168x^{1} + 1 \qquad (48)$$

ألان نقوم بحل متسلسلة الحل الناتجة (48) بتقريبات بادي [4/3] ثم نفرض أن $t^{0.5}$ =x نحصل على :

$$[4/3] = \frac{1 - 8.0636e^{-1}t^{0.5} + 6.4102e^{-1}t - 3.0315e^{-1}t^{1.5} + 6.575 \quad e^{-2}t^{2}}{1 + 3.1042e^{-1}t^{0.5} + 7.477e^{-2}t + 1.030e^{-2}t^{1.5}} \qquad (49)$$

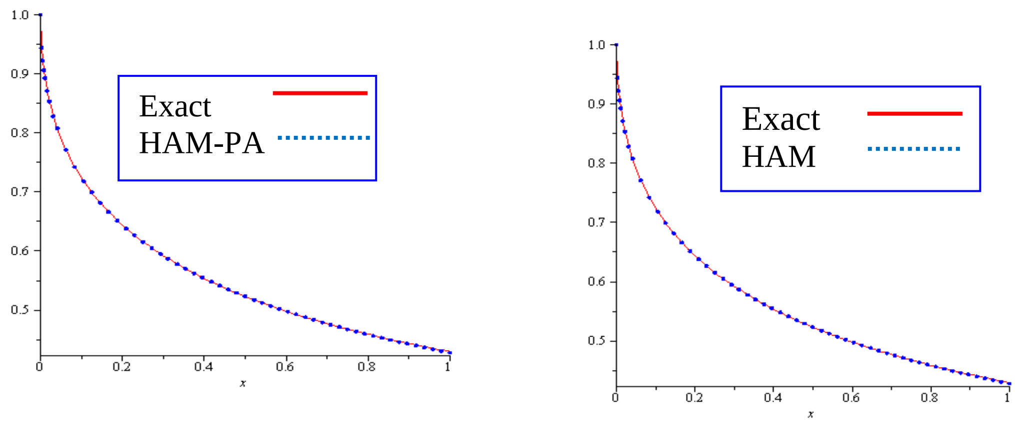
بأخذ قيم مختلفة لـ t وتعويضهم في متسلسلة بادي (49) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي وكما موضح في ألجدول(3)

جدول (3): يتضمن نتائج الحل المضبوط , الحلول التقريبية بطريقة الهوموتوبي و الحلول التقريبية لمتسلسلة بادي (49)عند قيم t المختلفة.

T	Exact Solution	Approximate Solution using HAM	Approximate Solution using HAM-PA
0	1	1	1
0.1	$7.2357e^{-1}$	$7.2349e^{-1}$	$7.2350e^{-1}$
0.2	$6.4378e^{-1}$	$6.4352e^{-1}$	$6.4354e^{-1}$
0.3	$5.9202e^{-1}$	$5.9181e^{-1}$	$5.9183e^{-1}$
0.4	$5.5362e^{-1}$	$5.5353e^{-1}$	$5.5354e^{-1}$
0.5	$5.23211e^{-1}$	$5.2321e^{-1}$	$5.2322e^{-1}$
0.6	$4.9818e^{-1}$	$4.9818e^{-1}$	$4.9828e^{-1}$
0.7	$4.7706e^{-1}$	$4.7691e^{-1}$	$4.7698e^{-1}$
0.8	$4.5899e^{-1}$	$4.5848e^{-1}$	$4.5858e^{-1}$
0.9	$4.4347e^{-1}$	$4.4224e^{-1}$	$4.4238e^{-1}$
1.0	$4.3005e^{-1}$	$4.2775e^{-1}$	$4.2796e^{-1}$

الجدول(**4**) يوضح الفرق بين متوسط مربع الخطأ بطريقة الهوموتوبي التحليلية للمتسلسلة (**47**) وطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي [**4/3**].

