Numerical Method for Evaluation of Triple Integrals with continuous Integrands

طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة

أ. علي حسن محمد سرمد رحمان حسين رؤى عزيز فاضل
تحليل عددي / قسم الرياضيات / كلية التربية للبنات / جامعة الكوفة
البحث مستل

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية البعد باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الابعاد (x, y, z) والتي مكاملاتها دوال مستمرة في منطقة التكامل واشتقاق صيغة الخطأ (حدود التصحيح) عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على الابعاد (الداخلي $x(n_1)$ و الاوسط $y(n_2)$ والخارجي $z(n_3)$) غير متساوية وسوف نطبق حالة خاصة على تكاملات مختارة عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على البعدين (الداخلي x و الاوسط y) مساوية لضعف اعداد الفترات الجزئية على البعد الخارجي z اي ان $2n_3 = n_2 = n_1$ بمعنى ان $(h_3 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{2}h_2)$ وسوف نقوم بتحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك [1] و [2] وقد اظهرت نتائج التكاملات المختارة دقة عالية في النتائج باستخدام عدد قليل من الفترات الجزئية وبالتالي يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب مثل هذه التكاملات . سوف نرمز للقاعدة بالرمز RT_i ، اذ يشير الحرف T_i الى قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاث والحرف R الى تعجيل رومبرك.

Abstract

The main aim of this research is to derive numerical method to calculate Triple dimension integrals by applying Trapezoidal rule on dimensions (x, y, z) which it's integrands are continuous functions in the region of integral and to find the form of error (correction terms) when number of subintervals on dimensions $x\ (n_1), y\ (n_2), z\ (n_3)$ are unequal and we will apply special case on well choosen integrals when number of subintervals on dimensions x, y equals to twice subintervals to z, where , $n_1 = n_2 = 2n_3$, means that $h_3 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{2}h_2$. We will improve the by using Romberg acceleration [1] and [2] ,this rule Shawn high accuracy in results of well choosen integrals by using little of subintervals , then it can be depend on this method in calculating like these integrals. We will symbolize to the rule by RT_i , T_i indicates to Trapezoidal rule on all dimensions , R indicates to Romberg acceleration .

1. المقدمة :-

ان للتكاملات الثلاثية أهمية في ايجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$ ، وكذلك ايجاد الحجم الواقع بين القطع المكافئ $z = 2x^2 + y^2$ والاسطوانة $z = 4 - y^2$ ، وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$ ، وكما لها اهمية بارزة في ايجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيعاً وصفيحة رقيقة من المعدن. فرانك آيرز[5]. مما شجع عدد من الباحثين للعمل في مجال التكاملات الثلاثية وهم ضياء[3] عام 2009 ، عكار [4] عام 2010 ، محمد وآخرين [7] عام 2011 ، محمد وآخرين [8] عام 2013 ، هلال [10] عام 2013 ، شبر [9]عام 2014 ، كاظم [11] عام 2013 .

اما في بحثنا هذا قدمنا مبرهنة مع البرهان لاشتقاق طريقة عددية لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة في منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاثة (الداخلي والاوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط و الخارجي غير

متساوية. وسنأخذ حالة خاصة $\left(h_3 = \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{2} h_2 \right)$. سنرمز لهذه الطريقة بالرمز $RT_i\left(h_i\right)$ اذ يشير الرمز T_i الى قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاث والحرف R الى تعجيل رومبرك.

2.اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها

سنقدم مبرهنة مع البرهان نستعرض فيها اشتقاق طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاث عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على الابعاد الثلاثة n_1 ، n_2 ، n_3 غير متساوية وسنطبق حالة خاصة عندما $n_1 = n_2 = 2n_3$ على تكاملات خاصة (n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة $[a,b]$ و n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة $[c,d]$ و n_3 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة $[e,g]$) اي ان $(h_1 = h_2 = 2h_3)$حيث $\left(h_1 = \frac{(b-a)}{n_1} \right)$ و $\left(h_2 = \frac{(d-c)}{n_2} \right)$ و $\left(h_3 = \frac{(g-e)}{n_3} \right)$. نرمز لهذه الطريقة بالرمز $RT_i\left(h_i\right)$ حيث R طريقة تعجيل رومبرك و T_i قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاثة . حيث $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_1} = b$ ، $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_2} = d$ ، $e = z_0 < z_1 < \ldots < z_{n_3} = g$.

