كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة الموصل تنمية الرافدين العدد ٩٤ مجلد ٣١ لسنة ٢٠٠٩
ص ص[٣١٩-٣٣٤]

تحليل بيز لعمليات بواسون مع تطبيق عملي لعدد المرضى الواصلين إلى مستشفى السلام / الموصل

طه حسين علي الزبيدي
مدرس
كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة صلاح الدين

محمود محمد طاهر العبادي
مدرس مساعد
كلية علوم الحاسبات والرياضيات-جامعة الموصل
Mahmood81_tahr@yahoo.com

المستخلص

تم في هذا البحث دراسة عمليات بواسون وبالتحديد عدد الواصلين (الذي يتبع توزيع بواسون)، وأوقات الوصول البينية (التي تتبع التوزيع الأسي)، وأوقات الوصول (التي تتبع توزيع كاما) من وجهة نظر اسلوب بيز ذي المعلومات الغنية،أي استخدام الخبرة والتجارب السابقة التي تمثل التوزيع الأولي، فضلاً عن معلومات المشاهدات التي تمثل دالة الترجيح في إيجاد التوزيع النهائي لعمليات بواسون، ومن ثم تقدير معدل وتباين هذا التوزيع واستخدامه مع الأسلوب التقليدي في دراسة أعداد المرضى الواصلين إلى استشارية الكسور في مستشفى السلام/الموصل، اذ توصل الباحثان إلى إمكانية استخدام أسلوب بيز ذي المعلومات الغنية في دراسة العمليات العشوائية وخصوصاً عمليات بواسون.

Bayes's Analysis For Boisson Processes With Practical Application In Al-Salam Hospital/Mosul

Taha H. Al-Zubaidy
Lecturer
University of Salah Aldin

Mahmood M. Al-Abady
Assistant Lecturer
University of Mosul

Abstract

This paper studies the Boisson process, precisely the number of arrivals (according to the Boisson distribution) and inter - arrival times (according to the exponential distribution) and arrival times (according to the gamma distribution) from the point view of bayes statistics which is posterior in information, i.e., using the past experiences which represents the prior distribution, besides the direct data, which represents likelihood function in founding posterior distribution of Boisson process, then estimate the mean and the variance of this distribution, and using it with the classic way in studying the number of patients

تأريخ استلام البحث ٢٠٠٨/٣/٢ تأريخ قبول النشر ٢٠٠٨/٥/٢٥

arriving to the consultative clinic of fracture in al-Salam hospital/Mosul. The researchers concluded that bayes statistics, which is posterior in information, could be used studying stochastic process, especially the Boisson process.

١. المقدمة[6]

تعد دراسة العمليات التصادفية (Stochastic Processes) من المسائل البالغة الأهمية قي التطبيقات الواقعية، فهي الجزء الديناميكي (الحركي) في نظرية الاحتمال. وتعرف العملية التصادفية بأنها متتابعة من المتغيرات العشوائية المؤشرة بدليل معين يعود إلى مجموعة معينة T تسمى بفضاء المعلمة (Parameter Space)، أما القيم الممكنة للعملية التصادفية فتنتمي إلى مجموعة معينة S وتسمى بفضاء الحالة.

ومن هذه العمليات العشوائية هي عمليات بواسون التي تتضمن عمليات الوصول وأوقات الوصول البينية وأوقات الوصول التي لكل منها توزيع احتمالي معين تخضع له.

من جانب آخر يعد استخدام أسلوب بيز من المواضيع المهمة جداً إذ يعتمد في أسلوبه وتحليله على أخذ المعلومات التي تتوفر حول المعلمة المراد تقديرها من الخبرة أو التجارب السابقة، من هنا تناول البحث عمليات بواسون من وجهة نظر الإحصاء الكلاسيكي، وكذلك نمذجة العمليات باستخدام أسلوب بيز ذي المعلومات الغنية، كذلك تضمن البحث تطبيقاً عملياً على أعداد المرضى الواصلين إلى استشارية الكسور في مستشفى السلام /الموصل.

٢. عمليات بواسون (Poisson Process)

تعد عمليات بواسون إحدى العمليات التصادفية المهمة، وذلك لخضوع العديد من الظواهر الطبيعية والتجارب اليومية إليها، مثل الأخطاء المطبعية في كل صفحة من صفحات كتب معينة، عدد المكالمات الهاتفية الواصلة إلى بدالة معينة، وعلى هذا الأساس سوف نناقش هذه العملية من وجهة نظر الإحصاء التقليدي وبالتحديد عملية الوصول (Arrival Process)، أوقات الوصول البينية (Interarrival Times)، أوقات الوصول (Times of Arrival) وكذلك من وجهة نظر إحصاء بيز ذي المعلومات الغنية.

