Numerical Method for Evaluation of Double Integrals with continuous Integrands by using Simpson's rule and Romberg acceleration when number of subintervals at the two dimensions unequal

طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المســتمرة باستخدام قاعدة سمبسون وتعجيل رومبرك عندما تكون عدد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

أ. علي حسن محمد رؤى عزيز فاضل
قسم الرياضيات / كلية التربية للبنات / جامعة الكوفة
البحث مستل

المستخلص :-

الهدف الرئيسي للبحث هو إيجاد طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل باستخدام قاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x والخارجي y) وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) مع تحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك من خلال حدود التصحيح التي نجدها عندما تكون عدد الفترات الجزئية (m) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي y ضعف عدد الفترات الجزئية (n) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x حيث ان ((m) ، (n)) اعداد صحيحة زوجية) ، بالتحديد عندما $h_1=2h_2$ وان h_1 تعني المسافة بين الاحداثيات على المحور x و h_2 تعني المسافة بين الاحداثيات على المحور y .

وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز sim^2 ويمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً .

Abstract:-

The main aim of this research is to construct method to find values of double integrals numerically its integrands continuous in its region by using Simpson's rule with two dimensions x and y and to find the correction terms (error forms) , and to improve the results we will use Romberg acceleration when the number of subintervals (m) on the dimension y equal to twice to subintervals (n) on the dimension x, ((m),(n) even integers numbers) and specifically when $h_1= 2h_2$ where h_1 is the distance between coordinates on the x-axis and h_2 the distance between coordinates on the y-axis.

We will use the symbol (sim^2) to indicate this mothed and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integration with little subintervals.

1-المقدمة :-

ان اهمية موضوع التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع اذ ان هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون وان ايجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات كثيرة منها :

1- استحالة ايجاد القيمة التحليلية للتكامل .

2- عندما تكون عملية ايجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة وزمن طويل .

3- قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية اساساً لاحتوائها على حدود تأخذ قيمتها من الجداول (مثل اللوغاريتم او معكوس الظل).

4- قد تكون المسألة هي ايجاد مساحة تحت منحن معرف بجدول قيم (أي ان الدالة معرفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هو الحال عند تحليل نتائج التجارب دافييز و رابينوتز [4].

ان عملية ايجاد قيمة التكامل الثنائي تشكل مسألة اكثر تعقيداً من مشكلة ايجاد قيمة التكاملات الاحادية كون التكامل هنا يعتمد على متغيرين وان مسالة الاستمرارية للمكامل تشكل اهمية كبيرة وكذلك في جودة النتائج فإننا سوف نتعامل مع مناطق تكامل (Region) او سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكاملات الاحادية لهذا فان ايجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه اصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن اهمية التكاملات الثنائية في ايجاد مساحة السطوح وايجاد المراكز المتوسطة وعزوم المركزية الذاتية للسطوح المستوية وايجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي فرانك آيزر [8] مما دعا كثير من الباحثين الى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ هما هانس جاروجاكوبسن [3] عام 1973، في عام 2009 قدمت ضياء [7] أربع طرائق عددية مركبة وهي $RM(RM)$ و $RS(RS)$ و $RS(RM)$ و $RM(RS)$ وتعتمد هذه الطرائق على قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الخارجي والداخلي لحساب قيم التكاملات الثنائية التي مكاملاتها دوال مستمرة وقد اعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية ، وفي عام 2011 قدمت موسى [10] ثلاث طرائق عددية مركبة وهي RSS ، RSM ، RMS واعتمدت من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المتبعة في هذه الطرائق على قاعدتي سمبسون والنقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك عندما تكون الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي ان $h_1=h_2$ وقد اعطت ايضاً نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي بحثنا هذا سوف نطبق طريقة تعجيل رومبرك [2]،[6] على القيم الناتجة من استعمال قاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x والخارجي y) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي ضعف عدد الفترات الجزئية التي يتجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي بالتحديد عندما $h_1=2h_2$.

2- حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون

Evaluation of Double Integrals with Continuous Integrands by Using Simpson's Rule.