مبرهنة:

لتكن الدالة $f\left(x,y,z\right)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فأن القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I = \int_{z_0}^{z_{n_3}} \int_{y_0}^{y_{n_2}} \int_{x_0}^{x_{n_1}} f\left(x,y,z\right) dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الاتية :-

$$
\begin{aligned}
T_i\left(h_i\right) = \frac{h_1 h_2 h_3}{8} \Bigg(& f\left(x_0,y_0,z_0\right) + f\left(x_0,y_0,z_{n_3}\right) + f\left(x_0,y_{n_2},z_0\right) + f\left(x_0,y_{n_2},z_{n_3}\right) + f\left(x_{n_1},y_0,z_0\right) + \\
& f\left(x_{n_1},y_0,z_{n_3}\right) + f\left(x_{n_1},y_{n_2},z_0\right) + f\left(x_{n_1},y_{n_2},z_{n_3}\right) + 2\sum_{i=1}^{n_1-1}\Big[f\left(x_i,y_0,z_0\right) + f\left(x_i,y_0,z_{n_3}\right) + f\left(x_i,y_{n_2},z_0\right) \\
& + f\left(x_i,y_{n_2},z_{n_3}\right)\Big] + 2\sum_{j=1}^{n_2-1}\Big[f\left(x_0,y_j,z_0\right) + f\left(x_0,y_0,z_{n_3}\right) + f\left(x_{n_1},y_j,z_0\right) + f\left(x_{n_1},y_j,z_{n_3}\right)\Big] \\
& + 2\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big[f\left(x_0,y_0,z_s\right) + f\left(x_0,y_{n_2},z_s\right) + f\left(x_{n_1},y_0,z_s\right) + f\left(x_{n_1},y_{n_2},z_s\right)\Big] + 4\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_1-1}\Big[f\left(x_i,y_j,z_0\right) + \\
& + f\left(x_i,y_j,z_s\right)\Big] + 4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big[f\left(x_i,y_0,z_s\right) + f\left(x_i,y_{n_2},z_s\right)\Big] + 4\sum_{s=1}^{n_3-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\Big[f\left(x_0,y_j,z_s\right) + f\left(x_{n_1},y_{n_2},z_s\right)\Big] \\
& + 8\sum_{s=1}^{n_3-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_1-1}\Big[f\left(x_i,y_0,z_s\right)\Big] \Bigg)
\end{aligned}
$$

حيث $x_i = a + ih_1$ ، $i = 1,2,..,n_1 - 1$ ، $y_j = c + jh_2$ ، $j = 1,2,..,n_2 - 1$ ، $z_s = e + sh_3$ ، $s = 1,2,..,n_3 - 1$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي

$$I - T_i(h_i) = A_1 h_1^2 + A_2 h_1^4 + \ldots + A_1 h_2^2 + A_2 h_2^4 + \ldots + A_1 h_3^2 + A_2 h_3^4 + \ldots$$

وسوف نطبق حالة خاصة $\left(h_3 = \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{2} h_2 \right)$ فتكون صيغة الخطأ بشكل عام هي

$$I - T_i(h_i) = B_1 h_1^2 + B_2 h_1^4 + \ldots$$

البرهان:

يمكن كتابة التكامل I بالصيغة الاتية

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f\left(x,y,z\right)dxdydz=T_i\left(h_i\right)+E_{T_i}\left(h_i\right) \qquad ...(1)$$

حيث ان $T_i\left(h_i\right)$ تمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الابعاد الثلاث x ، y ، z. وان $E_{T_i}\left(h_i\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح (correction terms) الممكن اضافتها الى قيم $T_i\left(h_i\right)$.

سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي x لعدد من الفترات الجزئية $\left(n_1\right)$ ونقسم فترة التكامل على البعد الاوسط y لعدد من الفترات الجزئية $\left(n_2\right)$ ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي z لعدد من الفترات الجزئية $\left(n_3\right)$ حيث $\left(h_1=\frac{(b-a)}{n_1}\right.$ و $h_2=\frac{(d-c)}{n_2}$ و $\left.h_3=\frac{(g-e)}{n_3}\right)$

معلوم لدينا ان صيغة الخطأ للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف هي

$$E\left(h\right)=\frac{-1}{12}h^2\left(f_n^{'}-f_0^{'}\right)+\frac{1}{720}h^4\left(f_n^{(3)}-f_0^{(3)}\right)-... \qquad ...(2)$$

فوكس[1]

وباستخدام نظرية القيمة الوسطى في التفاضل (Mean-vale theorem for derivatives) [6] للصيغة (2) نحصل على

$$E\left(h\right)=\frac{-\left(x_n-x_0\right)}{12}h^2f^{(2)}\left(\vartheta_1\right)+\frac{\left(x_n-x_0\right)}{720}h^4f^{(4)}\left(\vartheta_2\right)-... \qquad ...(3)$$

حيث $\vartheta_i\in\left(x_0,x_n\right)$, $i=1,2,...$

بحساب التكامل الاحادي $\int_a^b f\left(x,y,z\right)dx$ عددياً باستعمال قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي x واعتبار y ، z ثابتين فينتج

$$I=\int_a^b f\left(x,y,z\right)dx=\frac{h_1}{2}\left[f\left(a,y,z\right)+f\left(b,y,z\right)+\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(f\left(x_i,y,z\right)\right)\right]-\frac{(b-a)}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f\left(\vartheta_1,y,z\right)}{\partial x^2}$$
$$+\frac{(b-a)}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f\left(\vartheta_2,y,z\right)}{\partial x^4}... \qquad ...(4)$$

حيث $\vartheta_1,\vartheta_2,..\in(a,b),i=1,2,...,n_1-1,x_i=a+ih_i$ وبمكاملة الصيغة (4) بالنسبة الى y على الفترة $[c,d]$ عددياً باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كل حد من حدودها نحصل على الاتي

$$I_1=\int_c^d f\left(a,y,z\right)dy=\frac{h_2}{2}\left[f\left(a,c,z\right)+f\left(a,d,z\right)+2\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f\left(a,y_j,z\right)\right)\right]+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(a,\lambda_1,z\right)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(a,\lambda_2,z\right)}{\partial y^4}-...\right]$$

$$I_2=\int_c^d f\left(b,y,z\right)dy=\frac{h_2}{2}\left[f\left(b,c,z\right)+f\left(b,d,z\right)+2\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f\left(b,y_j,z\right)\right)\right]+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(b,\overline{\lambda}_1,z\right)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(b,\overline{\lambda}_2,z\right)}{\partial y^4}-...\right]$$

$$I_3=2\sum_{i=1}^{n_1-1}\int_c^d f\left(x_i,y,z\right)dy=\frac{h_2}{2}\left(2\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[f\left(x_i,c,z\right)+f\left(x_i,d,z\right)+2\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f\left(x_i,y_j,z\right)\right)\right]\right)+$$
$$h_1\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i1},z\right)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i2},z\right)}{\partial y^4}-...\right]$$