٢ .١. عمليات الوصول [2] [5]

وتدعى أيضاً بعملية الولادة الصرفة Pure Birth، وعملية الوصول هي عبارة عن عملية تصادفيه، وعلى فرض أن $S_t(w)$ يمثل عدد الواصلين في الفترة الزمنية $[0,t)$ ومعرفة على حيز العينة بحيث أن $w\in \Omega$ فإن $S_t(w)$ لا تتناقص، بل تتزايد بقفزات (Increasing By Jumps) ومستمر من جهة اليمين (Right Continuous) وتسمى عملية بواسون إذا حققت الشروط الآتية:

i. أن عدد الحوادث يبدأ في الزمن $t=0$

ii. إن الحوادث تقع في فترات زمنية مستقلة عن بعضها البعض أي غير متداخلة

iii. إن عدد الحوادث لأي فترة زمنية طولها t هي توزيع بواسون بمتوسط λt ،أي لجميع $h,t\geq 0$

$$p(s_{t+k}-s_t=n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

وبما أن عدد الواصلين رمزنا له بـ S_t
نعوض عن قيمة n ب S_t فيكون لدينا

$$p(s_t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{S_t}}{S_t!} \quad S_t=0,1,2,3, \quad \ldots \quad (2.1)$$

ومعدل وتباين هذا التوزيع لعدد الواصلين كما هو معلوم λt

٢ - ٢ أوقات الوصول البينية[٦][١١]

إن الجزء الحيوي في العملية البواسونية يتمثل بدراسة الفترات الزمنية بـــين الحوادث، فإذا فرضنا أن العملية التصادفية $\{w_k,k\geq 1\}$ تمثل أوقات الحدوث البينية في العملية البواسونية، أي إن المتغير w_1 يمثل الفترة الزمنية من بدء العملية لحين حدوث الحادثة الأولى، والمتغير w_2 يمثل الفترة الزمنية من حدوث الحادثة الأولى لحين حدوث الحادثة الثانية، وهكذا بقية الفترات الزمنية إلى حد الحادثة k، وهـــذه المتغيرات مستقلة ولها توزيع احتمالي أسي بالمعلمة λ أي :

$$p(W_K)=\lambda e^{-\lambda W_k} \qquad w_k\geq 1 \quad \ldots \quad (2.2)$$

وإن معدل التوزيع الأسي (أوقات الوصول البينية)كما هو معلوم $1/\lambda$ في حين يكون تباينه $1/\lambda^2$

٢ - ٣ أوقات الوصول [7] [11]

إن الصيغة العامة لتوزيع الفترات بين حدوث الحوادث في العملية البواسونية تحتاج إلى تعريف المتغير(T_k) إذ إن T_1 يمثل مقدار الزمنw_1 من نقطة الأصل إلى حين حدوث الحالة الاولى، إذ أن w_1 يمثل ثابتاً صحيحاً موجبـــاً. ويطلـــق علـــى المتغيرT_1 بالزمن التراكمي (Cumulative Time)، وكما هو واضح فـــإن المتغيـــر العشوائي w_1 والذي يمثل الزمن اللازم لحين حدوث الحالة الأولى سيكون هو ذاته المتغير T_1 وأن $T_2=w_1+w_2$ ، وهكذا إلى حد المتغير T_k الذي هـــو عبـــارة عـــن $\sum_{i=1}^{k} w_i$ والتي تمثل مجموع k من المتغيرات العشوائية المستقلة، كل منها يتـــوزع

توزيعاً أسياً بالمعلمة λ، وإن المتغير T_K يتبع توزيع كاما (Gamma Distribution) بالمعلمتين k و $1/\lambda$

$$p(T_k)=\frac{l^K}{(K-1)!}T_k^{\,k-1}\,e^{-lT_K} \qquad T_k\geq 0 \quad \ldots \quad (2.3)$$

لذا فإن معدل الوقت اللازم لوصول العدد k (أو من خلال الاعتماد على توزيع كاما) هو k/λ ، في حين أن التباين هو k/λ^2

