مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد (٦) العدد (٢)
السنة (٢٠١٤)

صفحة ١٠-٢٣



## حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستخدام الطريقتين AI(MMS) و RO(MMS) والمقارنة بينهما

**م.م صفاء مهدي موسى الجصاص**
**جامعة الكوفة / كلية التربية للبنات / قسم الرياضيات**

**استلام البحث ٢٠١٤/٥/٢٩ ارسال التعديلات ٢٠١٤/٨/٢٧ قبول النشر ٢٠١٤/٩/١٦**

**المستخلص**

الهدف الرئيس من هذا البحث هو حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستخدام طريقتين ناتجتين من التعجيلين آيتكن ورومبرك مع القاعدة المركبة من ( قاعدتي النقطة الوسطى على البعدين الخارجي $Z$ والأوسط $Y$ و قاعدة سمبسون على البعد الداخلي $X$ ورمزنا لها بـ $MMS$ ) عندما عدد التقسيمات على البعد الخارجي مساوي لعدد التقسيمات على البعد الأوسط ومساوي لعدد التقسيمات على البعد الداخلي حيث قدمنا مبرهنة مع البرهان لإيجاد هذه قاعدة وحدود التصحيح بالنسبة لها ولتحسين النتائج استخدمنا التعجيلين المذكورين مع قاعدة $MMS$ واسمينا الطريقتين $AI(MMS)$ و $RO(MMS)$ حيث حصلنا على دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقصر.

**Mathematics Subject Classification: 65XX**

## 1.المقدمة

يعرف التكامل العددي ( Numerical Integration ) بأنه دراسة كيفية إيجاد القيمة التقريبية لتكامل معين، ويرجع تاريخ تطبيق التكامل العددي إلى بداياته في إيجاد مساحة دائرة بطريقة التربيع الإغريقي (Greek quadrature) وذلك من خلال تجزئة الدائرة إلى مضلعات منتظمة ( Regular polygon) وبواسطة هذه الطريقة تمكن ارخميدس من أيجاد الحدود العليا والدنيا لقيمة النسبة الثابتة $(\pi)$، موسى [3] .

وبما أن للتكاملات الثلاثية أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2+y^2=4x$ وفوق $z=0$ وتحت $x^2+y^2=4z$ . والحجم الواقع داخل الاسطوانة $\rho=4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $p^2+z^2=16$ ومن الأسفل بالمستوي $z=0$ . وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع تحت $z^2=xy$ وفوق المثلث $y=x, y=0, x=4$ . وكذلك حساب عزم القصور الذاتي للحجم الواقع داخل $x^2+y^2=9$ وفوق المستوي $z=0$ وتحت المستوي $x+z=4$. وتبرز أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن، فرانك آيرز [4] .

وقد عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية منهم ضياء [5] في عام 2009 حيث استخدمت طرائق عددية مركبة هي $RMRM(RS)$، $RMRM(RM)$، $RMRS(RM)$ و $RMRS(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى $(RM)$ على البعد الخارجي ( $Z$ ) و $RM(RS), RM(RM), RS(RM), RS(RS)$ على البعد الأوسط ( $Y$ ) والبعد الداخلي ( $X$ ) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي $RMRS(RS)$ هي الأفضل عند حساب تكاملات ثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة والزمن.

وفي عام 2010 قدمت عكار [6] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة $X$ و $Y$ و $Z$ عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وأسمتها $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وفي عام 2013 قدم محمد وآخرون [7] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستعمال طريقة $RSSS$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة $X$ و $Y$ و $Z$ عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحصلوا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية إلى القيم الحقيقية للتكاملات وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

أما في هذا البحث قدمنا مبرهنة مع البرهان لإيجاد قاعدة عددية جديدة لحساب القيم التقريبية للتكامـلات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وحدود التصحيح لها وهذه القاعدة ناتجة من تطبيق قاعدتي من قواعد نيوتن- كوتس (النقطة الوسطى) على البعدين الخارجي $Z$ والأوسط $Y$ و (قاعدة سمبسون) على البعد الداخلي $X$، عندما $m_2 = m_1 = m$ حيث ( $m$ عدد التقسيمات على البعد الخارجي $Z$ و $m_1$ عدد التقسيمات على البعد الأوسط $Y$ و $m_2$ عدد التقسيمات على البعد الداخلي $X$ ) وأسميناها $MMS$ ثم قمنا بتحسين النتائج باستعمال تعجيلين، الأول آيتكن ورمزنا له مع القاعدة المذكورة بالرمز $AI(MMS)$ والثاني رومبرك ورمزنا له مع القاعدة المذكورة بالرمز $RO(MMS)$ ثم قارنا بين الطريقتين .