بتعويض كل من I_3 ، I_2 ، I_1 في الصيغة (4) نحصل على

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\left[f\left(a,c,z\right)+f\left(a,d,z\right)+f\left(b,c,z\right)+f(b,d,z)+2\sum_{j-1}^{n_2-1}\left(f(a,y_j,z)+f(b,y_j,z)\right)\right.$$
$$+2\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(f(x_i,c,z)+f(x_i,d,z)\right)+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f(x_i,y_j,z)\right)\Bigg]+\int_c^d\left[-\frac{(b-a)}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f\left(\vartheta_1,y,z\right)}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.\frac{(b-a)}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f\left(\vartheta_2,y,z\right)}{\partial x^4}\right]dy+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(a,\lambda_1,z\right)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(a,\lambda_2,z\right)}{\partial y^4}-...\right]+$$
$$\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(b,\bar{\lambda}_1,z\right)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(b,\bar{\lambda}_2,z\right)}{\partial y^4}-...\right]+h_1\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i1},z\right)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i2},z\right)}{\partial y^4}-...\right] \qquad ...(5)$$

حيث $\lambda_i,\bar{\lambda}_i,\bar{\bar{\lambda}}_{il},...\in(c,d)$ ، $i=1,2,...,n_1-1$ ، $l=1,2,...$

وبمكاملة الصيغة (5) بالنسبة الى z على الفترة $[e,g]$ باستعمال قاعدة شبه المنحرف على كل حد من حدودها نحصل على الاتي

$$I_1=\frac{h_1h_2}{4}\left[\int_e^g f\left(a,c,z\right)dz\right]=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left[f\left(a,c,e\right)+f\left(a,c,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(a,c,z_s\right)\right)\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left[-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 f\left(a,c,\zeta_1\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,c,\zeta_2\right)}{\partial z^4}-...\right]$$

$$I_2=\frac{h_1h_2}{4}\left[\int_e^g f\left(a,d,z\right)dz\right]=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left[f\left(a,d,e\right)+f\left(a,d,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(a,d,z_s\right)\right)\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left[-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 f\left(a,c,\bar{\zeta}_1\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,d,\bar{\zeta}_2\right)}{\partial z^4}-...\right]$$

$$I_3=\frac{h_1h_2}{4}\left[\int_e^g f\left(b,c,z\right)dz\right]=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left[f\left(b,c,e\right)+f\left(b,c,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(b,c,z_s\right)\right)\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left[-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 f\left(a,c,\bar{\bar{\zeta}}_1\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,d,\bar{\bar{\zeta}}_2\right)}{\partial z^4}-...\right]$$

$$I_4=\frac{h_1h_2}{4}\left[\int_e^g f\left(b,d,z\right)dz\right]=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left[f\left(b,d,e\right)+f\left(b,d,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(b,d,z_s\right)\right)\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left[-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\right.$$

$$\frac{\partial^2 f\left(b,d,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_1\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(b,d,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_2\right)}{\partial z^4}-\ldots\Bigg]$$

$$I_5=\frac{h_1h_2}{4}\left(\int_e^g\left[2\sum_{i=1}^{n_1-1}f\left(x_i,c,z\right)\right]dz\right)=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left(2\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[f\left(x_i,c,e\right)+f\left(x_i,c,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(x_i,c,z_s\right)\right)\right]\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,c,\Im_{i1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,c,\Im_{i2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

$$I_6=\frac{h_1h_2}{4}\left(\int_e^g\left[2\sum_{i=1}^{n_1-1}f\left(x_i,d,z\right)\right]dz\right)=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left(\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[f\left(x_i,d,e\right)+f\left(x_i,d,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(x_i,d,z_s\right)\right)\right]\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,d,\hat{\Im}_{i1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,d,\hat{\Im}_{i2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

$$I_7=\frac{h_1h_2}{4}\left(\int_e^g\left[2\sum_{j=1}^{n_2-1}f\left(a,y_j,z\right)\right]dz\right)=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left(\sum_{j=1}^{n_2-1}\left[f\left(a,y_j,e\right)+f\left(a,y_j,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(a,y_j,z_s\right)\right)\right]\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

