Numerical Method for Evaluation of Double Integrals with continuous Integrands by using Trapezoidal rule and Romberg acceleration when the number of subintervals at the two dimensions are unequal

Prof .Ali Hassan Mohammed **Sarmad Rahman Hussein**

طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع تعجيل رومبرك عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

أ. علي حسن محمد **سرمد رحمان حسين**

م / 07805959162 **م / 07816038113**

جامعة الكوفة/كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات **جامعة الكوفة/كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات**

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة عددية لحساب التكاملات الثنائية البعد باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين والتي مكاملاتها دوال مستمرة في منطقة التكامل واشتقاق صيغة الخطأ (حدود التصحيح)عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على كلا البعدين غير متساوية وسندرس ونطبق حالة خاصة على تكاملات مختارة عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على البعد y (m)مساوية لضعف اعداد الفترات الجزئية على البعد x (n) اي ان $m = 2n$ بمعنى ان $h_2 = \frac{1}{2}h_1$ وسوف نقوم بتحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك [3] و [4] وقد اظهرت نتائج التكاملات المختارة دقة عالية في النتائج باستخدام عدد قليل من الفترات الجزئية وبالتالي يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب مثل هذه التكاملات . سوف نرمز للقاعدة بالرمز RT_i ، اذ يشير الحرف T_i الى قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين والحرف R الى تعجيل رومبرك.

Abstract

The main of this research is to find the values of the double integrals numerically by using Trapezoidal method for two dimensions it's integrands are continuous in region of integral and derives error form (correction terms) when number of subintervals on both dimensions are unequal and we will study and apply special case on well choosen integrals when numbers of subintervals on dimension y (m) equals to twice of numbers of subintervals on dimension x (n) in other word $m = 2n$ means that $h_2 = \frac{1}{2}h_1$ and we will improve the results by using Romberg acceleration [3] and [4] .High accuraceg in results had appeared of the choosen integals by using alittle number of subintervals , thus , It can be depend on this way in calculating like these integrals. We will give asymbole for this rule (method) RT_i , T_i indicates to Trapezoidal rule on both dimensions, R indicates to Romberg acceleration.

١.المقدمة

ان التكامل الثنائي له اهمية في ايجاد مساحة السطوح وايجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وايجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي ، ومن الامثلة على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ حول المحور القطبي. فضلا عن اهميته في ايجاد مساحة سطح منحن كايجاد مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب$\rho = (1 - \cos\theta)$ او حساب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2 + z^2 = 6y$ ، فرانك [11]، مما دعا كثير من الباحثين الى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن [2] عام 1973 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز و رابينوتز 1975 [5] . وقد اشتغل كل من فوكس [1] في عام 1967 وفوكس وهيز [7] في عام 1970 وشانكس [6] في عام 1972 في حساب التكاملات عدديا مهما كان سلوك المكامل.

في عام 1984 عمل محمد [12] على أيجاد قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستخدام طرائق مركبة منها.

- طريقة رومبرك (رومبرك):التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x .
- طريقة كاوس (كاوس):التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعدين الخارجي y والداخلي x.
- طريقة رومبرك (كاوس) :التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة كاوس على البعد الداخلي x.
- طريقة كاوس (رومبرك):التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعد الخارجي y وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي x.

وقد تبين له من خلال المقارنة بين الطرائق المركبة في أعلاه وعلى امثلة متعددة بان طريقة كاوس (كاوس) ، اثبتت أفضليتها على بقية الطرائق في حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية التي مكاملاتها مستمرة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم الى قيم التكاملات المضبوطة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي عام 2005 استخدمت الطائي [9] طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وقد اعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة وبالأسلوب الذي استخدمه محمد [12] .