**ملاحظة :-** لقد اخترنا $m_2, m_1, m$ أعداد زوجية لان قاعدة سمبسون تحتاج إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية ولا يوثر ذلك على قاعدة النقطة الوسطى .

## 2. قاعدة $MMS$ العددية وحدود التصحيح بالنسبة لها

**مبرهنة**:
لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$
فان القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية

$$MMS=\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[f(x_0,y_j,z_k)+f(x_m,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}f(x_{(2i-1)},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}f(x_{(2i)},y_j,z_k)\right]$$

و $x_{(2i-1)}=x_0+(2i-1)h\ ,\ i=1,2,\dots,\frac{m}{2}$

$x_{(2i)}=x_0+(2i)h\ ,\ i=1,2,\dots,\frac{m}{2}\text{-}1$

و $z_k=z_0+\frac{(2k-1)}{2}h\ ,\ k=1,2,\dots,m$

$y_j=y_0+\frac{(2j-1)}{2}h\ ,\ j=1,2,\dots,m$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي:-

$$I-MMS(h)=\mu_1h^2+\mu_2h^4+\mu_3h^6+\cdots$$

حيث أن $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ ثوابت.

**البرهان**

يمكن كتابة التكامل $I$ بالصورة الآتية :

$$I=\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)\,dxdydz=MMS(h)+E(h)$$
...(1)

إذ إن $MMS(h)$ هي القيمة التقريبية للتكامل والمحسوبة عددياً باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي $Z$ و الأوسط $Y$ وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي $X$. وان $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $MMS(h)$ ، وان $h=\dfrac{z_m-z_0}{m}=\dfrac{y_m-y_0}{m_1}=\dfrac{x_m-x_0}{m_2}$ بفرض إن $(m=m_1=m_2)$.

حيث ان $m,m_1,m_2$ هي عدد التقسيمات على الأبعاد الثلاثة $Z,Y,X$ على التوالي .

أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى هي :

$$E_M(h)=\frac{1}{6}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{7}{360}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{31}{15120}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots$$
…(2)

وباستخدام قاعدة سمبسون هي :

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \qquad ...(3)$$

فوكس[1]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل للصيغتين (2) و(3) نحصل على:-

$$E_M(h)=\frac{(x_{2n}-x_0)}{6}h^2f^{(2)}(\eta_1)-\frac{7(x_{2n}-x_0)}{360}h^4f^{(4)}(\eta_2)+\frac{31(x_{2n}-x_0)}{15120}h^6f^{(6)}(\eta_3)-... \qquad ...(4)$$

$$E_S(h)=\frac{-(x_{2n}-x_0)}{180}h^4f^{(4)}(\lambda_1)+\frac{(x_{2n}-x_0)}{1512}h^6f^{(6)}(\lambda_2)+... \qquad ... (5)$$

حيث $\eta_i,\lambda_i\in(x_0,x_{2n})$ , $i=1,2,3,...$ ، عكار[6] .

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_{x_0}^{x_m} f\left(x,y,z\right)dx$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة سمبسون على البعد $X$ و (التعامل مع $Y$ و $Z$ كثابتين) وكالاتي:-

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dx = \frac{h}{3}\left( f(x_0,y,z)+f(x_m,y,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y,z)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i)},y,z)\right)$$

$$-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\alpha_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\alpha_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots \qquad \cdots(6)$$

$$L=1,2,\ldots \ , \ \alpha_L \in (x_0,x_m) \quad , \quad i=1,2,\ldots,\frac{m}{2}\text{-}1 \ , \ x_{2i}=x_0+2ih \quad , \quad i=1,2,\ldots,\frac{m}{2} \ , \ x_{(2i\text{-}1)}=x_0+(2i-1)h$$

و بمكاملة الصيغة (6) عدديا على الفترة $\left[y_0,y_m\right]$ باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد $Y$ نحصل على :

$$i)\int_{y_0}^{y_m} f(x_0,y,z)dy = h\sum_{j=1}^{m} f(x_0,y_j,z)+\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\beta_2,z)}{\partial y^4}\right.$$

