كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة الموصل
تنمية الرافدين العدد ١٠٣ مجلد ٣٣ لسنة ٢٠١١
ص ص[٤٧-٥٧]

مقارنة بين طريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة مع التطبيق*

الدكتور صفاء يونس الصفاوي
أستاذ مساعد- قسم الإحصاء
كلية علوم الحاسبات والرياضيات-جامعة الموصل
SSfawee@Yahoo.com

طلال عبد الرزاق الحسو
باحث
Talal_alhasso@Yahoo.com

المستخلص

تم في هذا البحث معالجة مشكلة تعدد العلاقة الخطية بين المتغيرات التوضيحية في أنموذج الانحدار المتعدد مستخدمين طريقة انحدار الحرف المعدلة، وكان الباحث Swindle (1976) أول من قدمها، وتستند على إضافة معلومات مسبقة عن متجه المعلمات b إلى المقدر الذي قدمه Hoerl and Kennard (1970) وتم اختيارنا لتلك المعلومات المسبقة لتمثل متجه الوسط الحسابي لمكونات متجه مقدر المربعات الصغرى للمتجه b ، وتم تحديد القيمة المثلى لعامل الحرف للطريقة المعدلة والتي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر الناتج أقل ما يمكن .

أجريت مقارنة بين مقدرات المربعات الصغرى ومقدرات انحدار الحرف المعدلة لبيانات تم توليدها بأسلوب مونت كارلو لخمسة عشر متغيراً توضيحياً بأحجام عينات مختلفة وبافتراض قيم مختلفة لمعاملات ارتباطات بسيطة وباختيار قيم مختلفة للمتجه b و σ^2 ، وتحت هذه الافتراضات استنتجنا أن طريقة الحرف المعدلة أفضل من طريقة المربعات الصغرى.

الكلمات المفتاحية: المربعات الصغرى، انحدار الحرف، المقارنة بين Least Squares & Ridge Regression

* البحث مستل من رسالة الماجستير الموسومة " مقارنة بين طريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة مع التطبيق" مقدمة إلى كلية علوم الحاسبات والرياضيات-جامعة الموصل.

تأريخ استلام البحث ٢٠٠٩/٤/٢١
تأريخ قبول النشر ٢٠١٠/٢/٢٣

A Comparison between Least Squares and Adjusted Ridge Regression Methods with Application

Safaa Y. Saffawi (PhD)
Assistant Professor
Department of Statistics
University of Mosul

Talal A. Al-Hasso
Researcher

Abstract

In this paper, the problem of combating multicollinearity between predictor variables in multiple linear regression model has been studied. This treatment has been done by using the adjusted ridge regression which is suggested by Swindle (1976). This method depends on adding a vector of prior information about the vector of regression parameters $\underline{\beta}$ to the estimator proposed by (Hoerl & Kennard, 1970). We selected the vector of prior information to represent the average of Ordinary Least Squares estimator for $\underline{\beta}$. The optimal value for ridge parameter that makes the mean square error of the adjusted estimator minimum has been selected. A comparison between the ordinary least squares and the adjusted estimators has been done. A Monte Carlo simulation is made for 15 predictor variables by choosing different sample sizes simple correlation coefficients, $\underline{\beta}$ and σ^2 and we concluded that the adjusted estimators is better than the ordinary least squares estimators .

<u>Key Words</u>: Least Squares, Adjusted Ridge, Comparison between Least Squares and Adjusted Ridge.

المقدمة

تعد طريقة المربعات الصغرى من الطرائق المهمة لتقدير معلمات أنموذج الانحدار، فضلاً عن السهولة والبساطة في الاستخدام، ولهذه الطريقة فروض أساسية تعتمد عليها في إيجاد مقدرات ظاهرة معينة، وعند إسقاط أحد هذه الفروض فإن طريقة المربعات الصغرى تفقد خاصيتها كونها تمتلك أفضل مقدرات خطية غير متحيزة.