MSE- HAM	$6.4457e^{-7}$
MSE - PA- HAM	$5.4329e^{-7}$



(b) (a)

الشكل(2) : مقارنة بين الحل المضبوط والطرق المستخدمة عندما $m = 6$, $\alpha = 0.5$

(a) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية

(b) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية _ تقريبات بادي

ثالثا:

بالتعويض عن $\alpha = 0.75$، $h = -0.5$ في متسلسلة الحل $y(t)$ نحصل على:

$$y(t) = -2.3925\mathrm{e}^{-4}\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}t^{3.75} + 5.7430\mathrm{e}^{-3}\pi\sqrt{3}t^{3} - 1.1065\mathrm{e}^{-1}\sqrt{\pi}t^{2.25} + 6.1120\mathrm{e}^{-1}t^{1.5} - 1.0540t^{0.75} + 1 \qquad (50)$$

بأخذ قيم مختلفة لـ t وتعويضهم في متسلسلة الحل $y(t)$ نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية وكما موضح في الجدول (5) .

لحل المتسلسلة (50) نفرض أن $t^{0.75} = x$ ثم نعوضها في متسلسلة الحل (50) نحصل على :

$$y^{*}(x) = -2.3925\mathrm{e}^{-4}\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}x^{5} + 5.7430\mathrm{e}^{-3}\pi\sqrt{3}x^{4} - 1.1065\mathrm{e}^{-1}\sqrt{\pi}x^{3} + 6.1120\mathrm{e}^{-1}x^{2} - 1.0540x^{1} + 1 \qquad (51)$$

الان نقوم بحل متسلسلة الحل الناتجة $y^*(x)$ بتقريبات بادي $[2/2]$ ثم فرض أن $x = t^{0.75}$ نحصل على :

$$[2/2] = \frac{1 - 5.3294e^{-1}t^{0.75} + 1.7801e^{-1}t^{1.5}}{1 + 5.2111e^{-1}t^{0.75} + 1.1609e^{-1}t^{1.5}} \quad (52)$$

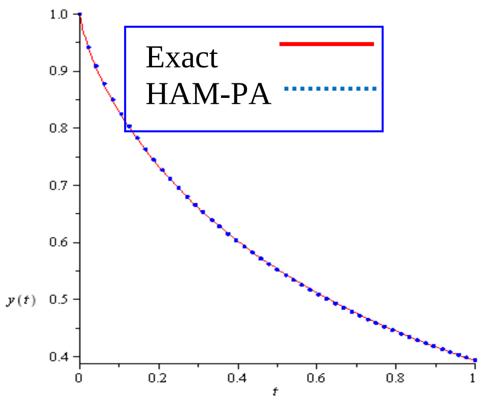
بأخذ قيم مختلفة لـ t وتعويضهم في متسلسلة بادي (52) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي وكما موضح في ألجدول(5) .

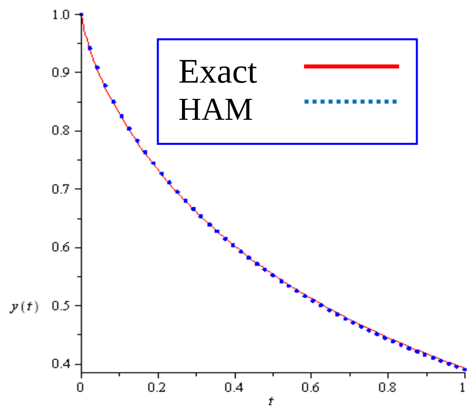
جدول (5): يتضمن نتائج الحل المضبوط , الحلول التقريبية بطريقة الهوموتوبي و الحلول التقريبية لمتسلسلة بادي (52)عند قيم t المختلفة.

t	Exact Solution	Approximate Solution using Reliable HAM	Approximate Solution using HAM-PA
0	1	1	1
0.1	$8.2825e^{-1}$	$8.3081e^{-1}$	$8.3081e^{-1}$
0.2	$7.3258e^{-1}$	$7.3442e^{-1}$	$7.3444e^{-1}$
0.3	$6.6021e^{-1}$	$6.6091e^{-1}$	$6.6098e^{-1}$
0.4	$6.0212e^{-1}$	$6.0144e^{-1}$	$6.0161e^{-1}$
0.5	$5.5360e^{-1}$	$5.5187e^{-1}$	$5.5225e^{-1}$
0.6	$5.1228e^{-1}$	$5.0980e^{-1}$	$5.1050e^{-1}$
0.7	$4.7655e^{-1}$	$4.7361e^{-1}$	$4.7477e^{-1}$
0.8	$4.4529e^{-1}$	$4.4218e^{-1}$	$4.4396e^{-1}$
0.9	$4.1768e^{-1}$	$4.1465e^{-1}$	$4.1725e^{-1}$
1.0	$3.9312e^{-1}$	$3.9037e^{-1}$	$3.9400e^{-1}$

الجدول(6) يوضح الفرق بين متوسط مربع الخطأ بطريقة الهوموتوبي التحليلية للمتسلسلة (50) وطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي $[2/2]$.