$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \qquad \ldots(7)$$

$$ii)\int_{y_0}^{y_m} f(x_m,y,z)dy = h\sum_{j=1}^{m} f(x_m,y_j,z)+\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\beta_2,z)}{\partial y^4}\right.$$

$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \qquad \ldots(8)$$

$$iii)4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\int_{y_0}^{y_m} f(x_{(2i-1)},y,z)dy = 4h\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m} f(x_{(2i-1)},y_j,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \qquad \ldots(9)$$

$$iv)2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{y_0}^{y_m} f(x_{(2i)},y,z)dy = 2h\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m} f(x_{(2i)},y_j,z)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \qquad \ldots(10)$$

$$v)\int_{y_0}^{y_m}\left(-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\alpha_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\alpha_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots\right)dy \qquad \ldots(11)$$

$$r=1,2,3,\ldots \ , \beta_r \in (y_0,y_m) \quad , \quad j=1,2,\ldots m \quad , \quad y_j = y_0+\frac{(2j-1)}{2}h$$

و بمكاملة الصيغ أعلاها عدديا على الفترة $\left[z_0,z_m\right]$ باستخدام قاعدة النقطة الوسطى أيضا على البعد $Z$ نحصل على:

$$i)\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_0,y_j,z)dz = h\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_0,y_j,z_k)+\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\beta_2,z)}{\partial y^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots\right)dz+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_j,\phi_{1j})}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,y_j,\phi_{2j})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,y_j,\phi_{3j})}{\partial z^6}-\cdots\right) \quad ...(12)$$

$$ii)\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_m,y_j,z)dz = h\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_m,y_j,z_k)+\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\beta_2,z)}{\partial y^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots\right)dz+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,y_j,\phi_{1j})}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,y_j,\phi_{2j})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,y_j,\phi_{3j})}{\partial z^6}-\cdots\right) \quad ...(13)$$

$$iii)4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_{(2i-1)},y_j,z)dz = 4h\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_{(2i-1)},y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right)dz$$
$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{1ij})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{2ij})}{\partial z^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{3ij})}{\partial z^6}-\cdots\right) \quad ...(14)$$

$$iv)2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_{(2i)},y_j,z)dz = 2h\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_{(2i)},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right)dz$$
$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{1ij})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{2ij})}{\partial z^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{3ij})}{\partial z^6}-\cdots\right) \quad ...(15)$$

$$v)\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\left(-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\alpha_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\alpha_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots\right)dydz \quad ...(16)$$

$$d=1,2,3,\ldots,\ \phi_d\in(z_0,z_m) \quad , \quad k=1,2,\ldots,m \quad , \quad z_{(k)}=z_0+\frac{(2k-1)}{2}h$$

وبجمع الصيغ (12)،(13)، (14)، (15)،(16) نحصل على:-

$$\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left( f(x_0,y_j,z_k)+f(x_m,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i)},y_j,z_k)\right)$$
$$+\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\left(-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\alpha_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\alpha_2,y,z)}{\partial x^6}+\dots\right)dydz$$
$$+\frac{h}{3}\int_{z_0}^{z_m}\Bigg(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\beta_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots$$
$$+\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\beta_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\beta_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\beta_3,z)}{\partial y^6}-\cdots$$
$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},\beta_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},\beta_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},\beta_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right)\Bigg)dz$$
$$+\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_j,\phi_{1j})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,y_j,\phi_{2j})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,y_j,\phi_{3j})}{\partial z^6}-\cdots$$
$$+\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,y_j,\phi_{1j})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,y_j,\phi_{2j})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,y_j,\phi_{3j})}{\partial z^6}-\cdots$$
$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{1ij})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{2ij})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},y_j,\phi_{3ij})}{\partial z^6}-\cdots\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{(z_m-z_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},y_j,\phi_{1ij})}{\partial z^2}-\frac{7(z_m-z_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},y_j,\phi_{2ij})}{\partial z^4}+\frac{31(z_m-z_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},y_j,\phi_{3ij})}{\partial z^6}-\cdots\right)\Bigg)$$

...(17)

وبما إن ... ,$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}$ و ... ,$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ و ... ,$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\frac{\partial^4 f}{\partial z^4}$ دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$.

فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثلاثي $I$ بقاعدة $MMS$ تصبح :-

$$E_{MMS}(h)=(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\omega}_1,\overline{\xi}_1,\overline{\psi}_1\right)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\omega}_2,\overline{\xi}_2,\overline{\psi}_2\right)}{\partial x^6}-\cdots\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{\omega}}_1,\overline{\overline{\xi}}_1,\overline{\overline{\psi}}_1\right)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\omega}}_2,\overline{\overline{\xi}}_2,\overline{\overline{\psi}}_2\right)}{\partial y^4}+\frac{31h^6}{15120}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\omega}}_3,\overline{\overline{\xi}}_3,\overline{\overline{\psi}}_3\right)}{\partial y^6}-\cdots\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_1,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_1,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_1\right)}{\partial z^2}-\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_2,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_2,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_2\right)}{\partial z^4}\right.$$

$$\left.+\frac{31h^6}{15120}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_3,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_3,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_3\right)}{\partial z^6}-\cdots\right)$$

$$E_{MSS}(h)=(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{\omega}}_1,\overline{\overline{\xi}}_1,\overline{\overline{\psi}}_1\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_1,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_1,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_1\right)}{\partial z^2}\right)-(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^4}{180}\left(\frac{\partial^4 f\left(\overline{\omega}_1,\overline{\xi}_1,\overline{\psi}_1\right)}{\partial x^4}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{2}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\omega}}_2,\overline{\overline{\xi}}_2,\overline{\overline{\psi}}_2\right)}{\partial y^4}+\frac{7}{2}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_2,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_2,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_2\right)}{\partial z^4}\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^6}{1512}\left(\frac{\partial^6 f\left(\overline{\omega}_2,\overline{\xi}_2,\overline{\psi}_2\right)}{\partial x^6}+\frac{31}{10}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\omega}}_3,\overline{\overline{\xi}}_3,\overline{\overline{\psi}}_3\right)}{\partial y^6}\right.$$

$$\left.+\frac{31}{10}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_3,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_3,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_3\right)}{\partial z^6}\right)+\cdots \qquad \cdots(18)$$

حيث أن $\left(\overline{\overline{\overline{\omega}}}_t,\overline{\overline{\overline{\xi}}}_t,\overline{\overline{\overline{\psi}}}_t\right),\left(\overline{\overline{\omega}}_t,\overline{\overline{\xi}}_t,\overline{\overline{\psi}}_t\right),\left(\overline{\omega}_t,\overline{\xi}_t,\overline{\psi}_t\right)\in[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$ ، $t=1,2,3,\ldots$ .

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ للقاعدة المذكورة كالآتي :

$$I-MMS(h)=\mu_1h^2+\mu_2h^4+\mu_3h^6+\cdots \qquad \ldots(19)$$

حيث أن $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة في منطقة التكامل.

## 3.حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستعمال الطريقتين AI(MMS) و RO(MMS)

لحساب التكاملات الثلاثية عددياً باستعمال طريقتي $RO(MMS), AI(MMS)$ نبدأ بوضع $m=2$ ونحسب القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي باستخدام قاعدة $MMS$ والتي تساوي

$$\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{3}\Big[\, f(x_0,y_1,z_1)+f(x_0,y_2,z_1)+f(x_0,y_1,z_2)+f(x_0,y_2,z_2)$$
$$+f(x_2,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_1)+f(x_2,y_1,z_2)+f(x_2,y_2,z_2)+4(f(x_1,y_1,z_1)+f(x_1,y_2,z_1)$$
$$+f(x_1,y_1,z_2)+f(x_1,y_2,z_2))\,\Big]$$

ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m=2$ ثم نضع $m=4$ و نحسب قيمة قاعدة $MMS$ حيث إنها تساوي

$$\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\Big[f(x_0,y_j,z_k)+f(x_m,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{2}f(x_{(2i-1)},y_j,z_k)+2f(x_2,y_j,z_k)\Big]$$

أيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي ونحسب قيمة القاعدة عندما $m=8$ والتي تساوي

$$\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\Big[f(x_0,y_j,z_k)+f(x_m,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{4}f(x_{(2i-1)},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{3}f(x_{(2i)},y_j,z_k)\Big]$$

و $j=1,2,\ldots,8\,,\ y_j = y_0+\frac{(2j-1)}{2}h$ و $i=1,2,3\,,\ x_{(2i)}=x_0+(2i)h\ \ ,\ i=1,\ldots,4\,,\ x_{(2i-1)}=x_0+(2i-1)h$