في عام 2009 استخدمت ضياء [10] أربع طرائق عددية مركبة $RS\,(RM)$ ، $RM\,(RM)$ ، $RS\,(RS)$ ، $RM\,(RS)$ اعتمدت هذه الطرائق على قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون مع طريقة تعجيل رومبرك على البعدين الخارجي والداخلي لحساب قيم التكاملات الثنائية التي مكاملاتها دوال مستمرة وقد اعطت جميع هذه الطرائق نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

أما في بحثنا هذا سنعرض طريقة عددية مركبة لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة ومن ثم تطبيق تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق القاعدة المركبة (قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y)عندما n (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة $[a,b]$)غير مساوية الى m (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة $[c,d]$) وسندرس حالة خاصة عندما $m = 2n$ بمعنى $(h_2 = \frac{1}{2}h_1)$ وأسميناها بـ RT_i واشتققنا حدود التصحيح. حيث $h_1 = \frac{(b-c)}{n}$ ، $h_2 = \frac{(d-c)}{m}$ اذ يشير الحرف T_i الى قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين والحرف R الى تعجيل رومبرك. سوف نورد الان مبرهنة لحساب قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة التي قدمتها الكرمي [8] عام 2012 لحساب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي.

مبرهنة: قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين (الداخلي x و الخارجي y) (TT)

لتكن الدالة $f\,(x,y)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي $I = \int_c^d\int_a^b f\,(x,y)dxdy$

يمكن حسابها من القاعدة الآتية:

$$TT \simeq \frac{h^2}{4}\left[f\,(a,c)+f\,(a,d)+f\,(b,c)+f\,(b,d)+ 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\,(a,y_i)+f\,(b,y_i)+f\,(x_i,c)+f\,(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f\,(x_i,y_j)\right)\right]$$

وان صيغة الخطأ هي $$E_{TT}(h) = I - TT\,(h) = A_{TT}\,h^2 + B_{TT}\,h^4 + C_{TT}\,h^6 + \cdots$$

حيث $A_{TT}, B_{TT}, C_{TT}, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط ولا تعتمد على h .

وان عدد الفترات على البعدين متساوي بمعنى ان $h_1 = h_2$.

٢.اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة وصيغ الخطأ باستعمال قاعدة شبه المنحرف

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy \qquad ...(1)$$

يمكن حسابها بتطبيق القاعدة T_i من الصيغة الاتية:

$$T_i(h_i)=\frac{h_1h_2}{4}\Bigg(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_m)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_m)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_0+ih_1,y_m)+f(x_0+ih_1,y_m)\right]+$$
$$2\sum_{j=1}^{m-1}\left[f(x_0,y_0+jh_2)+f(x_n,y_0+jh_2)\right]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_0+ih_1,y_0+jh_2)\right]\Bigg) \qquad ...(2)$$

حيث $x_i=a+ih_1$, $i=1,2,\dots,n-1$, $y_j=c+jh_2$, $j=1,2,\dots,m-1$,

وان صيغة الخطأ (حدود التصحيح) هي:

$$E_{T_i}(h_i)=I-T_i(h_i)=A_1h_1^2+A_2h_1^4+\dots+A_1h_2+A_2h_2+\dots$$

اذ ان $A_1,A_2,\dots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط ولا تعتمد على h_1 ، h_2 .

يمكن كتابة التكامل (1) بالصيغة

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=T_i(h_i)+E_{T_i}(h_i) \qquad ...(3)$$

حيث $T_i(h_i)$ تمثل قيمة التكامل عدديا باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين وان $E_{T_i}(h_i)$ هي سلسلة حدود التصحيح (correction terms) الممكن اضافتها الى قيم $T_i(h_i)$.

من المعلوم لدينا ان قيمة التكامل الاحادي $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h_1}{2}\Big(f(x_0)+2f(x_0+h_1)+2f(x_0+2h_1)+\dots+f\big(x_0+(n-1)h_1\big)+f(x_n)\Big) \qquad ...(4)$$

حيث $h_1=\frac{(x_n-x_0)}{n}$ ، وتكون صيغة الخطأ للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف بالاتي:-

$$E(h_1)=\frac{-1}{12}h_1^2(f_n'-f_0')+\frac{1}{720}h_1^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})-\dots \qquad ...(5)$$

فوكس [1]

وباستخدام نظرية القيمة الوسطى في التفاضل (Mean-value theorem for derivatives) [13] للصيغة (5) نحصل على

$$E(h_1)=\frac{-(x_n-x_0)}{12}h_1^2f^{(2)}(\vartheta_1)+\frac{(x_n-x_0)}{720}h_1^4f^{(4)}(\vartheta_2)+\dots \qquad ...(6)$$