لنفرض ان التكامل I معرف كالآتي:

$$I=\int_c^d\int_a^b f\,(x,y)\,dxdy \qquad \ldots(1)$$

فيمكن كتابته بالصيغة :

$$I=\int_c^d\int_a^b f\,(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+E_{sim^2}(h_1,h_2) \qquad \ldots(2)$$

والذي فيه الدالة $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ حيث إن $sim^2(h_1,h_2)$ تمثل قيمة تقريبية للتكامل باستخدام القاعدة sim^2 على كلا البعدين (الداخلي x والخارجي y) وان $E_{sim^2}(h_1,h_2)$ هي سلسلة حدود التصحيح (Correction terms) الممكن إضافتها إلى قيم $sim^2(h_1,h_2)$.

سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي $[a,b]$ لعدد من الفترات الجزئية (n) ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي $[c,d]$ لعدد من الفترات الجزئية (m) ، $((n)،(m))$ اعداد صحيحة زوجية) ، حيث $h_1=\frac{b-a}{n}$ ، $h_2=\frac{d-c}{m}$ ، (وسنأخذ حالة خاصة عندما $m=2n$) وبالتحديد عندما $h_1=2h_2$.

مبرهنة (1) : لتكن الدالة $f\left(x,y\right)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Bigg[\ \Big[f(x_0,y_0)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_0)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_0)+f(x_n,y_0)\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_0,y_{2j})+2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2j})+\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_n,y_{2j})\Big]$$
$$+4\Big[\sum_{j=1}^{m/2}f(x_0,y_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j-1})+4\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2i-1})+\sum_{j=1}^{m/2}f(x_n,y_{2j-1})\Big]$$
$$+\Big[f(x_0,y_m)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_m)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_m)+f(x_n,y_m)\Big]\ \Bigg]+E_{sim^2}\left(h_1,h_2\right)$$

حيث إن $E_{sim^2}\left(h_1,h_2\right)=A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_3^6+A_4h_4^6+\ldots$

حيث $A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ولا تعتمد على h_1 و h_2 .

و أن $x_i=a+ih_1$ ، $i=0,1,2,\ldots,n$ ، $y_j=c+jh_2$ ، $j=0,1,2,\ldots,m$

البرهان : التكامل I يمكن كتابته بالشكل

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=sim^2\left(h_1,h_2\right)+E_{sim^2}\left(h_1,h_2\right)$$

حيث إن الصيغة العامة للقاعدة $sim^2\left(h_1,h_2\right)$ هي

$$sim^2(h_1,h_2)=\frac{h_1h_2}{9}\Bigg[\ \Big[f(x_0,y_0)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_0)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_0)+f(x_n,y_0)\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_0,y_{2j})+2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2j})+\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_n,y_{2j})\Big]$$
$$+4\Big[\sum_{j=1}^{m/2}f(x_0,y_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j-1})+4\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2i-1})+\sum_{j=1}^{m/2}f(x_n,y_{2j-1})\Big]$$
$$+\Big[f(x_0,y_m)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_m)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_m)+f(x_n,y_m)\Big]\ \Bigg]\qquad\ldots(3)$$

حيث أن $x_i=a+ih_1$ ، $i=0,1,2,\ldots,n$ ، $y_j=c+jh_2$ ، $j=0,1,2,\ldots,m$

وحدود التصحيح تكون

$$E=-\frac{h_2(b-c)h_1^4}{540}\Big[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_0,y_0)+2\sum_{j=1}^{m/2-1}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_{2j},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_{2j-1},y_{2j-1})+\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_m,y_m)\Big]$$
$$-\frac{(d-c)h_2^4}{180}\int_a^b\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,\mu)dx\qquad\ldots(4)$$

وبما إن $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ و $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$. فان صيغة حدود التصحيح تصبح

$$E=\frac{-(d-c)(b-a)}{180}\left[h_1^4\frac{\partial^4 f(\overline{\eta},\overline{\mu})}{\partial x^4}+h_2^4\frac{\partial^4 f(\eta,\mu)}{\partial y^4}\right] \qquad \ldots(5)$$

حيث $(\overline{\eta},\overline{\mu})$ ، (η,μ) تنتمي الى منطقة التكامل [1] .

