مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد (٦) العدد (٢) السنة (٢٠١٤)

حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة باستعمال طريقة تعجيل آيتكن مع قاعدة SM

أ.علي حسن محمد
م.م صفاء مهدي موسى
إحصائي . روى حميد
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

استلام البحث ٢٠١٢/٩/١٩ ارسال التعديلات ٢٠١٣/٤/١٧ قبول النشر ٢٠١٤/٦/٤

المستخلص

أن الهدف الرئيس من هذا البحث هو حساب قيم التكاملات الثنائية التي مكاملاتها دوال مستمرة عدديا باستعمال قاعدة SM (القاعدة مركبة من استخدام قاعدة سمبسون على البعد الخارجي Y وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي X)عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ ت إليها فترة التكامل على البعد الخارجي، أي أن $\left(h=\bar{h}\right)$ حيث إن $\bar{h}$ تعني المسافات بين الإحداثيات على المحور X و h هي المسافات بين الإحداثيات على المحور Y ولتحسين نتائج التكاملات طبقنا طريقة تعجيل ايتكن على القيم الناتجة من القاعدة المذكورة لتعجيل اقتراب القيم التقريبية الى القيم الحقيقية للتكاملات وسمينا الطريقة بـ $\left(ASM\right)$ وقد حصلنا على نتائج جيدة من الدقة وسرعة الاقتراب إلى القيم التحليلية (الحقيقية) وبفترات جزئية قليلة نسبياً .

Mathematics Subject Classification: 65XX

1-المقدمة

يعرف التكامل العددي (Numerical Integration) بأنه دراسة كيفية إيجاد القيمة التقريبية لتكامل معين. ويرجع تاريخ تطبيق التكامل العددي إلى بداياته في أيجاد مساحة دائرة بطريقة التربيع الإغريقي (Greek quadrature) من خلال تجزئة الدائرة إلى مضلعات منتظمة (Regular polygons) وبواسطة هذه الطريقة تمكن ارخميدس من أيجاد الحدود العليا والدنيا لقيمة النسبة الثابتة $\left(\pi\right)$.

يتميز التحليل العددي في ابتكار طرائق عددية متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال ولما كانت كفاءة الطريقة تعتمد على سهولة تنفيذها فإن اختيار الطريقة المناسبة من أجل تقريب حل مسألة يتأثر بواسطة التغير في تقنية الحاسبات.

ولأهمية التكامل الثنائي (Double Integral) في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي على سبيل المثال مساحة السطح المحصورة بين قطعيين المكافئين $y^2=4-x$ و $y^2=4-4x$ فضلاً عن أيجاد المركز المتوسط لسطح المستوي الواقع خارج الدائرة $\rho=1$ وداخل منحني القلب $\rho=1+\cos\theta$ وكذلك أيجاد الحجم المحدد بالاسطوانة $x^2+y^2=4$ والمستويين $y+z=4$ و $z=0$ ، فرانك ايرز[4]. فقد دعا الأمر كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)$ هما هانس جار وجاكوبسن [1] عام 1973 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز و رابينوتز [2] عام 1975. فضلا عن عمل عدد من الباحثين على ايجاد طرائق عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية منهم

في عام 1984 قدم محمد [5] أربع طرائق عددية مركبة هي (رومبرك (رومبرك) ، كاوس (كاوس) ، رومبرك (كاوس) و طريقة كاوس (رومبرك)) اعتمدت هذه الطرائق على تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (أحدى صيغ نيوتن – كوتس) وقاعدة كاوس وقد حصل على نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية وقد أثبتت طريقة كاوس (كاوس) أفضليتها على بقية الطرائق في حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية التي مكاملاتها مستمرة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم إلى قيم التكاملات الحقيقية وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي عام 2005 ناقشت الطائي [6] طريقة لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة وهذه الطريقة مركبة من (قاعدة سمبسون على البعد الداخلي X و طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي Y) وقد أعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة وبالأسلوب الذي استخدمه محمد [5].