حيث $\vartheta_l\in(x_0,x_n)$, $l=1,2,\dots$

لذا بالنسبة للتكامل الداخلي $\int_a^b f(x,y)dx$ يمكن حسابه عدديا بقاعدة شبه المنحرف على البعد x و(التعامل مع y كثابت) كالاتي

$$T=\int_a^b f(x,y)dx=\frac{h_1}{2}\left[f(a,y)+f(b,y)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y)\right]-\frac{(b-a)}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f(\vartheta_1,y)}{\partial x^2}+$$

$$\frac{(b-a)}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f(\vartheta_2,y)}{\partial x^4}-\frac{(b-a)}{30240}h_1^6\frac{\partial^6 f(\vartheta_3,y)}{\partial x^6}+\ldots \qquad (7)$$

حيث $(a,b)\ni ...,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ وبمكاملة الصيغة (7) بالنسبة الى y على الفترة $[c,d]$ و(التعامل مع x كثابت) نحصل على الاتـي:

$$i)\ \frac{h_1}{2}\int_c^d f(a,y)dy=\frac{h_1h_2}{4}\left[f(a,c)+f(a,d)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(a,y_j)\right]+\frac{h_1}{2}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_2)}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\lambda_3)}{\partial y^6}+\ldots\right]$$

$$ii)\ \frac{h_1}{2}\int_c^d f(b,y)dy=\frac{h_1h_2}{4}\left[f(b,c)+f(b,d)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(b,y_j)\right]+\frac{h_1}{2}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\bar{\lambda}_1)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(a,\bar{\lambda}_2)}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\bar{\lambda}_3)}{\partial y^6}+\ldots\right]$$

$$iii)\ 2\left(\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\int_c^d f(x_i,y)dy\right)=\frac{h_1h_2}{4}\left[2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,c)+f(x_i,d)\right)+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,y_j)\right)\right]+$$
$$h_1\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\zeta_{1j})}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^2\frac{\partial^4 f(a,\zeta_{2j})}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\zeta_{3j})}{\partial y^6}+\ldots\right]$$

اذ ان : $\lambda_i,\bar{\lambda}_i,\zeta_{ij}\ \in(c,d)$, $i=1,2,\ldots,n-1$

بتعويض عن i,ii,iii في المعادلة (7) نحصل على

$$T_i(h_i)=\frac{h_1h_2}{4}\Bigg(f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a+ih_1,c)+f(a+ih_1,d)\right]+2\sum_{j=1}^{m-1}\big[f(a,c+jh_2)$$
$$f(b,c+jh_2)\big]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a+ih_1,c+jh_2)\right]\Bigg)+\int_c^d\Bigg(\frac{-(b-a)}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f(\vartheta_1,y)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f(\vartheta_2,y)}{\partial x^4}$$
$$-\frac{(b-a)}{30240}h_1^6\frac{\partial^6 f(\vartheta_3,y)}{\partial x^6}+\ldots\Bigg)dy+\frac{h_1}{2}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_2)}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\lambda_3)}{\partial y^6}+\ldots\right]$$
$$\frac{h_1}{2}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\bar{\lambda}_1)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(a,\bar{\lambda}_2)}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\bar{\lambda}_3)}{\partial y^6}+\ldots\right]$$
$$h_1\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{-(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\zeta_{1j})}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^2\frac{\partial^4 f(a,\zeta_{2j})}{\partial y^4}-\frac{(d-c)}{30240}h_2^6\frac{\partial^6 f(a,\zeta_{3j})}{\partial y^6}+\ldots\right]\ldots(8)$$

حيث ان $\vartheta_i \in (a,b)$, $\zeta_{ij} \in (c,d)$, $i=1,2,\dots,\ j=1,2,\ \dots,m-1$,

باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل للمعادلة (8) نحصل على الاتي

$$T_i(h_i)=\frac{h_1h_2}{4}\Big(f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a+ih_1,c)+f(a+ih_1,d)\right]+2\sum_{j=1}^{m-1}\big[f(a,c+jh_2)$$
$$f(b,c+jh_2)\big]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a+ih_1,c+jh_2)\right]\Big)+(d-c)(b-a)\left[\frac{-1}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f(\vartheta_1,\theta_1)}{\partial x^2}+\frac{1}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f(\vartheta_2,\theta_2)}{\partial x^4}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{30240}h_1^6\frac{\partial^6 f(\vartheta_3,\theta_3)}{\partial x^6}\right]+h_2^2\left[\frac{-(d-c)}{24}h_1\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1)}{\partial y^2}+\frac{-(d-c)}{24}h_1\frac{\partial^2 f(a,\bar{\lambda}_1)}{\partial y^2}-h_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{-(d-c)}{12}\frac{\partial^2 f(a,\zeta_{1j})}{\partial y^2}\right]$$
$$-\frac{1}{30240}h_1^6\frac{\partial^6 f(\vartheta_3,\theta_3)}{\partial x^6}\Bigg]+h_2^2\left[\frac{-(d-c)}{24}h_1\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1)}{\partial y^2}+\frac{-(d-c)}{24}h_1\frac{\partial^2 f(a,\bar{\lambda}_1)}{\partial y^2}-h_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{-(d-c)}{12}\frac{\partial^2 f(a,\zeta_{1j})}{\partial y^2}\right]$$
$$+h_2^6\left[+\frac{(d-c)}{1440}h_1\frac{\partial^6 f(a,\lambda_3)}{\partial y^6}+\frac{(d-c)}{1440}h_1\frac{\partial^6 f(a,\bar{\lambda}_3)}{\partial y^6}+h_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(d-c)}{720}\frac{\partial^6 f(a,\zeta_{3j})}{\partial y^6}\right]+\dots\quad\dots(9)$$

حيث $\theta_i \in [c,d]$ ، $i=1,2,3,\dots$

وبما ان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\dots$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\dots$ دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ فأن صيغة الخطأ (حدود التصحيح) للتكامل (1) بقاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين x و y تصبح :

$$E_{T_i}(h_i)=(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f(\bar{\lambda}_1,\bar{\eta}_1)}{\partial x^2}+\frac{h_1^4}{720}\frac{\partial^4 f(\bar{\lambda}_2,\bar{\eta}_2)}{\partial x^4}-\dots\right)+(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f(\hat{\lambda}_1,\hat{\eta}_1)}{\partial y^2}+\frac{h_2^4}{720}\frac{\partial^4 f(\hat{\lambda}_2,\hat{\eta}_2)}{\partial y^4}-\dots\right)\dots(10)$$
$$=Ah_1^2+A_2h_1^4+\dots+A_1h_2^2+A_2h_2^4+\dots$$

اذ ان : $(\hat{\lambda}_1,\hat{\eta}_1),(\hat{\lambda}_2,\hat{\eta}_2),\dots,(\bar{\lambda}_1,\bar{\eta}_1),(\bar{\lambda}_2,\bar{\eta}_2),\dots \in [a,b]\times[c,d]$. وفي حالة خاصة عندما $(h_2=\frac{1}{2}h_1)$

لذا فأن :

$$E_{T_i}(h_i)=B_1h_1^2+B_2h_1^4+\dots \qquad \dots(11)$$

حيث $B_1,B_2,\dots$ ثوابت لا تعتمد على h_1 وانما تعتمد على المشتقة الجزئية لـ f .

٣.الامثلة:

١. $\int_1^2\int_1^2 y\,e^{-(x+y)}dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.07668214130010 مقربة الى خمسة عشر مرتبة عشرية.

