P- ISSN 1991-8941 , E-ISSN 2706-6703
2008 ,(2), (3) :153-155

مجلة جامعة الانبار للعلوم الصرفة (JUAPS)

Open Access

المثالي المنتظم على حلقة التشاكلات

مثنى عبد الواحد محمود

جامعة الانبار – كلية التربية

معلومات البحث:
تاريخ التسليم: ٢٠٠٨/٤/١٠
تاريخ القبول: ٢٠٠٨/٩/٥
تاريخ النشر: ١٤/ ٠٦ / ٢٠١٢
DOI: 10.37652/juaps.2008.15547

الكلمات المفتاحية:
حلقة تشاكلات ،
برهنة ،
المثالي المنتظم.

الخلاصة:
في هذا البحث نستعرض عددا من النتائج المعروفة التي تتناول شروطا تجعل حلقة تشاكلات المثالي أبداليه والتي هي هدف هذا البحث. درس هذه النتائج كل من العالم كوكس والعالم وزيلمان وتز ، وسوف نعطي في البداية تفاصيل أهم النتائج التي سوف نحتاجها للوصول الى هدفنا والذي وصلنا اليه من خلال برهنة المبرهنة الموجودة في نتائج هذا البحث.

المقدمة

بعض النتائج التمهيدية :

ان مجموعة كل العناصر عديمة القوة في الحلقة الابدالية R تكون مثالياً في الحلقة ويرمز لها بالرمز $L(R)$. وايضاً يجب ان نبين انه $L(R)=0$ إذا وفقط إذا كان $I \cap ann(I)=0$ لكل مثالي I في R .

المناقشة :

خلال المناقشة سوف نعطي بعض البراهين لبعض المبرهنات المهمة التي تفيدنا في برهنة المبرهنة في النتائج التي هي هدفنا .

المبرهنة التالية برهنها العالم كوكس وهي تعطي شروطاً كافية للمثالي I في R لجعل $End\ (I)$ حلقة ابدالية .

مبرهنة (١) (مبرهنة كوكس) :

لتكن R حلقة و I مثالياً في R ، إذا كان $I \cap ann(I)=0$ فان $End\ (I)$ حلقة ابدالية .

البرهان :

ليكن f و g في $End\ (I)$ ، ضع $h=f\,g-g\,f$ وليكن $a\,,b \in I$ بما ان h تشاكل فان :

$$\begin{aligned} a\,h(b) &= h\,(\,a\,b\,) \\ &= f\,(g(ab))-g(\,f\,(ab)) \\ &= f\,(\,a\,g(\,b))-g(b\,f\,(a\,)) \\ &= (g(\,b)\,f\,(a))-(\,f\,(a\,)\,g(b)\,) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وعليه $I\,h(I\,)=0$ لذلك يكون $h(I)\subseteq ann\,(I\,)$ ومن الواضح ان $h(I\,)\subseteq I$ وبما ان $I \cap ann(I\,)=0$ ، فان $h(I\,)=0$ ، وعليه يكون $h=0$ ، وبالتالي $f\,g=g\,f$.

مبرهنة(٢) :

لتكن R حلقة ابدالية بحيث $L(R)=0$ وليكن I مثالياً في R إذا كانت $End\ (I\,)=S$ ، فان S حلقة ابدالية و $L(S)=0$.

* Corresponding author at: Anbar University - College of Education, Iraq;
E-mail address: m_a_maho@yahoo.com

برهنت هذه المبرهنة في اشكال واساليب مختلفة ومن ضمن الذين برهنوا هذه المبرهنة ويكاند وكوكس وسوف نوردها بأبسط برهان) ،

البرهان :

بما ان $L(R)=0$ فان $I\cap ann(I)=0$ ومن مبرهنة (١) فان S حلقة ابدالية إذا كان $f\in S$ ، و f عنصرعديم القوة ، فان $f^{n}=0$ لعدد موجب $n\in N$ وعليه لكل $x\in I$ ، $(f(x))^{n}=f^{n}(x)=0$ ، لكن $L(R)=0$ ، عليه يكون $f(x)=0$ ، لذلك $f=0$.