وقد تواجه الباحث مشكلات كثيرة في عدم توافر فروض التحليل عند استخدام طريقة المربعات الصغرى، منها مشكلة تعدد العلاقة الخطية (عدم استقلالية أعمدة مصفوفة المتغيرات التوضيحية) التي بدورها تؤثر في نتائج المقدرات، وفي هذه الحالة يتم اللجوء إلى إيجاد طرائق أخر لتقدير معلمات أنموذج الانحدار، ومن هذه الطرائق طريقة انحدار الحرف، إذ إن هذه الطريقة تعطي مقدرات ونتائج جيدة مبنية على حساب اقل مجموع مربعات خطأ.

طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

تعد طريقة المربعات الصغرى من الطرائق المهمة والأكثر شيوعاً لتقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي المتعدد، إذ تتميز هذه الطريقة بخصائص جيدة جعلتها من أفضل الطرائق وأوسعها استعمالاً، وتستند هذه الطريقة إلى مبدأ تصغير مجموع مربعات انحرافات القيم الحقيقية عن القيم المقدرة إلى أقل ما يمكن.

وتتمثل المعادلة العامة لأنموذج الانحدار الخطي المتعدد على وفق الصيغة الآتية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + U_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n \ ; \ j=1,2,\dots,p$$

حيث ان:

n : عدد المشاهدات

p : عدد المتغيرات التوضيحية

إن الصيغة الرياضية للحصول على مقدرات المربعات الصغرى لمعلمات نموذج الانحدار تكون كالآتي:

$$\hat{\beta}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y \quad \ldots\ldots(1)$$

خواص مقدرات المربعات الصغرى

أولاً- عدم التحيز

$$E(\underline{\hat{\beta}}_{LS}) = \underline{\beta} \quad \ldots\ldots(2)$$

ثانياً- التباين

$$Var(\underline{\hat{\beta}}_{LS}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} \quad \ldots\ldots(3)$$

ثالثاً- الخطية

بما أن $(X'X)^{-1}X'$ هي مصفوفة أعداد ثابتة ، وأن المقدر $\underline{\hat{\beta}}_{LS}$ دالة خطية في $\underline{Y}$ فإن $(X'X)^{-1}X'$ يعد معاملاً للمتغير $\underline{Y}$ ، وبذلك فإن مقدرات المربعات الصغرى مقدرات خطية في مشاهدات متغير الاستجابة .

رابعاً- متوسط مربعات الخطأ

$$MSE(\hat{\beta}_{LS}) = \sigma^2 tr(X'X)^{-1} \quad \ldots\ldots(4)$$

وفي حالة تمثيلها بدلالة الجذور والمتجهات المميزة يكون متوسط مربعات الخطأ بالصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\beta}_{LS}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{-1} \quad \ldots\ldots(5)$$

حيث (λ_j) تمثل الجذور المميزة لمصفوفة $(X'X)$

انحدار الحرف غير المتحيز Unbiased Ridge Regression Method

في العام ١٩٧٦ عمم الباحث Swindle أنموذج Horel & Kennard، وذلك بإضافة معلومات مسبقة (أولية) أساسية إلى الطريقة المتحيزة لانحدار الحرف، وبذلك تصبح المعادلة (١) بالشكل الآتي:

$$\hat{\beta}(KI,J) = (X'X + KI_P)^{-1}(X'Y + KJ) \quad ....(6)$$

حيث أن J هو متجه ثابت للمعلومات المسبقة المقدرة لـ β والهدف من إضافة الثابت K ومتجه المعلومات المسبقة J إلى المتجه $X'Y$ هو تصغير عناصر القطر الرئيس للمصفوفة $(X'X + KI_P)^{-1}$، تم حساب قيمة المعلومات المسبقة J من خلال الوسط الحسابي لمعلمات طريقة المربعات الصغرى مضروباً بمتجه ثابت أحادي، ويعبر عنه رياضياً بالصيغة الآتية:

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{P} \beta_{iLS}}{P} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad ....(7)$$

المعلومات المسبقة (الأولية) Prior Information

تعريف (Pliskin,1987)