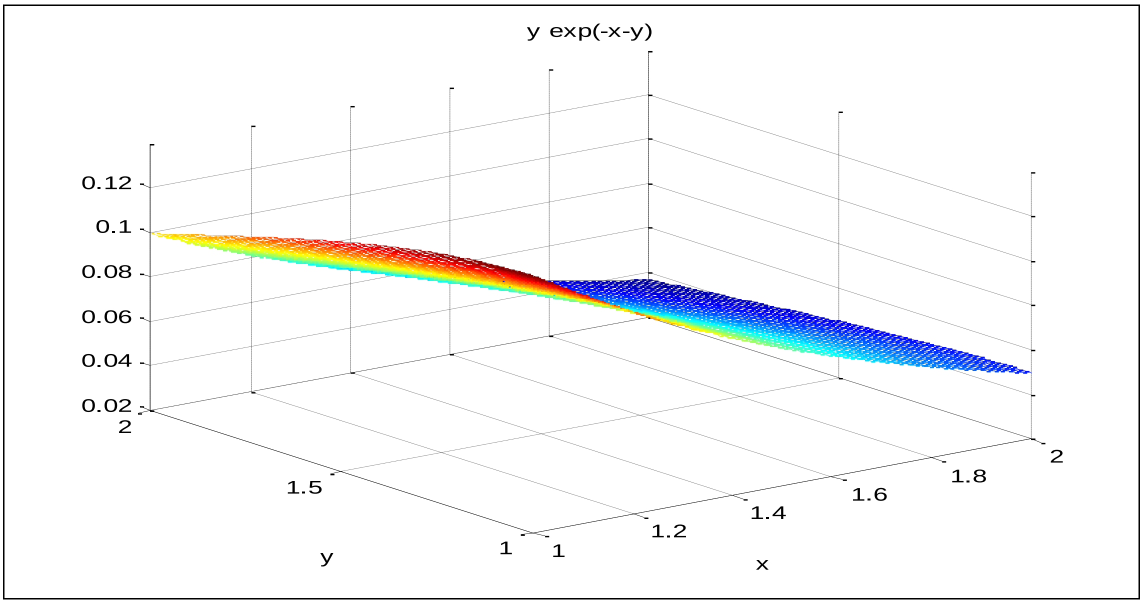
٢. $\int_2^3\int_2^3 \ln(\frac{x+y}{2})dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.91293034365166 مقربة الى اربع عشر مرتبة عشرية.

٣. $\int_0^1\int_0^1 \cos(\frac{x+y}{2})dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.58945127165042 مقربة الى اربع عشر مرتبة عشرية.

٤. $\int_1^2\int_1^2 \frac{y\ln(x)}{x^2+y^2}dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية غير معروفة

٤.النتائج:

١- المكامل هنا مستمر معرف لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (11) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (1) نلاحظ من الجدول (1) عندما $n=32$ ، $m=64$ فان قيمة التكامل اعلاه صحيحة لخمس مراتب عشرية باستخدام قاعدة T_i على كلا البعدين بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك تكون القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لخمسة عشر مرتبة عشرية صحيحة) بـ 2^{11} فترة جزئية.



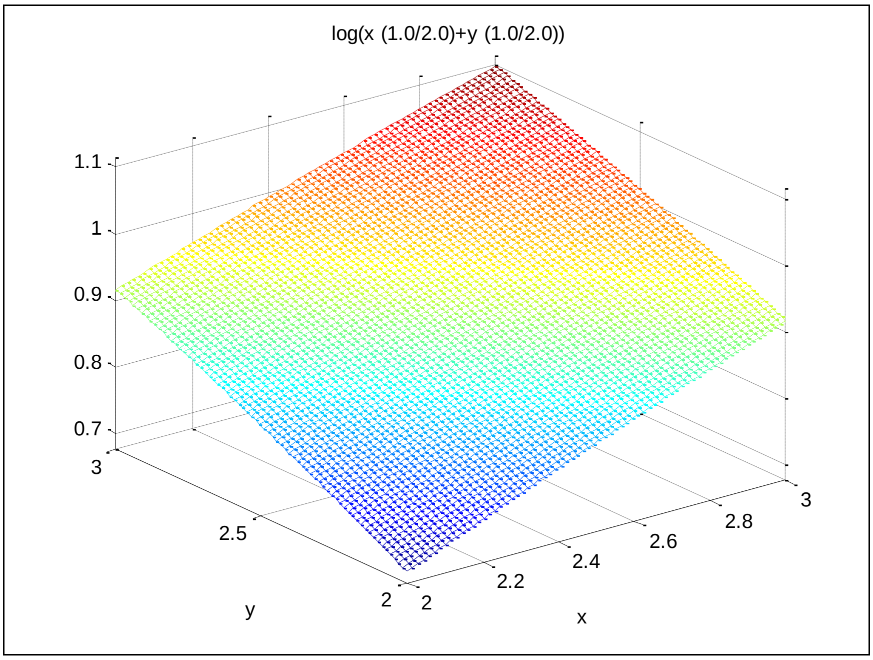
التمثيل الهندسي رقم(1) يبين شكل الدالة $I=\int_1^2\int_1^2 y\,e^{-(x+y)}dxdy$