سنقوم بتوسعة حدود التصحيح لتشمل حدود اكثر بما ان صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون فوكس [2] هي

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_n^3-f_0^3)+\frac{1}{1512}h^6(f_n^5-f_0^5)-\cdots \qquad \ldots(6)$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل [5] Mean-value theorem for derivatives للصيغة **(6)** نحصل على

$$E_S(h)=\frac{-(x_n-x_0)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu_1)+\frac{(x_n-x_0)}{1512}h^6 f^{(6)}(\mu_2)-\ldots \qquad \ldots(7)$$

حيث $\mu_i\in(x_0,x_n)$, $i=1,2,\ldots$ عكار [8]

$$E_{sim^2}=-\frac{h_2(b-c)h_1^4}{540}\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_0,y_0)+2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_{2j},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_{2j-1},y_{2j-1})+\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_m,y_m)\right]$$
$$-\frac{(d-c)h_2^4}{180}\int_a^b\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,\mu_1)dx+\frac{h_2(b-a)h_1^6}{4536}\left[\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(\xi_0,y_0)+2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(\xi_{2j},y_{2j})+\right.$$
$$\left.4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(\xi_{2j-1},y_{2j-1})+\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(\xi_m,y_m)\right]+\frac{(d-c)h_2^6}{1512}\int_a^b\frac{\partial^6 f}{\partial y^6}(x,\mu_2)dx-\ldots \qquad \ldots(8)$$

وبما إن $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^6 f}{\partial x^6},\ldots$ و $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\frac{\partial^6 f}{\partial y^6},\ldots$ دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]$. وباستخدام نظرية (القِيمة المتوسطة Intermediate Value Theorem) و (نظرية القيمة المتوسطة الموزونة لتكاملات Weighted Mean Value Theorem for Integrals) في مكاملة حدود التصحيح الواردة فان صيغة حدود التصحيح (الخطأ) للتكامل الثنائي I بقاعدة سمبسون على البعدين x و y تصبح :-

$$E_{sim^2}(h_1,h_2)=(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_1^4}{180}\frac{\partial^4 f(\overline{n_1},\overline{\mu_1})}{\partial x^4}+\frac{h_1^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\overline{n_2},\overline{\mu_2})}{\partial x^6}-\cdots\right)+$$
$$(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_2^4}{180}\frac{\partial^4 f(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)}{\partial y^4}+\frac{h_2^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2)}{\partial y^6}-\cdots\right) \qquad \ldots(9)$$

حيث إن $(\overline{n_1},\overline{\mu_1}),(\overline{n_2},\overline{\mu_2}),\ldots\in[a,b]\times[c,d]$, $(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1),(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2),\ldots\in[a,b]\times[c,d]$

وبما أن الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق يمكن صياغة الخطأ بالشكل الاتي

$$E_{sim^2}=I-sim^2(h_1,h_2)=A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_1^6+A_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(10)$$

حيث $A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ولا تعتمد على h_1 و h_2 .

وبهذا ينتهي البرهان .

وعندما $h_1=2h_2$ نحصل على

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,0.5h_1)+E_{sim^2}(h_1,0.5h_1) \qquad \ldots(11)$$

بحيث ان

$$E_{sim^2}=I-sim^2(h_1,0.5h_1)=B_1h_1^4+B_2h_1^6+\cdots \qquad \ldots(12)$$

حيث $B_1, B_2, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ولا تعتمد على h_1 .

3-الأمثلة

مثال1:- $I=\int_1^2\int_1^2 ye^{-(x+y)}dxdy \approx 0.076682141300108$ المكامل هنا مستمر لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (12) ، نلاحظ من الجدول (1) عندما $m=64$ ، $n=32$ فان قيمة التكامل صحيحة لتسع مراتب عشرية باستخدام قاعدة sim^2 بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اصبحت القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية) و بـ (2^{11} فترة جزئية).

n	m	sim^2	K=4	K=6	K=8	K=10
2	4	0.076705003463530				
4	8	0.076683604349123	0.076682177741496			
8	16	0.076682233287359	0.076682141883241	0.076682141314062		
16	32	0.076682147057905	0.076682141309275	0.076682141300164	0.076682141300110	
32	64	0.076682141660105	0.076682141300252	0.076682141300109	0.076682141300108	0.076682141300108

جدول (1)

مثال2:- $I=\int_2^3\int_2^3 \ln(\frac{x+y}{2})dxdy \approx 0.91293034365166$ المكامل هنا مستمر لكل $(x,y)\in[2,3]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (12) ، نلاحظ من الجدول (2) عندما $n=16$ ، $m=32$ فان قيمة التكامل صحيحة لتسع مراتب عشرية باستخدام قاعدة sim^2 بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة تكون قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية) بـ2^9 فترة جزئية .