$$I_8=\frac{h_1h_2}{4}\left(\int_e^g\left[2\sum_{j=1}^{n_2-1}f\left(b,y_j,z\right)\right]dz\right)=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left(\sum_{j=1}^{n_2-1}\left[f\left(b,y_j,e\right)+f\left(b,y_j,g\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(b,y_j,z_s\right)\right)\right]\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{j1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{j2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

$$I_9=\frac{h_1h_2}{4}\left(\int_e^g\left[2\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}f\left(x_i,y_j,z\right)\right]dz\right)=\frac{h_1h_2h_3}{8}\left(4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left[f\left(x_i,y_j,e\right)+f\left(x_i,y_j,g\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(x_i,y_j,z_s\right)\right)\right]\right)+h_1h_2\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

بالتعويض عن I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 ، I_6 ، I_7 ، I_8 ، I_9 في الصيغة (5) نحصل على

$$\int_e^g\int_c^d\int_a^b f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h_1h_2h_3}{8}\Bigg[f\left(a,c,e\right)+f\left(a,c,g\right)+f\left(a,d,e\right)+f\left(a,d,g\right)+f\left(b,c,e\right)+f\left(b,c,g\right)$$

$$+f\left(b,d,e\right)+f\left(b,d,g\right)+2\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(f\left(x_i,c,e\right)+f\left(x_i,c,e\right)+f\left(x_i,d,e\right)+f\left(x_i,d,g\right)\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f\left(a,y_j,e\right)+f\left(a,y_j,g\right)+f\left(b,y_j,e\right)+f\left(b,y_j,g\right)\right)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(a,c,z_s\right)\right.$$

$$\left.+f\left(a,d,z_s\right)+f\left(b,c,z_s\right)+f\left(b,d,z_s\right)\right)+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(f\left(x_i,y_j,e\right)+f\left(x_i,y_j,g\right)\right)$$

$$+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(x_i,c,z_s\right)+f\left(x_i,d,z_s\right)\right)+4\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(a,y_j,z_s\right)+f\left(b,y_j,z_s\right)\right)+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\left(f\left(x_i,y_j,z_s\right)\right)\Bigg]$$

$$+\int_e^g\int_c^d\left[-\frac{(b-a)}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f\left(\vartheta_1,y,z\right)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f\left(\vartheta_2,y,z\right)}{\partial x^4}-\ldots\right]dydz\ ++\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(a,\lambda_1,z\right)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(a,\lambda_2,z\right)}{\partial y^4}-\ldots\right]+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(b,\bar{\lambda}_1,z\right)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(b,\bar{\lambda}_2,z\right)}{\partial y^4}-\ldots\right]$$

$$+h_1\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i1},z\right)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i2},z\right)}{\partial y^4}-\ldots\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,c,\zeta_1\right)}{\partial z^2}-\right.$$

$$\left.\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,c,\bar{\zeta}_1\right)}{\partial z^2}-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,c,\bar{\bar{\zeta}}_1\right)}{\partial z^2}-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,c,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_1\right)}{\partial z^2}+\ldots\right)+\frac{h_1h_2}{4}\left(-\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,c,\zeta_2\right)}{\partial z^4}\right.$$

$$\left.-\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,c,\bar{\zeta}_2\right)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,c,\bar{\bar{\zeta}}_2\right)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,c,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_2\right)}{\partial z^4}+\ldots\right)+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(\left[\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial^4 f\left(x_i,c,\Im_{i1}\right)}{\partial z^2}+\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(x_i,c,\hat{\Im}_{i1}\right)}{\partial z^2}+\ldots\right]+\left[\frac{-(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,c,\Im_{i2}\right)}{\partial z^4}+\frac{-(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,c,\hat{\Im}_{i2}\right)}{\partial z^4}+\ldots\right]\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(\left[\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j1}\right)}{\partial z^2}+\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{j1}\right)}{\partial z^2}-\ldots\right]+\right.$$

$$\left.\left[\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j2}\right)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{j2}\right)}{\partial z^4}+\ldots\right]\right)+h_1h_2\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)\qquad\ldots(6)$$