n	m	قيم T_i	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	**2**	**0.082271864032041**					
2	**4**	**0.078106525623739**	**0.076718079487638**				
4	**8**	**0.077039967972054**	**0.076684448754825**	**0.076682206705971**			
8	**16**	**0.076771706866820**	**0.076682286498409**	**0.076682142347982**	**0.076682141326426**		
16	**32**	**0.076704539509542**	**0.076682150390449**	**0.076682141316585**	**0.076682141300214**	**0.076682141300111**	
32	**64**	**0.076687741278757**	**0.076682141868496**	**0.076682141300366**	**0.076682141300108**	**0.076682141300108**	**0.076682141300108**

$$\int_1^2\int_1^2 y\,e^{-(x+y)}dxdy=0.076682141300108$$

جدول (١)

٢- المكامل هنا مستمر معرف لكل $(x,y)\in[2,3]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (11) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (2) نلاحظ من الجدول (2) عندما $n=16$ ، $m=32$ فان قيمة التكامل اعلاه كانت صحيحة لأربع مراتب عشرية باستخدام قاعدة T_i على كلا البعدين بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك تكون القيمة صحيحة لأربع عشرة مرتبة عشرية بـ 2^9 فترة جزئية.

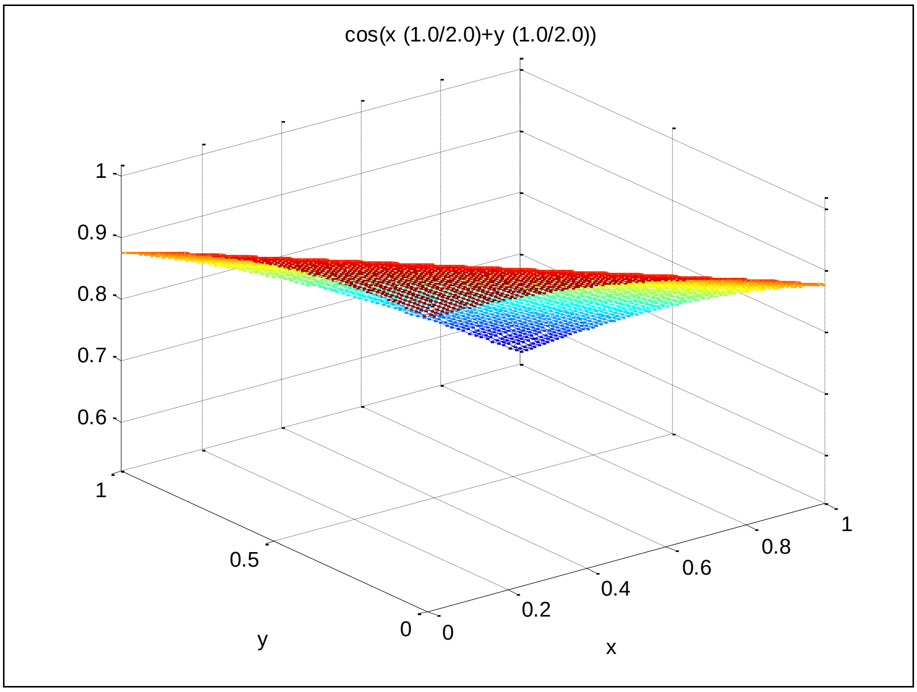


التمثيل الهندسي رقم (2) يبين شكل الدالة $I=\int_2^3\int_2^3 \ln(\frac{x+y}{2})dxdy$

n	m	قيم T_i	K=2	K=4	K=6	K=8
1	**2**	**0.908675398595748**				
2	**4**	**0.911867103952649**	**0.912931005738282**			
4	**8**	**0.912664565008660**	**0.912930385360664**	**0.912930344002156**		
8	**16**	**0.912863900949932**	**0.912930346263690**	**0.912930343657225**	**0.912930343651750**	
16	**32**	**0.912913733098727**	**0.912930343814992**	**0.912930343651745**	**0.912930343651658**	**0.912930343651658**
$\int_2^3\int_2^3 \ln(\frac{x+y}{2})dxdy = 0.91293034365166$						

جدول (2)

٣ـ المكامل هنا مستمر معرف لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (11) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (3) نلاحظ من الجدول (3) عندما $n=16$ ، $m=32$ فان قيمة التكامل اعلاه صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام قاعدة T_i على كلا البعدين بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك تكون القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لأربع عشر مرتبة عشرية صحيحة) بـ 2^9 فترة جزئية.