٣. تحليل بيز لعمليات بواسون

في هذا الجزء من البحث سنتناول دراسة عمليات بواسون من وجهة نظر بيز، إذ ستعامل المعلمة على أنها متغير عشوائي له دالة توزيع احتمالي معروف، لذلك سوف نستخدم أسلوب بيز من النوع القياسي ذي المعلومات الغنية، اذ يمكن تقدير معلمة التوزيع من خلال إيجاد التوقع الرياضي للتوزيع النهائي لهذه المعلمة والذي يأخذ بنظر الاعتبار المعلومات التي نحصل عليها من الخبرة أو التجارب السابقة حول قيمة هذه المعلمة، فضلاً عن معلومات المشاهدات (البيانات) المأخوذة من العينة، وعلى هذا الأساس سيتم إيجاد التوزيع النهائي (Posterior Distribution)، وكذلك معدل وتباين التوزيع النهائي (Mean and Variance of Posterior distribution) لعمليات بواسون وبالتحديد عملية الوصول (توزيع بواسون)، أوقات الوصول البينية (التوزيع الأسي)، أوقات الوصول (توزيع كاما).

٣ .١ تحليل بيز لعمليات الوصول[٣][٥][٨][١٠]

لدينا عدد الواصلين (S_t) هو عبارة عن مشاهدات مستقلة والتي لها توزيع بواسون بالمعلمة (λt) صيغة (١. ٢)، وعلى فرض أن معلمة التوزيع $\theta=\lambda t$ فإن :

$$P(S_t;q)=\frac{(q)^{s_t}\,e^{-q}}{S_t!} \qquad ; \qquad s_t=0,1,2,\ldots$$

$$\ln P(S_t;\theta)=S_t\ln\theta-\theta-\ln S_t$$

$$\frac{\partial \ln P(S_t;q)}{\partial q}=\frac{S_t}{q}-1$$

$$\frac{\partial^2 \ln P(S_t;q)}{\partial q^2}=-\frac{S_t}{q^2}$$

ومن خلال استخدام صيغة معلومات فيشر حول المعلمة q , لدينا :

$$f_{s_t}(q) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(s_t;q)}{\partial q^2}\right]$$

إذن :

$$f_{s_t}(q) = -E\left[-\frac{S_t}{q^2}\right] = \frac{1}{q^2}E(s_t) = \frac{1}{q^2}q = \frac{1}{q}$$

وباستخدام قانون جيفريز يمكن الحصول على التوزيع الأولي (Prior Distribution) القياسي لتوزيع بواسون وكما يأتي :

$$P(q) = \sqrt{f_{s_t}(q)} = q^{-\frac{1}{2}} \qquad \ldots \quad (3.2)$$

ولدينا دالة الترجيح لتوزيع بواسون كما يأتي :

$$p(s_t/q) \propto e^{-nq}\, q^{\sum_{i=1}^{n} s_{t_i}} \qquad \ldots \quad (3.3)$$

من نظرية بيز لدينا :

$$p(q/s_t) \propto p(q).p(s_t/q)$$

وبتعويض كل من $p(q)$ و $p(s_t/q)$ نحصل على التوزيع النهائي ذو المعلومات القليلة وكما يأتي :

$$p(q/s_t) \propto q^{-\frac{1}{2}}\, e^{-nq}\, q^{\sum_{i=1}^{n} s_{t_i}}$$

$$= q^{\sum_{i=1}^{n} s_{t_i} - \frac{1}{2}}\, e^{-nq}$$

أي أن:

$$p(q/s_t) \propto q^{a-1}\, e^{-bq} \qquad \ldots \quad (3.4)$$

حيث إن :

$$a = \sum_{i=1}^{n} s_{t_i} + \frac{1}{2} \qquad ; \qquad b = n$$

تمثل الصيغة (٣ .٤) نواة توزيع كاما (The Kernel of Gamma Distribution)، أي أن :

$$(q/s_t) \sim G(a, b)$$

ويمكن إيجاد التوزيع النهائي لعدد الواصلين باستخدام التوزيع الأولي ذي المعلومات الغنية كما يأتي :

باستخدام التوزيع النهائي الذي حصلنا عليه من الصيغة (٤، ٣) بوصفه توزيعاً أولياً بالمعلمات $(a_0 \ , \ b_0)$، وكما يأتي :

$$p(q) \propto q^{a_0-1}\, e^{-b_0 q}$$

أي أن :

$q \sim G(a_0\ ,\ b_0)$

ولدينا دالة الترجيح $p(s_t/q)$ حصلنا عليها من خلال الصيغة (٣،٣) وبتطبيق نظرية بيز نحصل على التوزيع النهائي للمعلمة q وكما يأتي :

$$p(q / s_t) \propto q^{a_0 - 1}\, e^{-b_0 q}\, e^{-nq}\, q^{\sum_{i=1}^{n} s_{t_i}}$$

$$= q^{(a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i})-1}\, e^{-(b_0 + n)q}$$