ملاحظة(١) : ان الحلقة R تكون منتظمة حسب مفهوم فون – نويمن (Von – Neumann) . إذا كان لكل $x\in R$ يوجد $y\in R$ بحيث $xyx=x$.

نتيجة (١) : لتكن R حلقة منتظمة ، لكل مثالي I في R ، $End(I)=S$ تكون حلقة ابدالية و $L(S)=0$.

البرهان : بما ان R حلقة منتظمة ، من الممكن البرهنة بسهولة على ان $L(R)=0$ ، حسب مبرهنة (٢) تكون S حلقة ابدالية و $L(S)=0$.

مبرهنة(٣) : لتكن R ساحة فان $End(I)=S$ تكون ساحة لكل مثالي I في R .

البرهان : بما ان العنصر الوحيد العديم القوة في الساحة هو الصفر ، فان $L(R)=0$ ومن المبرهنة (٢) نحصل على ان S حلقة ابدالية و $L(S)=0$.

ليكن $f,g\in S$ و $f,g\neq 0$ فانه يوجد $x,y\in I$ و $x,y\neq 0$ بحيث ان $f(x)\neq 0$ و $g(y)\neq 0$ ، بما ان R ساحة فان $x\cdot y\neq 0$ الان :

$$(fog)(xy)=f(xg(y))$$
$$=f(x)g(y)$$

بما ان $f(x)\neq 0$ ، $g(y)\neq 0$ و R ساحة ، فان $f(x)g(y)\neq 0$ وعليه فان $(fog)(xy)\neq 0$ ، وهذا يعني ان $fg\neq 0$ أي ان S لا تحوي قاسم صفري ، وهكذا تكون الحلقة S ساحة .

ملاحظة(٢) : ان حلقة التشاكلات للموديول ليس بالضروري ان تكون ابدالية . لكن زيلما نووتز برهن ان صفة الانتظام للمثالي في الحلقة R شرط لجعل $End(I)$ حلقة ابدالية .

تعريف(١) : يقال عن مثالي I في حلقة R انه مثالي منتظم ، إذا كان لكل $x\in I$ يوجد $y\in I$ بحيث ان $xyx=x$.

النتائج

من خلال ما تقدم من المبرهنات سوف نبرهن المبرهنة الآتية .

مبرهنة(٤) : إذا كان I مثالياً منتظماً في الحلقة R فان $End(I)=S$ حلقة ابدالية .

البرهان : ليكن $f,g\in S$ وليكن x أي عنصر في I ، بما ان I مثالي منتظم ، فيوجد $y\in I$ بحيث ان $xyx=x$. الآن :

$$gf(x) = gf(xyx)$$
$$= g(f(x))\,yx \text{ ....(1)}$$

لكـــن R حلقـــة ابدالية وعليه :

$$
\begin{aligned}
g(f(x))\,yx &= g(x)f(x)y \\
&= f(x)g(x)y \\
&= f(xg(x))y \\
&= f(g(x)xy) \\
&= fg(xyx) \\
&= fg(x) \text{ ....(2)}
\end{aligned}
$$

اذن نحصل من (1) و (2) على ان $fg = gf$ وهذا يعني ان S حلقة ابدالية .

المصادر

1. S.H. Cox JR. Commutative endomorphism ring , Pacific Journal of Mathematics , 45 (1973) 87 – 90 .
2. F. Kasch , Modules and rings , Acad. Press , London , New York 1982 .
3. A.G. Naoum , On the rings of Endomorphisme of finitely generated multiplication module , Periodica , Mathematica Hangarica , 21 (1990) . 249 – 255) .

Regular ideal over endomorphisms ring

Muthana A. Mahmood

E.mail: m_a_maho@yahoo.com

Abstract

In this work, we review a number of, well-know results which deal with conditions that make (homomorphism ring of commutative Ideal which is the aim at this work.

Prof. S.H. Cox JR has studied these results in addition to Prof. Wezlman , first of all. We introduce an explanation of there results to arrive to our goal which we could arrive at through the proof of the theorem in the result of this paper.