وكذلك نثبت هذه القيمة في جداولنا ولتحسين القيم التقريبية نطبق التعجيلين الآتيين $k=1,2,\ldots,8\,,\ z_k = z_0+\frac{(2k-1)}{2}h$

**أولا** :- تعجيل آيتكن والذي صيغته العامة :-

$$AI(MMS) \cong \frac{(MMS(h))*\left(MMS\left(\frac{h}{4}\right)\right)-\left(MMS\left(\frac{h}{2}\right)\right)^2}{\left(MMS\left(\frac{h}{4}\right)\right)-2\left(MMS\left(\frac{h}{2}\right)\right)+\left(MMS(h)\right)} \qquad \ldots(20)$$

رالستون [2].

حيث أن $AI(MMS)$ قيمة في العمود الجديد من جدول آيتكن وكل $MMS\left(\frac{h}{4}\right), MMS\left(\frac{h}{2}\right), (MMS(h))$ قيم في العمود السابق منه، إن تعجيل آيتكن هوعملية تعجيل اقتراب Accelerating The Convergence القيم التقريبية إلى القيمة الحقيقية للتكاملات.وسنطبقها على القيم الناتجة من القاعدة المذكورة لتعجيل الحصول على قيم أفضل للتكاملات بدلاً من الاستمرار في زيادة عدد الفترات الجزئية . فاذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة $MMS$ فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة تعجيل آيتكن وذلك باستخدام الصيغة (20) ثم نستخدم أيضا تعجيل آيتكن على القيم $n-2$ فنحصل على $n-4$ قيمة وهكذا نستمر إلى أن نحصل على الدقة المطلوبة.

**ثانيا** :- تعجيل رومبرك و بالاستفادة من حدود التصحيح التي حصلنا عليها من الصيغة (19) والصيغة العامة لهذا التعجيل هي :-

$$RO(MMS) = \frac{\left(2^k MMS\left(\frac{h}{2}\right) - MMS(h)\right)}{\left(2^k - 1\right)} \qquad \ldots(21)$$

رالستون [2] .

حيث $RO(MMS)$ قيمة في العمود الجديد لجدول رومبرك وكل من $MMS\left(h\right)$، $MMS\left(\frac{h}{2}\right)$ قيمتان في العمود السابق منه ، فضلا عن إن العمود الأول من الجدول يمثل قيم قاعدة $MMS$ وبذلك نحصل على قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي بطريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة. وهكذا نستمر بتطبيق قاعدة $MMS$ بالنسبة لبقية قيم $m>4$ ثم نطبق عليها طريقة تعجيل رومبرك لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة الحقيقية للتكامل إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المطلوبة التي نختارها .

## 4.الأمثلة والنتائج

**مثال 1 :-** التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos\left(3y-2z\right)dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 0.411233516712 (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة (19) وبتطبيق طريقتي $RO\left(MMS\right),AI\left(MMS\right)$ حصلنا على النتائج المدونة في الجدولين (1) و(2) هي كالأتي : -

1- نستنتج من الجدول (1) عندما $m=64$ القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام قاعدة $MMS$ وعند تطبيق طريقة $AI(MMS)$ حصلنا على قيمة صحيحة لثامن مراتب عشرية وبـ ($2^{18}$ فترة جزئية) .

2- ونلاحظ من الجدول (2) عندما $m=64$ القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام القاعدة المذكورة وعند تطبيق طريقة $RO(MMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) وبـ( $2^{18}$ فترة جزئية) . وبذلك فان طريقة $RO(MMS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب.

**مثال 2** :- التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 5.073214111772 (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $\left(x,y,z\right)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (19) وعند استعمال طريقتي $RO\left(MMS\right),AI(MMS)$ حصلنا على النتائج المدونة في جدولين (3) و( 4)على التوالي هي كالأتي :-

1- نستنتج من الجدول (3) عندما $m=32$ القيمة صحيحة لمرتبتين عشريتين باستخدام قاعدة $MMS$ وعند تطبيق طريقة$AI(MMS)$ حصلنا على قيمة صحيحة لسبع مراتب عشرية وبـ ($2^{15}$ فترة جزئية) . في حين حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام القاعدة المذكورة عندما $m=64$ وباستخدام طريقة$AI(MMS)$ حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية وبـ ($2^{18}$ فترة جزئية) .