n	m	sim^2	K=4	K=6	K=8
2	4	0.91292664072840			
4	8	0.91293010810594	0.91293033926444		
8	16	0.91293032886293	0.91293034358006	0.91293034364856	
16	32	0.91293034272630	0.91293034365053	0.91293034365165	0.91293034365166

جدول (2)

مثال3:- $I=\int_0^1\int_0^1 \cos(\frac{x+y}{2})dxdy \approx 0.85945127165042$ المكامل هنا مستمر لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (12) ، نلاحظ من الجدول (3) عندما $n=16$ ، $m=32$ فان قيمة التكامل صحيحة لثماني مراتب عشرية باستخدام قاعدة sim^2 بينما بأستخدام تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة تكون مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية) بـ2^9 فترة جزئية .

n	m	sim^2	K=4	K=6	K=8
2	4	0.85947123053055			
4	8	0.85945251241831	0.85945126454416		
8	16	0.85945134909497	0.85945127154008	0.85945127165113	
16	32	0.85945127648909	0.85945127164870	0.85945127165043	0.85945127165042

جدول (3)

مثال4:- $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{3-xy}}dxdy \approx 0.30713455119050$ المكامل مستمر لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (12) ، نلاحظ من الجدول رقم (4) عندما $n=32$ و $m=64$ فان قيمة التكامل أعلاه صحيحة لتسع مراتب عشرية باستخدام قاعدة sim^2 بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة sim^2 اصبحت القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية) بـ 2^{11} فترة جزئية .

n	m	sim^2	K=4	K=6	K=8	K=10
2	4	0.30714210554068				
4	8	0.30713504239934	0.30713457152325			
8	16	0.30713458231097	0.30713455163842	0.30713455132278		
16	32	0.30713455314277	0.30713455119822	0.30713455119124	0.30713455119072	
32	64	0.30713455131263	0.30713455119062	0.30713455119050	0.30713455119050	0.30713455119050

جدول (4)

مثال5:- $I=\int_1^{1.5}\int_1^{1.5}\frac{(xy)^{\ln(x+y)}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ التكامل هنا من التكاملات التي ليس لها حلاً تحليلاً وكذلك المكامل مستمر لكل $(x,y)\in[1,1.5]\times[1,1.5]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (12) وهنا تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيمة تقريبية لهذا النوع من التكاملات ، نلاحظ من الجدول (5) تحديداً عندما $n=32$ و $m=64$ ان القيمة افقيا 0.213996280645868 نفسها ظهرت في الاعمدة الثلاثة الاخيرة عندما $k=6,8,10$ لذا يمكن القول بان هذه هي قيمة هذا التكامل باستخدام تعجيل رومبرك مع قاعدة sim^2 وهي صحيحة لخمس عشرة مرتبة عشرية بينما بدون استخدام التعجيل فانها صحيحة لإحدى عشرة مرتبة عشرية .

n	m	sim^2	K=4	K=6	K=8	K=10
2	4	0.213996429539688				
4	8	0.213996292303402	0.213996283154316			
8	16	0.213996281414349	0.213996280688412	0.213996280649271		
16	32	0.213996280694530	0.213996280646542	0.213996280645878	0.213996280645864	
32	64	0.213996280648920	0.213996280645879	0.213996280645868	0.213996280645868	0.213996280645868

جدول (5)

4-المناقشة

يتضح من خلال جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل بقاعدة سمبسون على كلا البعدين عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي ضعف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي قد اعطت هذه القاعدة قيماً صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رومبرك ، إلا انه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث الدقة و سرعة الاقتراب بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية مقارنة مع القيم التحليلية وبذلك يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة .

المصادر:-

[1] Burden R.L. and Faires J.D.,"Nurmerical Analysis " candea , Ninth Edition , pp 8-11, 235-238,2010.

[2] Fox L., " Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 pp. 87-93,1967.

[3]Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , 1973 .

[4]Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , ,BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[5]] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , Forth edition, 2008.

[6] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " , comput J.15 ,pp. 360 , 361 , 1972 .

[7] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ،رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009.

[8] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين .

[9] عكار ، بتول حاتم " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية "، رسالة ماجستير مقدمة إلىٰ جامعة الكوفة ،2010 .

[10] موسىٰ ، صفاء مهدي ، " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عددياً باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطىٰ وسمبسون "، رسالة ماجستير مقدمة إلىٰ جامعة الكوفة ،2011 .