وفي عام 2009 قدمت ضياء [7] أربع طرائق عددية مركبة هي : $RM\left(RM\right), RS\left(RM\right), RM\left(RS\right), RS\left(RS\right)$ اعتمدت هذه الطرائق على قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون مع طريقة تعجيل رومبرك على البعدين الخارجي والداخلي لحساب قيم التكاملات الثنائية التي مكاملاتها دوال مستمرة وقد أعطت جميع هذه الطرائق نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

وفي عام 2010 قدمت عكار [8] طريقة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثنائية وهي طريقة مركبة من تعجيل رومبرك وقاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي والخارجي عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الخارجي وأسمتها RMM والتي أعطت نتائج أفضل من النتائج التي حصلت عليها ضياء [7].

وفي عام 2011 قدمت موسى [9] ثلاث طرائق عددية جديدة مركبة هي : RSS, RMS, RSM لإيجاد قيم التكاملات الثنائية التي مكاملاتها دوال مستمرة وقد اعتمدت هذه الطرائق على قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون مع طريقة تعجيل رومبرك عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الخارجي ولا تعتمد هذه الطرائق على أسلوب التكامل الأحادي .
كل الذين تقدم ذكرهم استخدموا أسلوب التكامل الأحادي في حساب التكامل الثنائي وقد أعطت هذه الطرائق نتائجاً جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.

أما في بحثنا هذا نعمل على استخدام طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة، وسنطبق طريقة تعجيل آيتكن على القيم الناتجة من استعمال قاعدتي سمبسون على البعد Y والنقطة الوسطى على البعد X عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها فترة التكامل على البعد الخارجي و $\left(h=\bar{h}\right)$ وأسميناها بـ ASM .

2- حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة باستعمال قاعدة SM مع طريقة تعجيل آيتكن

نستعرض الآن طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية بتطبيق طريقة تعجيل آيتكن على القيم الناتجة من استخدام القاعدة المركبة من قاعدتي سمبسون على البعد الخارجي Y والنقطة الوسطى على البعد الداخلي X عندما $2n$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها الفترة $\left[a,b\right]$) مساوية إلى $2m$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأت إليها الفترة $\left[c,d\right]$) وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز ASM حيث أن A هي طريقة آيتكن أما SM فهي القاعدة المذكورة أعلاه، موسى [9].

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي:-

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

حيث إن $f(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=SM(h)+E(h) \qquad ...(1)$$

حيث $SM(h)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة المذكورة و $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction (terms) الممكن إضافتها إلى قيم $SM(h)$ ، وان $h=\frac{(b-a)}{n}=\frac{(d-c)}{m}$ ، (حيث m,n عدد التقسيمات على المحورين X , Y على التوالي و $(m=n)$).

$$SM=\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{2n}\left[f(x_i,c)+f(x_i,d)+4\sum_{j=1}^{n}f(x_i,y_{(2j-1)})+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_{2j})\right] \qquad \cdots(2)$$

حيث أن :- $x_i=a+\frac{(2i-1)}{2}h$, $i=1,2,\ldots,2n$

$$j=1,2,\ldots n\ ,\ y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h \qquad , \qquad j=1,2,\ldots,n-1\ ,\ y_{2j}=c+2jh$$

3-طريقة أيتكن دلتا التربيعية Aitken's delta – Squared Process

في عام 1926 وجد ألكسندر أيتكن(1895- 1964) منهجاً جديداً لتعجيل نسبة تقارب المتتابعة وقد كانت الصيغة الأولى لهذه الطريقة معروفة للعالم الرياضي الياباني تاكاكازوسكي.كوا Takakazu Seki kowa الذي عاش نهاية القرن السابع عشر وتحديداً في (1642 - 1708) .