والتي تمثل نواة توزيع كاما، لذلك يمكن كتابة التوزيع النهائي الكامل (The Complete Posterior Distribution) لعدد الواصلين بالشكل الآتي :

$$p(q / s_t) = \frac{(b_0 + n)^{(a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i})}}{\Gamma(a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i})}\, q^{(a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{i_t})-1}\, e^{-(a_0 + n)q} \quad \ldots \quad (3.5)$$

وبالتعويض عن قيمة المعلمة q فإن :

$$(lt / s_t) \sim G(a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i}\ , b_0 + n)$$

معدل التوزيع النهائي لعدد الواصلين بالاعتماد على معدل توزيع كاما يكون كما يأتي :

$$\mu = E(\lambda t / s_t) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i}}{b_0 + n} \quad \ldots \quad (3.6)$$

Yذ إن:

$\sum s_{t_i}$: تمثل مجموع عدد الواصلين

n : تمثل الوقت المستغرق للواصلين من (٠ ، t]

في حين يكون تباين التوزيع النهائي لعدد الواصلين كما يأتي :

$$\mathrm{var}(\lambda t / s_t) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i}}{(b_0 + n)^2} \quad \ldots \quad (3.7)$$

إذ إن a_0 و b_0 تمثل قيم أولية يمكن أن نحصل عليها من خلال الخبـــرة أو التجارب السابقة حول المشاهدات التي يستخدم فيها هذا التوزيع، حيث إن a_0 تشير إلى مجموع عدد الواصلين للعينة، في حين تمثل b_0 الفترة الزمنية لمجموع عـــدد الواصلين.

٣ .٢ تحليل بيز لأوقات الوصول البينية[٤][٨][٩][١٠]

لدينا المشاهدات هي عبارة عن أوقات (فترات) الوصول البينيـــة المـــستقلة (W_k) أو تدعى بأوقات الانتظار والتي لها التوزيع الأسي بالمعلمـــة (l)، وكمـــا يأتي:

$$p(W_k ; l) = l\, e^{-l w_k} \qquad ; \qquad W_k \geq 0 \quad \ldots \quad (3.8)$$

$$\ln p(W_k ; l) = \ln l - l W_k$$

$$\frac{\partial \ln p(W_k ; l)}{\partial l} = \frac{1}{l} - W_k$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(W_k ; l)}{\partial l^2} = \frac{-1}{l^2}$$

ومن خلال استخدام صيغة معلومات فيشر حول المعلمة λ نحصل على :

$$f_{w_k}(l) = \frac{1}{l^2}$$

وباستخدام قانون جيفريز يمكن الحصول على التوزيع الأولي القياسي للتوزيع الأسي وكما يأتي :

$$p(l) = l^{-1} \qquad \ldots \qquad (3.9)$$

ولدنيا دالة الترجيح للتوزيع الأسي كما يأتي :

$$p(W_k / l) = l^n\, e^{-l \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}} \quad \ldots \quad (3.10)$$

وبالتعويض بنظرية بيز نحصل على التوزيع النهائي ذي المعلومات القليلة وكما يأتي :

$$p(l / W_k) \propto l^{-1}\; l^n\; e^{-l \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}}$$

$$= l^{n-1}\, e^{-l \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}}$$

أي أن :

$$p(l / W_k) \propto l^{a-1}\; e^{-bl} \quad \ldots \quad (3.11)$$

إذ أن :

$$a = n \qquad ; \qquad b = \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}$$

تمثل الصيغة (١١. ٣) نواة توزيع كاما، أي أن :

$$(l / W_K) \sim G(a, b)$$

ويمكن إيجاد التوزيع النهائي لأوقات الوصول البينية باستخدام التوزيع الأولي ذي المعلومات الغنية بالشكل الاتي :

باستخدام التوزيع النهائي الذي حصلنا عليه من الصيغة (١١، ٣) بوصفه توزيعا أولياً بالمعلمات (a_0, b_0)، وكما يأتي :

$$p(l) \propto l^{a_0 - 1}\, e^{-b_0 l}$$

أي أن :

$$l \sim G(a_0, b_0)$$

ولدينا دالة الترجيح للتوزيع الأسي من الصيغة (٣,١٠) وبتطبيق نظرية بيز نحصل على التوزيع النهائي للمعلمة l وكما يأتي :

$$p(l / W_k) \propto l^{a_0 - 1}\, e^{-b_0 l}\; l^{n}\, e^{-l \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}}$$

$$= l^{(a_0 + n) - 1}\, e^{-(b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_{k_i})}$$