MSE- HAM	$4.9989e^{-6}$
MSE - PA- HAM	$1.9627e^{-6}$





(b) (a)

الشكل(3) : مقارنة بين الحل المضبوط والطرق المستخدمة عندما $m = 6$, $\alpha = 0.75$

(a) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية

(b) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية _ تقريبات بادي

مثال $(\mathbf{2})$ $[\mathbf{20}]$:

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية الخطية ذات الرتبة الكسرية

$$D^{0.5}y(t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)}t^{1.5}, \qquad (53)$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(0) = 0$$

والحل المضبوط للمسألة (53) هو

$$y(t) = t^2$$

<u>الحل:</u>

نفرض أن $y_0(t) = 0$ وبالاستعانة بالمعادلة (35) نستطيع تركيب الهوموتوبي كالاتي :

$$R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right) = D^{0.5}y_{m-1}(t) + y_{m-1}(t) - \left(t^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)}t^{1.5}\right)(1 - x_m)$$

الان باستعمال معادلة التشوه (deformation equation) من الرتبة m عندما $m \geq 1$ تصبح:

$$y_m(t) = \chi_m\, y_{m-1}(t) - \chi_m \sum_{j=0}^{0} {y_{m-1}}^{(j)}(0^+)\frac{t^j}{j!} + h\, J^{0.5}[\, R_{m-1}\left(\vec{y}_{m-1}(t)\right)] \qquad (54)$$

عندما $m = 1$, بالتعويض في المعادلة (54) نحصل على :

$$y_1(t) = \frac{-\Gamma(3)ht^{2.5}}{\Gamma(3.5)} - ht^2$$

وعندما $m = 2{,}3{,}\ldots.$ فإن,

$$y_m(t) = y_{m-1}(t) + h\,[y_{m-1}(t) + J^{0.5}y_{m-1}(t)] \qquad (55)$$

بالتعويض عن $m = 2$ في المعادلة والاستعانة بخصائص تكامل ريمان ليوفيل نحصل على :

$$y_2(t) = y_1(t) + h[y_1(t) + J^{0.5}y_1(t)]$$

$$y_2(t) = -h(1+2h)\,\frac{\Gamma(3)t^{2.5}}{\Gamma(3.5)} - h(1+h)t^2 - \frac{h^2\Gamma(3)t^{4.5}}{\Gamma(5.5)}$$

بالتعويض عن $m = 3$ في المعادلة (55)نحصل على:

$$y_3(t) = y_2(t) + h[y_2(t) + J^{0.5}y_2(t)]$$

$$y_3(t) = -h(1 + 4h + 3h^2)\,\frac{\Gamma(3)t^{2.5}}{\Gamma(3.5)} - h(1 + 2h + h^2)t^2 - \frac{h^2(2+3h)\Gamma(3)t^{4.5}}{\Gamma(5.5)} - \frac{h^3\Gamma(3)t^{5.5}}{\Gamma(6.5)}$$

الآن بجمع الحلول التقريبية $y_3(t)$ ،$y_2(t)$ ،$y_1(t)$ ، $y_0(t)$ نحصل على حل تقريبي $y(t)$ إذ أن :

$$y(t) = \sum_{m=0}^{3} y_m(t) = -h[1 + (1 + 2h) + (1 + 4h + 3h^2)\frac{\Gamma(3)t^{2.5}}{\Gamma(3.5)} - \cdots - \frac{h^3\Gamma(3)t^{5.5}}{\Gamma(6.5)} \qquad (56)$$

ثم بالتعويض عن $h = -0.7$ في متسلسلة الحل (56) نحصل على :

$$y(t) = 5.8976e^{-2}t^{3.5} - 1.4699\,e^{-1}t^3 + 1.1374\,e^{-1}t^{2.5} + 9.7300e^{-1}t^2 \qquad (57)$$

بأخذ قيم مختلفة لـt وتعويضهم في متسلسلة الحل (57) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية وكما موضح في الجدول (7) .