ولتوضيح الطريقة نفرض المتتابعة $\{x_n\}$ حيث $\{x_n\}=\{x_1,x_2,...x_k...\}$ تقترب خطياً Linearly Convergence الى قيمة نهائية معينة β اذن $\beta-x_{i+1}=C_i(\beta-x_i)$ رالستون [3]

بحيث $|C_i|<1$ وان $C_i\to C$

نلاحظ ان C_i ستكون تقريبا ثابتة ويمكننا كتابة

...(3)

$$\beta-x_{i+1}\approx\bar{C}(\beta-x_i)$$

$$\frac{\beta-x_{i+2}}{\beta-x_{i+1}}\approx\frac{\beta-x_{i+1}}{\beta-x_i}$$

حيث $|\bar{C}|=C$ ونلاحظ كذلك بان

أي ان :

...(4)

$$\beta\approx\frac{x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2}{x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i}=x_{i+2}-\frac{(\Delta x_{i+1})^2}{\Delta^2 x_i}$$

حيث ان $\Delta x_i=(x_{i+1}-x_i)$ وان $\Delta^2x_i=x_i-2x_{i+1}-x_{i-2}$

وعند إستخدام n من عناصر المتتابعة $\{x_n\}$ يمكننا الحصول على $n-2$ من عناصر متتابعة اخرى $\{S\}$ تقترب أسرع الى β من المتتابعة $\{x_n\}$ حيث

...(5)

$$s_{i+2} = x_{i+2} - \frac{(\Delta x_{i+1})^2}{\Delta^2 x_i}$$

إذ ان $i = 1, 2, \ldots, n-2$

إن هذه العملية ماهي إلا تعجيل إقتراب Accelerating The Convergence القيم الى القيمة النهائية β .

و سنطبقها على القيم الناتجة من قاعدة SM ولتعجيل الحصول على قيم أفضل للتكاملات بدلاً من الاستمرار في زيادة عدد الفترات الجزئية . فاذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة SM فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة تعجيل أيتكن وذلك بإستخدام المعادلة (5) ثم نستخدم ايضاً تعجيل أيتكن على القيم $n-2$ فنحصل على $n-4$ قيمة وهكذا نستمر الى ان نحصل على الدقة المطلوبة.

4 - الأمثلة :-

نستعرض فيما يلي بعض التكاملات التي مكاملاتها مستمرة في فترة التكامل ونستخدم الطريقة تعجيل أيتكن مع SM لتحسين النتائج للتكاملات أدناه.

1- $I = \int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)\,dxdy$ إذ أن قيمته التحليلية هي 1.0891386521 مقربة لعشر مراتب عشرية.

2- $I = \int_0^1\int_1^2 x e^{-(x+y)}\,dxdy$ إذ أن قيمته التحليلية هي 0.0614477282 مقربة لعشر مراتب عشرية.

3- $I = \int_0^1\int_0^1 x \sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))\,dxdy$ إذ أن قيمته التحليلية 0.1107398164 مقربة لعشر مراتب عشرية.

5 - النتائج :-

أن مكامل التكامل $I = \int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)\,dxdy$ معرف لكل $(x,y) \in [1,2]\times[1,2]$ كما في الشكل رقم (1)

وعند حساب التكامل عددياً باستعمال قاعدة SM مع طريقة تعجيل ايتكن حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (1) :-

نستنتج من الجدول (1) انه عندما $n = m = 16$ فان قيمة التكامل أعلاه باستخدام قاعدة SM تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية بينما القيمة بطريقة تعجيل آيتكن مع القاعدة المذكورة تكون صحيحة لست مراتب عشرية وبـ (2^8 فترة جزئية) فضلاً عن القيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية عندما $n = m = 32$ وبـ (2^{10} فترة جزئية).

كذلك التكامل $I = \int_0^1\int_1^2 x e^{(-x-y)}\,dxdy$ ذات مكامل معرف لكل $(x,y) \in [0,1]\times[1,2]$ كما في الشكل رقم (2) وعند حساب التكامل عددياً باستعمال قاعدة SM مع طريقة تعجيل آيتكن حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (2) :-

ونلاحظ من الجدول (2) عندما $n = m = 32$ فان القيمة بقاعدة SM تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية فقط وباستخدام طريقة تعجيل آيتكن مع القاعدة المشار أليها حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية بـ (2^{10} فترة جزئية) الا ان القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لعشر مراتب عشرية)عندما $n = m = 64$ وبـ(2^{12} فترة جزئية).