والتي تمثل نواة توزيع كاما، لذلك يمكن كتابة التوزيع النهائي الكامل بالشكل الآتي :

$$p(l / W_k) = \frac{(b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_k)^{(a_0 + n)}}{\Gamma(a_0 + n)}\, l^{(a_0 + n) - 1}\, e^{-(b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_k) l} \quad \ldots \quad (3.12)$$

أي أن :

$$(l / W_k) \sim G\left(a_0 + n\,,\ b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}\right)$$

معدل التوزيع النهائي لأوقات الوصول البينية بالاعتماد على معدل توزيع كاما يكون كما يأتي :

$$m = E(l / W_k) = \frac{a_0 + n}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_{k_i}} \quad \ldots \quad (3.13)$$

إذ إن:

n: تمثل مجموع عدد الواصلين التراكمي.

$\sum w_{k_i}$: تمثل مجموع أوقات الوصول البينية، في حين يكــون تبــاين التوزيــع النهائي لأوقات الوصول البينية كما يأتي:

$$Var = E(l\,/W_k) = \frac{a_0 + n}{(b_0 + \sum_{i=1}^{n} w_{k_i})^2} \qquad \ldots \qquad (3.14)$$

إذ إن a_0 و b_0 تمثل قيم أولية يمكن أن نحصل عليها من خلال الخبــرة أو التجارب السابقة حول المشاهدات التي يستخدم فيها هــذا التوزيــع، حيــث إن a_0 تمثل مجموع عدد الواصلين التجميعي للعينة، في حين تمثل b_0 مجموع الفترات أو أوقات الوصول البينية للعينة.

٣ .٣ تحليل بيز لأوقات الوصول[١][٨][١٠]

لدينا المشاهدات هي عبارة عن أوقات الوصول المستقلة (T_k) والتــي لهــا توزيع كاما بالمعالم (k , $\frac{1}{l}$)، أي أن :

$$p(T_k) = \frac{l^k}{(k-1)} T_k^{k-1}\, e^{-l T_K} \qquad ; \quad T_k \geq 0 \quad \ldots \qquad (3.15)$$

وهنا سيتم التركيز على إيجاد التوزيع النهائي للمعلمة l فقط وكما يأتي :

$$\ln p(T_k ; l) = k \ln l + \ln\left[\frac{T_k^{k-1}}{(k-1)}\right] - l\,T_k$$

$$\frac{\partial \ln p(T_k ; l)}{\partial l} = \frac{k}{l} - T_k$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(T_k ; l)}{\partial l^2} = \frac{-k}{l}$$

ومن خلال استخدام صيغة معلومات فيشر حول المعلمة l ، لدينا :

$$f_{T_k}(l) = \frac{k}{l^2}$$

وباستخدام قانون جيفريز يمكن الحصول على التوزيع الأولي القياسي لتوزيع كاما وكما يأتي :

$$p(l) \propto l^{-1} \qquad \ldots \qquad (3.16)$$

ولدينا دالة الترجيح لتوزيع كاما كما يأتي :

$$p(T_k / l) \propto l^{\mathrm{nk}}\, \mathrm{e}^{-l \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{k_i}}} \qquad \ldots \qquad (3.17)$$

وبالتعويض بنظرية بيز نحصل على التوزيع النهائي ذي المعلومات القليلة وكما يأتي :

$$p(l / T_k) \propto l^{-1}\, l^{\mathrm{nk}}\, \mathrm{e}^{-l \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{k_i}}}$$

$$= l^{\mathrm{nk}-1}\, \mathrm{e}^{-l \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{k_i}}}$$

أي أن :

$$p(l / T_k) \propto l^{\mathrm{a}-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{b} l} \qquad \ldots \qquad (3.18)$$

إذ إن :

$$a = nk \qquad ; \qquad \mathrm{b} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{k_i}}$$

تمثل الصيغة (٣,١٨) نواة توزيع كاما، أي أن :

$$(l / T_k) \sim \mathrm{G}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

ويمكن إيجاد التوزيع النهائي لأوقات الوصول باستخدام التوزيع الأولي ذي المعلومات الغنية وعلى النحو الآتي :