نفرض أن $x = t^{0.5}$ ثم نعوضها في متسلسلة الحل (57) نحصل على :

$$y^*(x) = 5.8976e^{-2}x^7 - 1.4699\,e^{-1}x^6 + 1.1374\,e^{-1}x^5 + 9.7300e^{-1}x^4 \qquad (58)$$

ألان نقوم بحل متسلسلة الحل الناتجة $y^*(x)$ بتقريبات بادي [5/6] ثم فرض أن $x = t^{0.5}$ نحصل على :

$$[5/6] = \frac{9.7300e^{-1}t^2 + 5.4876e^{-1}t^{2.5}}{1 + 4.4709e^{-1}t^{0.5} + 9.8815e^{-2}t - 4.6178e^{-3}t^{1.5} - 1.1630e^{-2}t^2 - 5.3275e^{-3}t^{2.5} - 8.5452e^{-4}t^3} \quad (59)$$

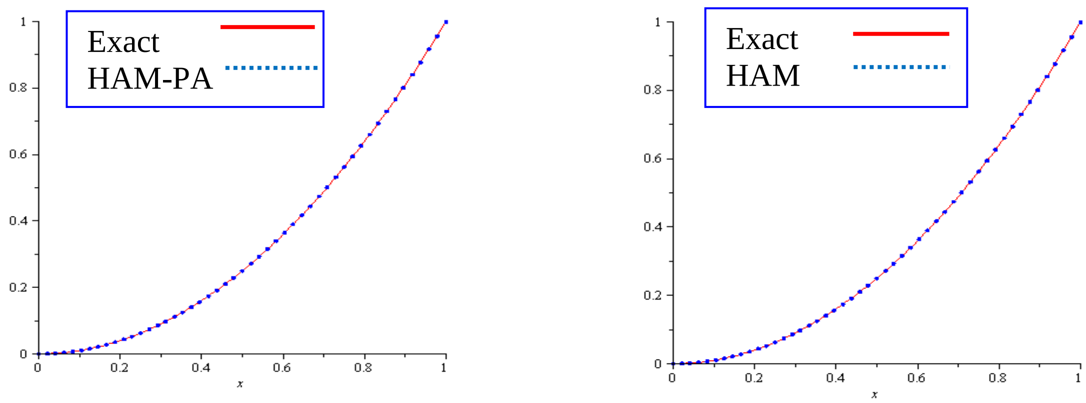
بأخذ قيم مختلفة لـ t وتعويضهم في متسلسلة بادي (59) نحصل على حلول تقريبية بطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي وكما موضح في الجدول(7)

جدول (7): يتضمن نتائج الحل المضبوط , الحلول التقريبية بطريقة الهوموتوبي و الحلول التقريبية لمتسلسلة بادي (59)عند قيم t المختلفة.

t	Exact Solution	Approximate Solution using HAM	Approximate Solution using HAM-PA
0	0	0	0
0.1	$1e^{-2}$	$9.9613e^{-3}$	$9.9613e^{-2}$
0.2	$4e^{-2}$	$3.9989e^{-2}$	$3.9989e^{-2}$
0.3	$9e^{-2}$	$9.0080e^{-2}$	$9.0080e^{-2}$
0.4	$1.6e^{-1}$	$1.6016e^{-1}$	$1.6016e^{-1}$
0.5	$2.5e^{-1}$	$2.5019e^{-1}$	$2.5019e^{-1}$
0.6	$3.\ 6e^{-1}$	$3.6011e^{-1}$	$3.6012e^{-1}$
0.7	$4.9e^{-1}$	$4.8990e^{-1}$	$4.8992e^{-1}$
0.8	$4.6e^{-1}$	$6.3957e^{-1}$	$6.3961e^{-1}$
0.9	$8.1e^{-1}$	$8.0915e^{-1}$	$8.0924e^{-1}$
1.0	1	$9.9871e^{-1}$	$9.9887e^{-1}$

الجدول(8) يوضح الفرق بين متوسط مربع الخطأ بطريقة الهوموتوبي التحليلية للمتسلسلة (57) وطريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي [5/6] .