إذا كان حاصل طرح متوسط مربعات الخطأ لمعلمات طريقة انحدار الحرف غير المتحيزة عن متوسط مربعات الخطأ لمعلمات طريقة انحدار الحرف المتحيزة موجباً، في هذه الحالة يعرف متجه المعلومات المسبقة J بأنه المتوسط المسبق الجيد ولجميع قيم معلمة الحرف (K) الموجبة عندما تكون كل من المقدرات $\hat{\beta}_{(K)}$ و $\hat{\beta}_{(KI,J)}$ محسوبة اعتماداً على قيمة معلمة الحرف (K) نفسها أو لكليهما، ويعبر عنها رياضياً بالصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\beta}_{(K)}) - MSE(\hat{\beta}_{(KI,J)}) > 0 \quad .... (8)$$

فإذا كانت K=0 فإن مقدرات طريقتي انحدار الحرف المتحيزة وغير المتحيزة هي نفسها مقدرات طريقة المربعات الصغرى، وبذلك تصبح المعادلة (١) و (٦) بالشكل الآتي:

$$\hat{\beta}_{(K)} = \hat{\beta}_{(0)} = (X'X)^{-1}X'Y = \hat{\beta}_{LS}$$

$$\hat{\beta}_{(KI,J)} = \hat{\beta}_{(0,J)} = (X'X)^{-1}X'Y = \hat{\beta}_{LS}$$

وبذلك نحصل على $\hat{\beta}_{LS} = \hat{\beta}_{(K)} = \hat{\beta}_{(KI,J)}$ ولجميع قيم J، وبذلك فإن القيد على معلمة الحرف هو K>0 .

المعلومات المسبقة (الأولية) وعلاقتها ببيانات العينة

Prior Information Related to Sample Data

في المجال التطبيقي قد لا نستطيع الحصول على تقدير لمتجه المعلومات الأولية، لذلك يمكن استخدام المتجه الأولي المتعلق بالعينة، وبذلك يمكن الحصول على تقدير لمتجه المعلومات الأولية من خلال هذه الإمكانية، إذ يمكن استخدام المتوسط الحسابي لمعلمات طريقة المربعات الصغرى (OLS) أي $\bar{\hat{\beta}}$ كعناصر للمتجه الأولي:

$$\hat{\beta}_R = (X'X + KI)^{-1}(X'Y + KJ)$$

$$J = \frac{1}{P}\begin{bmatrix} \sum \hat{\beta}_{iLs} \\ \sum \hat{\beta}_{iLs} \\ \vdots \\ \sum \hat{\beta}_{iLs} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\therefore \hat{\beta}_R = (X'X + KI)^{-1}(I + \frac{K}{P}B)X'Y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_P \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_P \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_P \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

إذ أن B مصفوفة و b_j تمثل مجموع العمود j من أعمدة المصفوفة $(X'X)^{-1}$

$$E(\hat{\beta}_R) = (X'X + KI)^{-1}(I + \frac{K}{P}B)X'X\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$\therefore Var(\hat{\beta}_R(KI,J)) = \sigma^2 (X'X + KI)^{-1}(I + \frac{K}{P}B)X'X(I + \frac{K}{P}B)'(X'X + KI)^{-1} \ldots(13)$$

ولإيجاد الـ MSE نأخذ الصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\beta}_R(KI,J)) = trVar(\hat{\beta}_R(KI,J)) + (bais(\hat{\beta}_R(KI,J))^2$$

$$\therefore MSE=\sigma^2\sum_{j=1}^{P}\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+K)^2}+\frac{2K}{P}\sum_{j=1}^{P}\frac{\lambda_j a_{.j}}{(\lambda_j+K)^2}+\frac{K^2}{P^2}\sigma^2\sum_{j=1}^{P}\frac{\lambda_j(P\sum_{r=1}^{P}a_{.r})}{(\lambda_j+K)^2}+\frac{K^2}{P^2}$$

$$\beta'\beta(P\sum_{r=1}^{P}a_{.r}{}^2)\sum_{j=1}^{P}\frac{\lambda_j{}^2}{(\lambda_j+K)^2}+K^2\,\beta'\beta\sum_{j=1}^{P}\frac{1}{(\lambda_j+K)^2}-\frac{2K^2}{P}\beta'\beta$$

$$\sum_{j=1}^{P}\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+K)^2}\qquad ....(14)$$