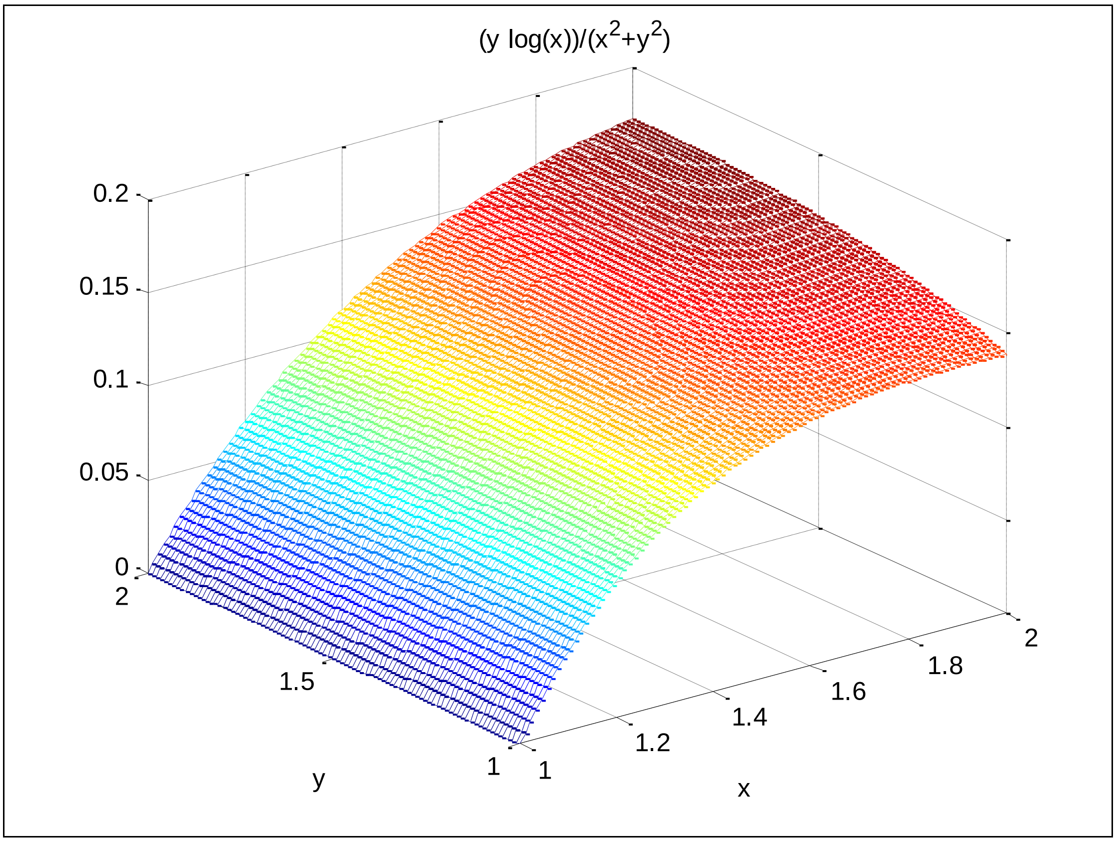


التمثيل الهندسي رقم (3) يبين شكل الدالة $I=\int_0^1\int_0^1 \cos(\frac{x+y}{2})dxdy$

n	m	قيم T_i	K=2	K=4	K=6	K=8
1	**2**	**0.83708375135223**				
2	**4**	**0.85385676058871**	**0.85944776366754**			
4	**8**	**0.85805247983055**	**0.85945105291116**	**0.85945127219407**		
8	**16**	**0.85910156344801**	**0.85945125798717**	**0.85945127165890**	**0.85945127165041**	
16	**32**	**0.85936384395945**	**0.85945127079659**	**0.85945127165056**	**0.85945127165042**	**0.85945127165042**
$\int_0^1\int_0^1 \cos(\frac{x+y}{2})dxdy=0.85945127165042$						