MSE- HAM	$2.3956e^{-7}$
MSE - PA- HAM	$1.8986e^{-7}$



(b) (a)

الشكل(4) : مقارنة بين الحل المضبوط والطرق المستخدمة عندما $m = 4$, $\alpha = 0.5$

(a) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية

(b) : الحل المضبوط مع طريقة هوموتوبي التحليلية _ تقريبات بادي

6- الاستنتاج:

1- في هذا البحث أثبتنا كفاءه طريقة هوموتوبي التحليلية مع تقريبات بادي لحل مسأئل القيم الابتدائية ذات الرتب الكسرية إذ اظهرت النتائج مدى إمكانية تقريبات بادي لتحسين نتائج طريقة هوموتوبي التحليلية .

2- عندما قيمة $\alpha = 0.5$ في المثال الاول كانت النتائج المستحصلة أفضل .

3- تقريب بادي يحل فقط المتسلسلات ذات ألاسس الطبيعية ولذلك استخدمنا الفرضية $t^{\omega} = x$ حيث ω عدد كسري المذكوره في البند الرابع التحويل المتسلسلة ذات الاسس الكسرية الى اسس طبيعية.

7- المصادر

[1] Bhrawy, A. H., and Alghamdi, M., A. B. V P's, 2012(1), 62(2012).

[2] Choudhury, M. D., Chandra, S., Nag, S., Das, S., and Tarafdar, S.. Physicochemical and Engineering Aspects, 407, 64-70(2012).

[3] Flandoli, F., and Ciprian A.T. Journal of Functional Analysis 258.1 :279-306 (2010)

[4] Ghomashi, A., Soheil S. and Hakimzadeh A. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 26:367-378(2014).

[5] Magin, R. L., Ingo, C., Colon-Perez, L., Triplett, W., and Mareci, T. H. Microporous and Mesoporous Materials, 178, 39-43 (2013).

[6] Bhrawy, A., Alhamed, Y., Baleanu, D. and Al-Zahrani, A. Fractional Calculus and Applied Analysis, 17(4), 1137-1157(2014).

[7] Liao, Sh J. Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University (1992).

[8] Noor, M. A. and Syed Tauseef Mohyud-Din. International Journal of Nonlinear Science8.1: 27- 31(2009).

[9] Jafari H. and Seifi, S. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(5), 2006-2012 (2009).

[10] Mohammed, O. H. Journal of Al-Nahrain University, 13, 149-155(2010).

[11] Momani, S. and Zaid O. Journal of Computational and Appl. Math. 207.1: 96-110(2007).

[12] Zurigat M., Momani S., and Alawneh A. Computers and Mathematics with Applications, 59(3), 1227-1235(2010).

[13] Bhrawy, A., Alhamed, Y., Baleanu, D., and Al-Zahrani, A. Fractional Calculus and Applied Analysis, 17(4), 1137-1157(2014).

[14] Singh, Brajesh K, and Pramod K. arXiv preprint arXiv:1611.07171 (2016).

[15] Ogunlaran, O. M. and Sagay-Yusuf H. British Journal of Mathematics & Computer Science 14.3: 1(2016).

[16] Drucker, H., Burges, C. J., Kaufman, L., Smola, A. J., and Vapnik, V.. ,In Advances in neural information processing systems (pp. 155-161) (1997) .

[17] Al-Hayani, W., Alzubaidy, L., and Entesar, A. Appl. Math, 11(2), 407-416(2017).

[18] Odibat, Z. and El-ajou A. IAENG International Journal of Applied Math 40.2 (2010).

[19] Esmaeili, S., Shamsi, M., and Luchko, Y. Computers and Mathematics with Applications, 62(3), 918-929(2011).

[20] Pandey R.K., Bhardwaj A. B. H. I. N. A. V and Syam M., J. Fract. Calc. Appl 5.1: 129-145(2014).