ولغرض إيجاد قيمة معلمة الحرف (K) رياضياً نأخذ الاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى K بحيث نحصل على ما يأتي:

$$\frac{\partial MSE}{\partial K}=0$$

$$\therefore K=\frac{\left[P^2\sigma^2-\sigma^2\sum_{r=1}^{P}a_{.r}\right]}{\left[P\sigma^2\sum_{r=1}^{P}a_{.r}{}^2-\sigma^2\sum_{r=1}^{P}a_{.r}+\beta'\beta\sigma^2\sum_{r=1}^{P}a_{.r}{}^2\sum_{j=1}^{P}\lambda_j^2+P^2\beta'\beta-2P\beta'\beta\right]}\quad ..(15)$$

مقارنة مقدرات طريقتي المربعات الصغرى و انحدار الحرف

يستخدم معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين الطريقتين، إذ إن أفضل طريقة هي التي تمتلك أقل خطأ (MSE) إذ من الملاحظ أن الـ (MSE) بطريقة انحدار الحرف يكون اقل من الـ (MSE) باستخدام طريقة المربعات الصغرى ولجميع قيم معلمة الحرف $K>0$.

نعوض عن قيمة معلمة الحرف K والتي افترضها العالم Swindel عام ١٩٧٦، حيث ذكر أن معلمة الحرف تقع ضمن فترة محددة عرفها في الحالات الآتية:

$$K=\begin{cases}\dfrac{p\sigma^2}{(\hat{\beta}-J)'(\hat{\beta}-J)-\sigma^2 tr(X'X)^{-1}} & ,\ if\left[(\hat{\beta}-J)'(\hat{\beta}-J)-\sigma^2 tr(X'X)^{-1}\right]>0\\[2ex] \dfrac{p\sigma^2}{(\hat{\beta}-J)'(\hat{\beta}-J)} & ,\quad o.W\end{cases}$$

لاحظ الباحث (Pliskin,1987) أنه في حالة استخدام متجه المعلومات المسبقة J كمتجه ثابت، وكانت قيمة معلمة الحرف k الثابتة هي نفسها في الحالتين $\hat{\beta}(kI,J)$

و $\hat{\beta}(kI,0)$، فإن متوسط مربعات الخطأ لمقدرات طريقة الحرف غير المتحيزة أقل من متوسط مربعات الخطأ لمقدرات طريقة الحرف المتحيزة عندما J=0 وذلك باستخدام قيمة معلمة الحرف K نفسها أي إن:

$$MSE(\hat{\beta}(kI,J)) \le MSE(\hat{\beta}(kI,0)) \quad \ldots (16)$$

حيث أن:

$$MSE(\hat{\beta}(kI,J)) = K^2 \sum_{j=1}^{P} \frac{(V_j'(\beta - J))^2}{(\mathbf{l}_j + K)^2} + \sigma^2 \sum_{j=1}^{P} \frac{\mathbf{l}_j}{(\mathbf{l}_j + K)^2} \quad \ldots (17)$$

في حالة $K=kI_P$ حيث $0<k<1$

وإن:

$$MSE(\hat{\beta}(KI,J)) = \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{(\mathbf{l}_j + K)^2} (\sum_{j=1}^{P} K_j(\beta_j - J))^2 + \sigma^2 \sum_{j=1}^{P} \frac{\mathbf{l}_j}{(\mathbf{l}_j + K)^2} \quad \ldots (18)$$

في حالة $K=diag(k_i)$.