جدول (3)

٤- المكامل هنا مستمر معرف لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (11) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (4) نلاحظ من الجدول (4) عندما $n=64$ ، $m=128$ فان قيمة التكامل اعلاه كانت ثابتة افقياً (لأربعة عشر مرتبة عشرية) ولأربع اعمدة باستخدام قاعدة T_i مع تعجيل رومبرك اي أنها صحيحة على الاقل لأربعة عشر مرتبة عشرية هذا يعني ان التقارب هو بشكل صحيح نحو القيمة التحليلية حتى وان كانت قيمة التكامل غير معروفة لذا يمكن القول بأن قيمة التكامل هي 0.11611224321530 مقربة لأربعة عشر مرتبة عشرية.



التمثيل الهندسي (4) يبين شكل الدالة $I=\int_1^2\int_1^2 \frac{y\ln(x)}{x^2+y^2}dxdy$

n	m	T_i قيم	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
1	**2**	**0.08057835974009**						
2	**4**	**0.10672851552889**	**0.11544523412516**					
4	**8**	**0.11373352621753**	**0.11606852978041**	**0.11611008282409**				
8	**16**	**0.11551548742188**	**0.11610947448999**	**0.11611220413730**	**0.11611223780894**			
16	**32**	**0.11596292396097**	**0.11611206947401**	**0.11611224247294**	**0.11611224308144**	**0.11611224310212**		
32	**64**	**0.11607490524885**	**0.11611223234480**	**0.11611224320286**	**0.11611224321444**	**0.11611224321497**	**0.11611224321508**	
64	**128**	**0.11610290821400**	**0.11611224253571**	**0.11611224321510**	**0.11611224321530**	**0.11611224321530**	**0.11611224321530**	**0.11611224321530**
$\int_1^2\int_1^2 \frac{y\ln(x)}{x^2+y^2}dxdy$								

جدول (٤)

٥.المناقشة

يتضح من خلال جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل بقاعدة $T_i\left(h_i\right)$ على كلا البعدين عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي ضعف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي قد اعطت هذه القاعدة قيماً صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رومبرك ، إلا انه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث الدقة و سرعة الاقتراب بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية مقارنة مع القيم التحليلية وبذلك يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة .

المصادر

[1] Fox .,"Romberg integration for a class of singular integrands" ,Com put . J.10,pp. 87-93 ,1967.

[2] Hans schjar and Jacobsen , "Computer programs for One-and Two-Dimensional Romberg Integration of complex function " , The technical University of Denmark Lyngby , pp.1-12 ,1973.

[3] Mohammed A.H., Hayder A.K. and Hassen A .f. "On the Numerical Integration" ,an article accepted by scientific conference of Morocco , 2009.

[4] Mohammed A.H. , " Evaluation of Double Integrations " comput J. Vo1.7 ,No.3,pp.21-28 , 2002.

[5] phillip J . Davis and phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company ,pp.1-2,599,113,chapter 5 , 1975.

[6] Shanks J.A. , "Romberg Tables for Singular Integrands " com put J.15 ,pp.360 ,361,1972.

[7] Fox L And Linda Hayes , 1970 , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. , 12 , pp. 449-457 .

[8] الكرمي ، ندى أحمد محمد طه ، "اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى لحساب التكاملات الثنائية عددياً وصيغ الخطأ لها وتحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية" ،رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة 2012 .

[9] الطائي ، علية شاني ، "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات احادية وثنائية معتلة" ، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة 2005 .

[10] ضياء ،عذراء محمد ، "طرائق عددية لا يجاد التكاملات الاحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab ، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة ، 2009 .

[11] فرنك ايرز ،"سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل" ، دار ما كجر وهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الاساتذة المتخصصين 1988 .

[12] محمد ، علي حسن ،"ايجاد قيم تكاملات معتلة المكامل" رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة البصرة ، 1984 .

[13] ريتشارد بوردين و دوكلاس فاريز ، " التحليل العددي " ، الجزء الاول ، ترجمة الاستاذ المساعد خالد احمد السامرائي وسعد ابراهيم مهدي ، جامعة بغداد كلية التربية للبنات ، 1992 .