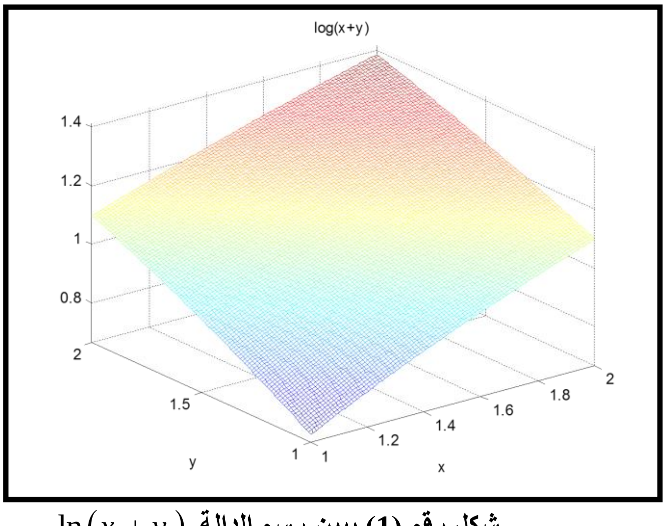
وأيضا مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))dxdy$ معرف لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ كما في الشكل رقم (3) وعند حساب التكامل عددياً باستعمال قاعدة SM مع طريقة تعجيل ايتكن حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (3) :-

ونلاحظ من الجدول (3) عندما $n=m=64$ أن القيمة بقاعدة SM تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية فقط ، وباستخدام طريقة تعجيل ايتكن مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية بـ (2^{12} فترة جزئية)

الا انه امكن الحصول على القيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية وبالقاعدة المشار اليها عندما $n=m=128$ وعلى قيمة القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لعشر مراتب عشرية) وبـ(2^{14}فترة جزئية) عند استعمال طريقة تعجيل ايتكن

6.المناقشة

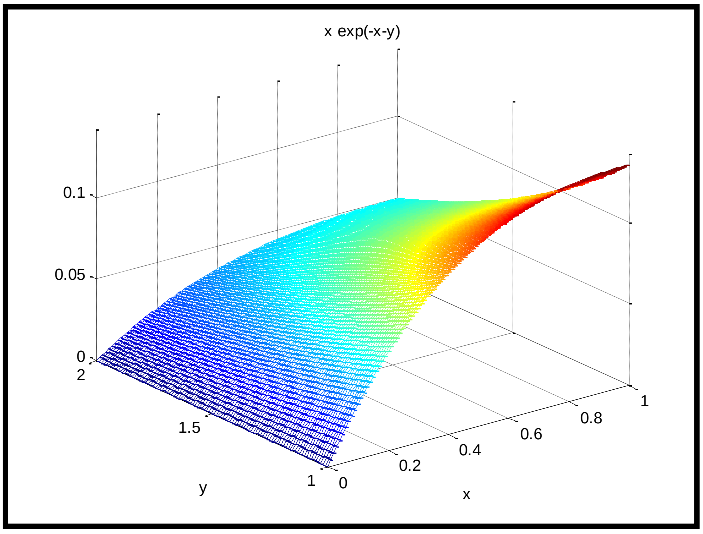
نستنتج من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة (SM) إن هذه القاعدة تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية دون استعمال الطريقة التعجيلية عليها، وقد أوضحت الجداول انه من خلال استخدام تعجيل آيتكن مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث الدقة و سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات الحقيقية ، إذ كانت صحيحة لتسع مراتب عشرية في المثال الأول و مطابقة للقيمة التحليلية في المثالين الثاني والثالث وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة ASM في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة.