وبتعويض قيمة K بالمعادلة (١٨) نحصل على:

$$MSE(\hat{\beta}(KI,J)) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma^2}{(\mathbf{l}_j + K)} \quad \ldots (19)$$

وبما أن

$$MSE(\hat{\beta}_{iLS}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma^2}{\mathbf{l}_j} \quad \ldots (20)$$

وبطرح المعادلة (١٩) من المعادلة (٢٠) نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma^2}{\mathbf{l}_j} - \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma^2}{(\mathbf{l}_j + K)} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{\mathbf{l}_j} - \frac{1}{\mathbf{l}_j + K}\right)$$

وحيث أن قيمة $k>0$ فإن $MSE(\hat{\beta}_{iLS}) > MSE(\hat{\beta}(KI,J))$

الجانب التطبيقي

تم استخدام برنامج الـ (Matlab 6.5) لتوليد البيانات عن طريق استخدام أسلوب مونت كارلو للمحاكاة، إذ يتم توليد البيانات من التوزيع الطبيعي القياسي، والجداول الآتية تبين قيم الـ MSE للطريقتين السابقتين باستخدام المتجهات المميزة المقابلة لأعلى وأصغر قيمة مميزة كمتجهات للمعلومات الأولية، حيث تم التطبيق على ١٥ متغيراً وبأحجام عينات (٣٠،٥٠،١٠٠) حيث تبين أن قيمة الـ MSE لطريقة انحدار الحرف المعدلة كانت أصغر من قيمة الـ MSE لطريقة المربعات الصغرى ولجميع قيم $K>0$:

التجربة الأولى: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأعلى قيمة مميزة

الجدول ١
قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة الأولى

Corr. / MSE($\hat{\beta}$)	N	0.5	0.75	0.9
LS	30	2.1908	12.388	49.9
RR		1.9044	7.2362	12.934

التجربة الثانية: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأصغر قيمة مميزة

الجدول ٢
قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة الثانية

Corr. / MSE($\hat{\beta}$)	N	0.5	0.75	0.9
LS	30	2.5313	3.9044	8.381
RR		2.1605	3.1323	5.327

التجربة الثالثة: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأصغر قيمة مميزة

الجدول ٣
قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة الثالثة

Corr. / MSE($\hat{\beta}$)	N	0.5	0.75	0.9
LS	50	0.94734	1.5428	3.4126
RR		0.86759	1.3409	2.5855

التجربة الرابعة: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأعلى قيمة مميزة

الجدول ٤

قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة الرابعة

Corr. / $MSE(\hat{\beta})$	N	0.5	0.75	0.9
LS	50	1.0307	5.9005	21.871
RR		0.93715	3.8278	7.7848

التجربة الخامسة: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأصغر قيمة مميزة

الجدول ٥
قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة الخامسة

Corr. / $MSE(\hat{\beta})$	N	0.5	0.75	0.9
LS	100	0.36913	0.56834	1.2363
RR		0.3583	0.54217	1.1198

التجربة السادسة: مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما b تمثل المتجه المميز المقابل لأعلى قيمة مميزة

الجدول ٦
قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف المعدلة عند تطبيق التجربة السادسة

Corr. / $MSE(\hat{\beta})$	N	0.5	0.75	0.9
LS	100	0.45198	2.1247	7.6941
RR		0.43586	1.8043	4.7534

الاستنتاجات والتوصيات

- الاستنتاجات

من خلال هذا البحث توصلنا إلى الاستنتاجات الآتية:

١. إن مقدرات المعلمات بطريقة انحدار الحرف وبتوافر المعلومات المسبقة أفضل من مقدرات المربعات الصغرى لجميع أحجام العينات المذكورة في التجارب السابقة ولجميع قيم الارتباط (α) المختلفة.

٢. في حالة استخدام مقدرات المعلمات لطريقتي المربعات الصغرى والحرف عندما β تمثل المتجه المميز المقابل لأصغر قيمة مميزة نجد أن الإشارات متشابهة، إذ تعد طريقة انحدار الحرف باستخدام المعلومات المسبقة ناجحة في معالجة مشكلة تعدد العلاقة الخطية. أما في حالة استخدام مقدرات المعلمات عندما β تمثل المتجه المميز المقابل لأعلى قيمة مميزة، فإننا نجد أن الإشارات للمعلمات تكون مختلفة عندما يكون حجم العينة $n = 30$ فقط وعند زيادة حجم العينة وقيمة الارتباط سوف يتم التغلب على هذه المشكلة، وذلك من خلال استقرار الإشارات لجميع المعلمات.