2- ونلاحظ من الجدول (4) عندما $m=32$ القيمة صحيحة لمرتبتين عشريتين باستخدام قاعدة $MMS$ وعند تطبيق طريقة$RO(MMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) وبـ ($2^{15}$ فترة جزئية) . وبذلك فان طريقة $RO(MMS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

**مثال 3** :- التكامل $I=\int_{3.5}^{4}\int_{2.5}^{3}\int_{1.5}^{2}\frac{y}{\sqrt{(1+xz)^3}}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية هي 0.01672449864664 (مقربة إلى لأربع عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل$\left(x,y,z\right)\in[1.5,2]\times[2.5,3]\times[3.5,4]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة (19) والجدولين (5), (6) يبينان حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال طريقتي $RO(MMS),\ AI(MMS)$ على التوالي.

1- نستنتج من الجدول (5) عندما $m = 32$ القيمة صحيحة لسبع مراتب عشرية باستخدام قاعدة $MMS$ وعند تطبيق طريقة $AI(MMS)$ حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية وبـ ($2^{15}$ فترة جزئية) .

2- ونلاحظ من الجدول (6) عندما $m = 32$ القيمة صحيحة لسبع مراتب عشرية باستخدام القاعدة المذكورة وعند تطبيق طريقة $RO(MMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة إلى لأربع عشر مرتبة عشرية) وبـ ($2^{15}$ فترة جزئية) . وبذلك فان طريقة $RO(MMS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب.

## 5. المناقشة

تبين من خلال نتائج جداول هذا البحث الأتي :-

1- عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة المركبة من قاعدتي النقطة الوسطى على البعدين $Y$ و $Z$ وسمبسون على البعد $X$ عندما عدد التقسيمات على البعد الداخلي مساوي للعدد التقسيمات على البعد الأوسط ومساوي للعدد التقسيمات على البعد الخارجي إن هذه القاعدة ( $MMS$ ) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال أية طريقة تعجيلية عليها حيث حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية في التكامل الأول عندما $m = 64$ و مرتبتين عشريتين في التكامل الثاني وسبع مراتب عشرية في التكامل الثالث عندما $m = 32$ .

2- عند استعمال طريقة تعجيل آيتكن لتعجيل اقتراب القيم التقريبية إلى القيم الحقيقية للتكاملات حصلنا على قيمة صحيحة لثامن مراتب عشرية بـ ($2^{18}$ فترة جزئية) في التكامل الأول وعلى قيمة صحيحة لسبع مراتب عشرية بـ ($2^{15}$ فترة جزئية) في التكامل الثاني، في حين حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية بـ ($2^{15}$ فترة جزئية) في التكامل الثالث.

3- عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على نتائج أفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب آذ كانت مطابقة لقيمة الحقيقية في التكاملات الثلاثة المذكورة .

وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقتين $RO(MMS), AI(MMS)$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكن طريقة $RO(MMS)$ أثبتت أفضليتها على طريقة $AI(MMS)$ من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية إلى القيم التكاملات الحقيقية والزمن المستخدم.

| m | قيم قاعدة MMS | k=2 | k=4 | k=6 | k=8 | k=10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.582450707820 | | | | | |
| 4 | 0.447425678128 | 0.402417334897 | | | | |
| 8 | 0.419932710475 | 0.410768387924 | 0.411325124793 | | | |
| 16 | 0.413387368267 | 0.411205587531 | 0.411234734171 | 0.411233299400 | | |
| 32 | 0.411770683294 | 0.411231788302 | 0.411233535020 | 0.411233515986 | 0.411233516836 | |
| 64 | 0.411367727537 | 0.411233408952 | 0.411233516995 | 0.411233516709 | 0.411233516712 | 0.411233516712 |

**الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos\left((3y-2z)\right)dxdydz = 0.411233516712$ **باستخدام طريقة** $RO(MMS)$

| m | MMS قيم قاعدة | AI(MMS) | AI(MMS) |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.582450707820 | | |
| 4 | 0.447425678128 | | |
| 8 | 0.419932710475 | 0.412903520706 | |
| 16 | 0.413387368267 | 0.411342195904 | |
| 32 | 0.411770683294 | 0.411240382609 | 0.411233280269 |
| 64 | 0.411367727537 | 0.411233947005 | 0.411233512762 |