باستخدام التوزيع النهائي الذي حصلنا عليه من الصيغة (٣,١٨) بوصفه توزيعاً أولياً بالمعلمات (a_0, b_0)، وكما يأتي :

$$p(l) \propto l^{\mathrm{a}_0-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{b}_0 l}$$

أي أن :

$$l \sim G(a_0, b_0)$$

ولدينا دالة الترجيح لتوزيع كاما من الصيغة (٣,١٧) وبتطبيق نظرية بيز نحصل على التوزيع النهائي للمعلمة l وكما يأتي :

$$p(l / T_k) \propto l^{\mathrm{a}_0-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{b}_0 l}\, l^{nk}\, \mathrm{e}^{-l \sum_{i=1}^{n} T_{k_i}}$$

$$= l^{(a_0+nk)-1}\, \mathrm{e}^{-(b_0 + \sum_{i=1}^{n} T_{k_i})\, l}$$

والتي تمثل نواة توزيع كاما لذلك يمكن كتابة التوزيع النهائي الكامل بالصيغة الآتية :

$$(l/T_k) = \frac{(b_0 + \sum_{i=1}^{n} T_{k_i})^{(a_0+nk)}}{\Gamma(a_0+nk)} l^{(a_0+nk)-1} e^{-(b_0+\sum_{i=1}^{n} T_{k_i})\, l} \quad \ldots \quad (3.19)$$

أي أن :

$$(l/T_k) \sim G(a_0 + nk \ ,\ \mathrm{b}_0 + \sum_{i=1}^{n} T_{k_i})$$

معدل التوزيع النهائي لأوقات الوصول بالاعتماد على معدل توزيع كاما يكون كما يأتي :

$$m = E(l/T_k) = \frac{a_0 + nk}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} T_{k_i}} \quad \ldots \quad (3.20)$$

إذ إن:

K :عدد الفترات الزمنية المستقلة

n : تمثل عدد الواصلين

$\sum T_k$: تمثل مجموع أوقات الوصول، في حين يكون تباين التوزيع النهائي لأوقات الوصول كما يأتي :

$$Var(l/T_k) = \frac{a_0 + nk}{(b_0 + \sum_{i=1}^{n} T_{k_i})^2} \quad \ldots \quad (3.21)$$

إذ إن a_0 و b_0 تمثل قيم أولية يمكن أن نحصل عليها من خلال الخبرة أو التجارب السابقة حول المشاهدات التي يستخدم فيها هذا التوزيع، حيث إن a_0 تمثل حجم العينة الحاصل من عدد الواصلين للعينة مضروباً في عدد الفترات الزمنية المستقلة للعينة، بينما b_0 تمثل مجموع أوقات الوصول للعينة.

٤. الجانب التطبيقي

تم في هذا البحث التطبيق على أعداد المرضى الواصلين إلى استشارية الكسور في مستشفى السلام وخلال الفترة الزمنية من الساعة ٨,٣٠ إلى الساعة ١٢,٠٠ ظهراً أي [8.30 ,12.00) ولمدة يوم واحد ومقسمة على وحدات زمنية طول كل منها دقيقة واحدة والبيانات مبينة في أدناه تظهر ذلك:

S_t : تمثل عدد الواصلين عند الزمن t حيث تتبع توزيع بواسون.

W_k: تمثل فترة الانتظار بين وصول كل مريضين متتاليين، حيث تتبع التوزيع الأسي.

T_k: تمثل وقت الوصول للمرضى إلى استشارية الكسور، إذ تتبع توزيع كاما.

الجدول ١
يمثل أعداد وفترات الانتظار وأوقات الوصول للمرضى على التوالي في استشارية الكسور

التسلسل	Number Arrived	Waiting time	Time arrived
1	**1**	**10**	10
2	**5**	**19**	29
3	**11**	**15**	44
4	**16**	**11**	55
5	**20**	**8**	63
6	**24**	**8**	71
7	**28**	**8**	79
8	**30**	**6**	85
9	**32**	**13**	98
10	**39**	**16**	114
11	**43**	**19**	133
12	**50**	**40**	173
13	**51**	**10**	183
14	**53**	**5**	188
15	**55**	**5**	193
16	**56**	**10**	203
17	**59**	**7**	210
∑	573	210	1931