- التوصيات

واعتماداً على ما توصل إليه الباحثان من استنتاجات يوصى بما يأتي:

١. استخدام طريقة انحدار الحرف في الدراسات التي تعاني متغيراتها من تعدد العلاقة الخطية مهما كانت قيمة الارتباط بين المتغيرات التوضيحية، وذلك لأنها تعطي تبايناً مناسباً ومقدراتها تمتلك أقل متوسط مربعات خطأ.

٢. باستخدام المعلومات المسبقة نوصي باستخدام قيمة معلمة الحرف k كما في المعادلة (15) كونها قيمة مناسبة لـ k وسوف يؤدي استخدامها إلى إعطاء تقديرات أكثر دقة من تقديرات المربعات الصغرى.

المراجع

أولاً- المراجع باللغة العربية

١. دبدوب، مروان عبد العزيز والنعيمي، أسوان محمد طيب، ٢٠٠٥، " اختيار المتغيرات في انحدار الحرف"، رسالة ماجستير (غير منشورة)، جامعة الموصل، العراق.

٢. شاكر، صالح مؤيد، ١٩٩٨، " العلاقة بين انحدار الحرف والتحليل الذاتي لمصفوفة الارتباط المتضخمة"، مجلة تنمية الرافدين، جامعة الموصل، العراق.

٣. القصاب، موفق محمد وسعيد، هيفاء عبد الجواد، ١٩٩٥، "استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ العمومي لمقارنة مقدرات المربعات الصغرى والطرائق المتحيزة في الانحدار"، تنمية الرافدين، جامعة الموصل، العدد ٥٧.

٤. القصيمي، عزة مصطفى، ٢٠٠٠، "استخدام أسلوب المحاكاة في مقارنة مقدرات انحدار الحرف"، رسالة ماجستير (غير منشورة)، جامعة الموصل، العراق.

ثانياً- المراجع باللغة الأجنبية

1. Crouse, Robert H., Jin, Chun & Hanumara, R.C., (1995),“Unbiased Ridge Estimation With Prior Information and Ridge Trace” , Commun. Statistics, 24(9), pp 2341-2354

2. Dean, W.Wichem And Gilbert A. Churchill, (1978), "Acomparison of Ridge Estimators" , Technomrteics , 20(3) .
3. Draper,N.R. and Smith.H.,(1981), "Applied Regression Analysis", 2^{nd} edition, John Wiley and Sons, Canada.
4. Gunst, R.F.. Webster , J.T. And Mason , R.L., (1974),"Latent Root Regression Analysis" , Technometrics , 16(4) , P.P.513-533 .
5. Hoerl, A.E. and Kennard, R.W.,(1970a), "Ridge Regression: Biased Estimation For Nonorthogonal Problems", Technometrics , 12, P.P. 55-83.
6. Marquardt, D. W., "Generalized Inverses Ridge Regression Biased Linear Estimation and Nonlinear Estimation", Technometrics, 12(3), 1970, pp 591-613.
7. Mason, R.L.,(1986), "Latent Root Regression : A Biased Regression Methodology For Use With Collinear Predictor Variables", Commun. Statist. Theor. Math., 15(9), P.P.2663 .
8. Naylor, T.H.,Balintfy, J.L,Burdick,D.S.and Chu,K.,(1968), "Computer Simulation Techniques", John Wiley & Sons, New York.
9. Pliskin, L.J.,(1987), "A Ridge-Type Estimator and Good Prior Means", Commun. Statistics, 16(12), pp3427-3429.
10. Swindel, B.F.,(1976), "Good Ridge Estimators Based On Prior Information", Commun. Statistics , A5(11), pp 1065-1075.