شكل رقم (1) يبين رسم الدالة $\ln(x+y)$

n=m	قيم القاعدة SM	ASM	ASM
2	1.0903304664		
4	1.0894430452		
8	1.0892151854	1.0891364663	
16	1.0891578132	1.0891385064	
32	1.0891434441	1.0891386428	1.0891386526

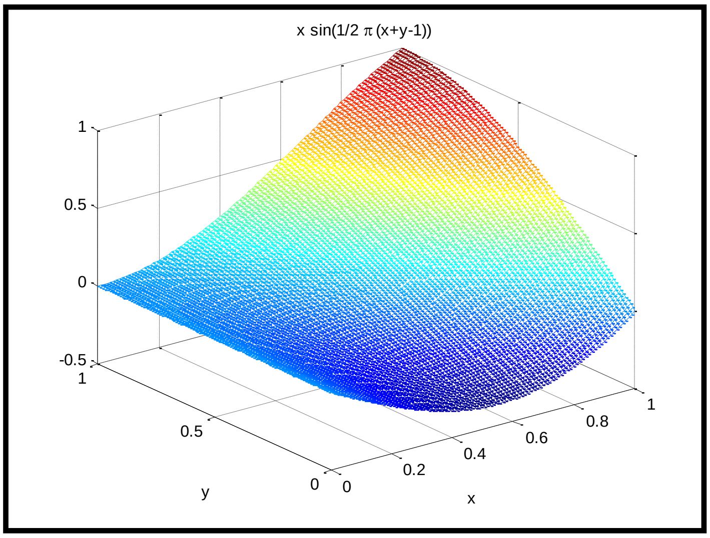
جدول (1) حساب التكامل الثنائي $\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)dxdy = 1.0891386521$ **عددياً**



شكل رقم (2) يبين رسم الدالة $xe^{(-x-y)}$

n=m	قيم القاعدة SM	ASM	ASM
2	0.0638519980		
4	0.0620521554		
8	0.0615990514	0.0614466066	
16	0.0614855726	0.0614476560	
32	0.0614571902	0.0614477237	0.0614477283
64	0.0614500937	0.0614477279	0.0614477282

جدول (2) حساب التكامل الثنائي $\int_1^2\int_0^1 xe^{(-x-y)}dxdy = 0.0614477282$ **عددياً**



شكل رقم (3) يبين رسم الدالة $x\sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))$

n=m	قيم القاعدةSM	ASM	ASM
2	0.0863304096		
4	0.1047772143		
8	0.1092572152	0.1106942230	
16	0.1103696594	0.1107371460	
32	0.1106473078	0.1107396521	0.1107398075
64	0.1107166911	0.1107398061	0.1107398162
128	0.1107340352	0.1107398157	0.1107398164

جدول (3) حساب التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))dxdy = 0.1107398164$ **عددياً**

المصادر

[1] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- andTwo-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , theTechnical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,(1973) .

[2] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , (1975)

[3] Anthony Ralston , "A First Course in Numerical Analysis " Mc Graw – Hill Book Company , pp. 87-94 , 114-133 , 347-348 ,(1965).

[4] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين (1988).

[5] محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة البصرة ، (1984).

[6] الطائي ، علية شاني ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،(2005) .

[7] ضياء ، عذراء محمد ، " طرائق العددية لإيجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، (2009).

[8] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة (2010).

[9] موسى ، صفاء مهدي ، " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عددياً باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،(2011) .

Evaluation of Double integrals with Continuous Integrands by using *Acceleration Methods Aitken's* with (SM) Rule.

Prof. Ali Hassan Mohammed
Assis. Lecturer . *Safaa Mahdi Muosa*
Roua Hamid
College of Education for Girls / Department of Mathematics

Recived :19\9\2012 Recived :17\4\2013 Accepted :4\6\2014

Abstract

The main aim of this research is to evaluate the value of double integrations whose integrands continuous function numerically by using SM rule (this rule compound from Simpson's rule on the exterior dimension Y and Mid point rule on the interior dimension X) when the number of subintervals on the interior dimension equal to the number of subintervals on the exterior dimension , that is mean $\left(h=\bar{h}\right)$ where as $\bar{h}$ means the distances between ordinates on the X-axis and h means the distances between ordinates on the Y-axis . And to improve the results we applied Aitken's acceleration over the Yielded values from the SM rule to accelerate the convergence of the approximate to the real value of integrations and we named this method (ASM) and we got good resulte with respect to the accuracy and speed of convergence to the analytic (real) values by using little subintervals.