حيث $\zeta_l,\bar{\zeta}_l,\bar{\bar{\zeta}}_l,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_l,\Im_{il},\hat{\Im}_{il},\hat{\hat{\Im}}_{jl},\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{jl},\mu_{ijl}\in(e,g)$, $j=1,2,\ldots,n_2-1$, $i=1,2,\ldots,n_1-1$, $l=1,2,\ldots$

باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل للصيغة (6) نحصل على

$$\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{h_1h_2h_3}{8}\Big[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)+f(b,c,g)$$

$$+f(b,d,e)+f(b,d,g)+2\sum_{i=1}^{n_1-1}\Big(f(x_i,c,e)+f(x_i,c,e)+f(x_i,d,e)+f(x_i,d,g)\Big)+2\sum_{j=1}^{n_2-1}\Big(f(a,y_j,e)+$$

$$f(a,y_j,g)+f(b,y_j,e)+f(b,y_j,g)\Big)+2\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big(f(a,c,z_s)+f(a,d,z_s)++f(b,c,z_s)++f(b,d,z_s)\Big)$$

$$+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\Big(f(x_i,y_j,e)+f(x_i,y_j,g)\Big)+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big(f(x_i,c,z_s)++f(x_i,d,z_s)\Big)+$$

$$4\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big(f(a,y_j,z_s)++f(b,y_j,z_s)\Big)+4\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\sum_{s=1}^{n_3-1}\Big(f(x_i,y_j,z_s)\Big)\Big]+(b-a)(d-c)(g-e)$$

$$\left[-\frac{1}{12}h_1^2\frac{\partial^2 f(\vartheta_1,\text{ƛ}_1,\gamma_1)}{\partial x^2}+\frac{1}{720}h_1^4\frac{\partial^4 f(\vartheta_2,\text{ƛ}_2,\gamma_2)}{\partial x^4}+\ldots\right]+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1,z)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_2,z)}{\partial y^4}-\ldots\right]+\frac{h_1}{2}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(b,\bar{\lambda}_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(b,\bar{\lambda}_2,z)}{\partial y^4}-\ldots\right]+$$

$$h_1\sum_{i=1}^{n_1-1}\left[-\frac{(d-c)}{12}h_2^2\frac{\partial^2 f(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h_2^4\frac{\partial^4 f(x_i,\bar{\bar{\lambda}}_{i2},z)}{\partial y^4}-\ldots\right]+\frac{h_1h_2}{4}\left(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,c,\zeta_1)}{\partial z^2}-\right.$$

$$\left.\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,c,\bar{\zeta}_1)}{\partial z^2}-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,c,\bar{\bar{\zeta}}_1)}{\partial z^2}-\frac{(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,c,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_1)}{\partial z^2}+\ldots\right)+\frac{h_1h_2}{4}$$

$$\left(-\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(a,c,\zeta_2)}{\partial z^4}-\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(a,c,\bar{\zeta}_2)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(a,c,\bar{\bar{\zeta}}_2)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(a,c,\bar{\bar{\bar{\zeta}}}_2)}{\partial z^4}+\ldots\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{n_1-1}\left(\left[\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^4 f(x_i,c,\Im_{i1})}{\partial z^2}+\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(x_i,c,\hat{\Im}_{i1})}{\partial z^2}+\ldots\right]+\left[\frac{-(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(x_i,c,\Im_{i2})}{\partial z^4}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f(x_i,c,\hat{\Im}_{i2})}{\partial z^4}+\ldots\right]\right)+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(\left[\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j1})}{\partial z^2}+\frac{-(g-e)}{12}h_3^2\frac{\partial^2 f(a,y_j,\hat{\hat{\hat{\Im}}}_{j1})}{\partial z^2}+\ldots\right]\right.$$

$$+\left[\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j2}\right)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(a,y_j,\hat{\hat{\Im}}_{j2}\right)}{\partial z^4}+\ldots\right]\Bigg)+h_1h_2\sum_{i=1}^{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2-1}\Bigg(-\frac{(g-e)}{12}h_3^2$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij1}\right)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h_3^4\frac{\partial^4 f\left(x_i,y_j,\mu_{ij2}\right)}{\partial z^4}-\ldots\Bigg)$$

حيث $l=1,2,\ldots,\lambda_l\in(c,d)$ ، $l=1,2,\ldots,\ \gamma_l\in(e,g)$

وبما ان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\ldots$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\ldots$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\frac{\partial^4 f}{\partial z^4},\ldots$ دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$.

فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثلاثي I باستخدام قاعدة شبه المنحرف على الابعاد x , y و z تكون كالاتي

$$E_{T_i}(h_i)=(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f\left(\bar{\eta}_1,\bar{\Gamma}_1,\bar{\Re}_1\right)}{\partial x^2}+\frac{h_1^4}{720}\frac{\partial^4 f\left(\bar{\eta}_2,\bar{\Gamma}_2,\bar{\Re}_2\right)}{\partial x^4}-\ldots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)$$

$$\left(\frac{-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f\left(\bar{\bar{\eta}}_1,\bar{\bar{\Gamma}}_1,\bar{\bar{\Re}}_1\right)}{\partial y^2}+\frac{h_2^4}{720}\frac{\partial^4 f\left(\bar{\bar{\eta}}_2,\bar{\bar{\Gamma}}_2,\bar{\bar{\Re}}_2\right)}{\partial y^4}-\ldots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h_3^2}{12}\frac{\partial^2 f\left(\hat{\eta}_1,\hat{\Gamma}_1,\hat{\Re}_1\right)}{\partial z^2}+\frac{h_3^4}{720}\frac{\partial^4 f\left(\hat{\eta}_2,\hat{\Gamma}_2,\hat{\Re}_2\right)}{\partial z^4}-\ldots\right)$$

$$E_{T_i}(h_i)=(g-e)(d-c)(b-a)\frac{-1}{12}\left(\frac{h_1^2\partial^2 f\left(\bar{\eta}_1,\bar{\Gamma}_1,\bar{\Re}_1\right)}{\partial x^2}+\frac{h_2^2\partial^2 f\left(\bar{\bar{\eta}}_1,\bar{\bar{\Gamma}}_1,\bar{\bar{\Re}}_1\right)}{\partial y^2}+\frac{h_3^2\partial^2 f\left(\hat{\eta}_1,\hat{\Gamma}_1,\hat{\Re}_1\right)}{\partial z^2}\right)+$$

$$(g-e)(d-c)(b-a)\frac{1}{720}\left(\frac{h_1^4\partial^4 f\left(\bar{\eta}_2,\bar{\Gamma}_2,\bar{\Re}_2\right)}{\partial x^4}+\frac{h_2^4\partial^4 f\left(\bar{\bar{\eta}}_2,\bar{\bar{\Gamma}}_2,\bar{\bar{\Re}}_2\right)}{\partial y^4}+\frac{h_3^4\partial^4 f\left(\hat{\eta}_2,\hat{\Gamma}_2,\hat{\Re}_2\right)}{\partial z^4}\right)+\ldots \qquad \ldots(7)$$

$\left(\bar{\eta}_1,\bar{\Gamma}_1,\bar{\Re}_1\right),\left(\bar{\bar{\eta}}_1,\bar{\bar{\Gamma}}_1,\bar{\bar{\Re}}_1\right),\left(\hat{\eta}_1,\hat{\Gamma}_1,\hat{\Re}_1\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$, $\left(\bar{\eta}_2,\bar{\Gamma}_2,\bar{\Re}_1\right),\left(\bar{\bar{\eta}}_2,\bar{\bar{\Gamma}}_2,\bar{\bar{\Re}}_2\right),\left(\hat{\eta}_2,\hat{\Gamma}_2,\hat{\Re}_2\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g],\ldots$

بما ان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ بالصيغة الاتية

$$I-T_i(h_i)=A_1h_1^2+A_2h_1^4+\ldots A_1h_2^2+A_2h_2^4+\ldots A_1h_3^2+A_2h_3^4+\ldots \qquad \ldots(8)$$

حيث $A_1,A_2,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة في منطقة التكامل وبهذا تم البرهان.