(*) الجدول من أعداد الباحثين

١ - ٤ التطبيق العملي لعمليات بواسون باستخدام الإحصاء الكلاسيكي-عمليات الوصول

إن عمليات الوصول إلى استشارية الكسور تتبع توزيع بواسون بالمعلمة λt أنظر المعادلة (١، ٢)، إذ يمكن الحصول على λ من خلال جمع عدد المرضى الواصلين خلال الفترة الزمنية [8.30,12.00) وتقسيمها على عدد الوحدات الزمنية، إذ إن

$$\lambda=\frac{S_t}{t}=\frac{59}{210}=0.2809$$

فإن معدل الوصول هو:

$$m=\lambda t=(0.2809)(210)=59$$

وبما أن تباين توزيع بواسون يساوي معدله، أي أن :

$$\text{Variance}=m=59$$

على هذا الأساس يمكن التعويض بقيمة معلمة التوزيع وإيجاد أي احتمال لحـــدوث أي عدد للواصلين (عدد المرضى الواصلين إلى استـــشارية الكـــسور خـــلال ٢١٠ دقائق)

- **أوقات الوصول البينية**

نحصل على أوقات الوصول البينية (فترات الوصول) من خلال ما يأتي:

لدينا أوقات الوصول التي نحصل عليها من عدد الواصلين وهي

$T_0=0$, $T_1=10$, $T_2=29$ ……………………$T_{17}=210$

وبطرح أوقات الوصول البينية نحصل على فترات الوصول البينيـــة وكمـــا موضح أدناه:

$W_1=T_1-T_0=10-0=10$

$W_2=T_2-T_1=29-10=19$

$W_3=T_3-T_2=44-29=15$

.

.

.

$W_{17}=T_{17}-T_{16}=7$

إذ أن :

$$\sum_{i=1}^{17} W_i = t = 210$$

إذ إن $\sum_{i=1}^{17} W_i$ تمثل مجموع فترات الوصول البينية، إذ إنهـــا تتبـــع التوزيـــع الأسي، ودالة الكثافة الاحتمالية لأوقات الوصول البينية (التوزيع الأسي) هي :

$$p(w_k) = l\,e^{-w_k} = (0.2809)\,e^{-0.2809\,w_k} \qquad W_k \geq 1$$

ومعدل هذا التوزيع (معدل الفترات الزمنية لوصول مريض واحد) هو:

$$m = \frac{1}{l} = \frac{1}{0.2809} = 3.5599$$

وتباين هذا التوزيع (أوقات الوصول البينية) هو:

$$\text{var}(W_K) = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{(0.2809)^2} = 12.6735$$

- **أوقات الوصول**

إن دالة الكثافة الاحتمالية لأوقات الوصول لها توزيع كامـــا بـــالمعلمتين k و 1/ λ وحسب الصيغة (2.3).

لذا فإن معدل هذا التوزيع (أوقات الوصول) هو:

$$m = \frac{k}{l} = \frac{59}{0.2809} = 210.039$$

وتباين وقت الوصول

$$\text{var}(T_k) = \frac{k}{l^2} = \frac{59}{(0.2809)^2} = 747.7364$$

٢ - ٤ .التطبيق العملي لعمليات بواسون باستخدام أسلوب بيز

أن تطبيق أسلوب بيز يحتاج إلى معلومات أولية ومن خلال الخبرة الـسابقة (سؤال طبيب أخصائي) لعينة مكونة من ٢٠ مريـضاً ولمـدة (0.60) أي سـاعة واحدة، حيث كان عدد المرضى التراكمي ١٩١ وحجم العينة الأولية الحاصل مـن عدد الواصلين في عدد الفترات الزمنية المسقلة٣٠٠ ومجموع أوقات الوصول لهذه العينة ٥٠٠.

- عملية الوصول

إن دالة الكثافة الاحتمالية لعملية الوصول لها توزيع كاما، أنظر المعادلة (3.5) ولتقدير متوسط وتباين هذا التوزيع بالاعتماد على المعادلتين (3.6) و(3.7):

$$a_0 = 20$$

$$b_0 = 60$$

$$l = \frac{a_0 + \sum_{i=0}^{n} s_{t_i}}{(b_0 + n)} = \frac{20+59}{(60+210)} = 0.29259$$

أي أن:

$$m = l\,t = (0.29259)(210) = 61.44444 \approx 61$$

والتباين

$$\text{var}(l\,t / s_t) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} s_{t_i}}{(b_0 + n)^2} = \frac{20+59}{(60+210)^2} = 0.00133$$

$$Var(l\,t) = t^2\, \text{var}(l) = 58.67901$$

- أوقات الوصول البينية

لدينا المتغير العشوائي w_i يمثل الفترات البينية، وله دالة الكثافـة الاحتماليـة لتوزيع كاما، أنظر المعادلة (3.12) ويمكن تقدير معدل وتباين هذا التوزيع (أوقات الوصول البينية)، أنظر المعادلة (3.13).