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos((3y-2z))dxdydz=0.411233516712$ باستخدام طريقة $AI(MMS)$

| m | MMS قيم قاعدة | AI(MMS) | AI(MMS) |
|---|---|---|---|
| 2 | 4.970505562463 | | |
| 4 | 5.046982203674 | | |
| 8 | 5.066620381046 | 5.073405539977 | |
| 16 | 5.071563427106 | 5.073226134558 | |
| 32 | 5.072801299583 | 5.073214864087 | 5.073214108580 |
| 64 | 5.073110899907 | 5.073214158802 | 5.073214111643 |

الجدول(3) حساب التكامل الثلاثي $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz=5.073214111772$ باستخدام طريقة $AI(MMS)$

| m | MMS قيم قاعدة | k=2 | k=4 | k=6 | k=8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4.970505562463 | | | | |
| 4 | 5.046982203674 | 5.072474417410 | | | |
| 8 | 5.066620381046 | 5.073166440170 | 5.073212575021 | | |
| 16 | 5.071563427106 | 5.073211109126 | 5.073214087056 | 5.073214111057 | |
| 32 | 5.072801299583 | 5.073213923742 | 5.073214111384 | 5.073214111760 | 5.073214111772 |

الجدول (4) حساب التكامل الثلاثي $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz=5.073214111772$ باستخدام طريقة $RO(MMS)$

| m | قيم قاعدة MMS | AI(MMS) | AI(MMS) |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.01671705713723 | | |
| 4 | 0.01672239312928 | | |
| 8 | 0.01672395599688 | 0.01672460335297 | |
| 16 | 0.01672436195094 | 0.01672450439781 | |
| 32 | 0.01672446440787 | 0.01672449899604 | 0.01672449868445 |

الجدول(5) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_{3.5}^{4}\int_{2.5}^{3}\int_{1.5}^{2} \frac{y}{\sqrt{(1+xz)^3}} dxdydz = 0.01672449864664$ باستخدام طريقة $AI(MMS)$

| m | قيم قاعدة MMS | k=2 | k=4 | k=6 | k=8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.01671705713723 | | | | |
| 4 | 0.01672239312928 | 0.01672417179330 | | | |
| 8 | 0.01672395599688 | 0.01672447695274 | 0.01672449729671 | | |
| 16 | 0.01672436195094 | 0.01672449726896 | 0.01672449862337 | 0.01672449864443 | |
| 32 | 0.01672446440787 | 0.01672449856018 | 0.01672449864626 | 0.01672449864663 | 0.01672449864664 |

الجدول(6) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_{3.5}^{4}\int_{2.5}^{3}\int_{1.5}^{2} \frac{y}{\sqrt{(1+xz)^3}} dxdydz = 0.01672449864664$ باستخدام طريقة $RO(MMS)$

**المصادر**

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , (1967).

[2] Anthony Ralston ,"A First Course in Numerical Analysis " Mc Graw -Hill Book Company ,(1965).

[3] موسى ، صفاء مهدي ، " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عددياً باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،(2011) .

[4] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين(1988) .

[5] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،(2009) .

[6] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة،(2010).

[7] محمد، علي حسن، صفاء مهدي موسى ، وفاء محمد ، " اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطا لها " ، بحث منشور في مجلة جامعة كربلاء ، (2013) .

# Evaluation of Triple Integrals with Continuous Integrands Numerically by Using Two Methods AI(MMS) and RO(MMS) and comparison *Between* them

**Assis. Lecturer . *Safaa Mahdi Muosa* AL-Gasas**
**University of Kufa / College of Education for Girls / Department of Mathematics**

**Recived :29\5\2014** **Recived :27\8\2014** **Accepted :16\9\2014**

## ***Abstract***

The main aim of this paper is to evaluate the triple integrals with continuous integrands numerically by using two method obtained from two accelerations Aitken‘s and Romberg with the combination rule from( two rules Mid- point rule on both two dimensions of exterior Z and middle dimension Y and Simpson‘s rule on the interior dimension X, denoted by MMS) where the number of divisions on the exterior dimension is equal to the number of divisions on the middle dimension and equal to the number of divisions on the interior dimension where we have introduced theorem with proof to find this rule and the correction error bounds with respect its and to improve the results we used two accelerations mentioned with rule MMS and we shall call these two methods AI(MMS) and RO(MMS) where we got high accuracy in the results by few subintervals relatively and short time .