إذ إن

$$a_0 = 191$$
$$b_0 = 60$$
$$n = 573$$
$$\sum w_k = 210$$
$$m = E(l / w_k) = \frac{191 + 573}{60 + 210} = 2.82962$$

ونحصل على التباين بالاعتماد على المعادلة (3.14) إذ إن :

$$Var(l / w_k) = \frac{191 + 573}{(60 + 210)^2} = 0.01048$$

- أوقات الوصول

لدينا المتغير T_k يمثل أوقات الوصول، وله دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما، أنظر المعادلة (3.19) ويمكن تقدير معدل وتباين هذا التوزيع أنظر المعادلة، (3.20) إذ إن :

$$a_0 = 300$$
$$b_0 = 500$$

$$m = E(l / T_k) = \frac{300 + 59*17}{500 + 1931} = 0.53599$$

ونحصل على التباين بالاعتماد على المعادلة (3.21)

$$Var(l / T_k) = \frac{300 + 59*17}{(500 + 1931)^2} = 0.00022$$

من خلال النتائج المذكورة آنفاً نلاحظ أن هنالك اختلافاً كبيراً بين النتائج التي حصلنا عليها باستخدام الإحصاء الكلاسيكي وبين النتائج التي حصلنا عليها باستخدام إحصاء بيز، مع العلم أنه لايمكن المقارنة بين الأسلوبين لاختلاف منهجية كل أسلوب، وأن اختيار قيم أولية جديدة لأسلوب بيز سيؤدي إلى أعطاء نتائج مختلفة أخرى، وهذا ما لا يتضمنه الأسلوب الكلاسيكي.

٥. الاستنتاجات والتوصيات

١. إمكانية استخدام أسلوب بيز ذي المعلومات الغنية في دراسة العمليات العشوائية وخصوصاً عمليات بواسون وبالتحديد عدد الواصلين، أوقات الوصول البينية، وأوقات الوصول.

٢. هناك اختلاف واضح بين نتائج الأسلوب التقليدي مقارنة مع أسلوب بيـــز ذي المعلومات الغنية، نتيجة استخدام معلومات الخبرة أو التجارب السابقة، فضلاً عن معلومات المشاهدات في تقدير التوزيعات النهائية.
٣. يوصي الباحثان باستخدام أسلوب بيز ذي المعلومات الغنيـــة فـــي دراســـة عمليات بواسون في حالة توافر معلومات أولية متأتيـــة مـــن الخبـــرة أو التجارب السابقة حول هذه العمليات.

المراجع

أولاً- المراجع باللغة العربية

١. الراوي، خاشع محمود، ٢٠٠٠، المدخل إلى الإحصاء، طبعة ثانيـــة، دار الكتـــب للطباعـــة والنشر، جامعة الموصل.
٢. الربيعي، فاضل محسن وعبد، صلاح حمزة، ٢٠٠٠، مقدمة في العمليات التصادفية، المكتبـــة الوطنية، بغداد.
٣. الزبيدي، طه حـــسين علـــي، ١٩٩٧، تكـــوين لوحـــات بيـــز للـــسيطرة علـــى الـــصفات النوعية، رسالة ماجستير مقدمة إلى كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل.
٤. الصياد، جلال مصطفى، ١٩٩٣، الاستدلال الإحصائي، دار المريخ للنـــشر،المملكة العربيـــة السعودية.
٥. العذاري، فارس مسلم والوكيل، علي عبد الحسن، ١٩٩١، العمليـــات التـــصادفية، المكتبـــة الوطنية، بغداد.
٦. سليمان، مثنى صبحي، ٢٠٠٦، التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غيـــر المتجانـــسة مـــع تطبيق أطروحة دكتوراه غير منشورة مقدمة إلى كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعـــة الموصل.

ثانياً- المراجع باللغة العربية

1. Basawa,I.V,and Prakasa Rao ;B.L, 1980, Statistical Inference for Stochastic Processes, Academic Process,London.
2. Box and Tiao, 1973, Bayesian Inference in statistical Analysis, Addison-wesley publishing company California;London.
3. Jayanta, K; Mohan, D; Tapas, S, 2006, An Introduction to Bayesian Analysis; springer;USA
4. Jefferys,S.H, 1961, Theory of Probability ;clarenden press,oxford,London.
5. Mooney,D.D,and Swift ,R.J, 1999, Acourse in Mathematical Modeling "the Mathematical Association of American ;USA.