وفي حالة خاصة عندما $h_3=\frac{1}{2}h_1=\frac{1}{2}h_2$ تصبح صيغة الخطأ بالاتي :

$$I-T_i(h_i)=B_1h_1^2+B_2h_1^4+\ldots \qquad \ldots(9)$$

حيث ان $B_l\ (l=1,2,\ldots)$ ثوابت.

3.الامثلة:

1- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz \approx 1.4978022885754$

المكامل هنا مستمر لكل $(x,y,z)\in[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل اعلاه تكون مشابهه للصيغة(9)، نستنتج من الجدول (1)ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة T_i تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية عندما $n_1=n_2=16$ ، $n_3=32$ وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة RT_iحصلنا على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية وبـ (2^{13} فترة جزئية).

2- $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz \approx 0.005256743455022$

المكامل هنا مستمر لكل $(x,y,z)\in[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل اعلاه تكون مشابهه للصيغة(9)، نستنتج من الجدول (2)ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة T_i تكون صحيحة لستة مراتب عشرية عندما $n_1=n_2=32$ ، $n_3=64$ وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة RT_i حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية مقربة لخمسة عشرة مرتبة عشرية وبـ (2^{16} فترة جزئية).

3- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz \approx 2.11801303423891$

المكامل هنا مستمر لكل $(x,y,z)\in[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل اعلاه تكون مشابهه للصيغة(9)، نستنتج من الجدول (3) ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة T_i تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما $n_1=n_2=16$ ، $n_3=32$ وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة RT_i حصلنا على قيمة صحيحة لثلاثة عشر مرتبة عشرية وبـ (2^{13} فترة جزئية).

4- $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{(xyz)^2}\,dxdydz$

ان التكامل هنا غير معروف القيمة التحليلية يتضح من الجدول (4) ان القيم التقريبية للتكامل ثابتة (ولثلاث اعمدة) افقياً (لثلاث عشر مرتبة عشرية) وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة RT_i عندما $n_1=n_2=64$, $n_3=128$ وبـ (2^{19} فترة جزئية) . ومن هذا نستنتج ان القيمة العددية مقربة لثلاث عشر مرتبة عشرية هي 1.0415870590102.

$n_1 = n_2$	n_3	قيم T_i	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$
1	2	1.4880562679457				
2	4	1.4953889925699	1.4978332341114			
4	8	1.4972004332263	1.4978042467784	1.4978023142896		
8	16	1.476519168261	1.4978024113594	1.4978022889981	1.4978022885967	
16	32	1.4977647013983	1.4978022962557	1.4978022885821	1.4978022885755	1.4978022885754
$I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$						1.4978022885754

جدول(1)

$n_1 = n_2$	n_3	قيم T_i	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$
1	2	0.004041363813562					
2	4	0.004972445600126	0.005282806195648				
4	8	0.005186929904786	0.005258424673006	0.005256799238163			
8	16	0.005239369510389	0.005256849378923	0.005256744359318	0.005256743488225		
16	32	0.005252404944074	0.005256750088636	0.005256743469284	0.005256743455156	0.005256743455022	
32	64	0.005255659138393	0.005256743869832	0.005256743455245	0.005256743455022	0.005256743455022	0.005256743455022
$I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz$							0.005256743455022

جدول (2)

$n_1 = n_2$	n_3	قيم T_i	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$
1	2	2.11294368773046				
2	4	2.11675320484383	2.11801304388162			
4	8	2.11769855066612	2.11801366594021	2.11801304074412		
8	16	2.11739444303132	2.11801307381972	2.11801303434502	2.11801303424345	
16	32	2.11799338829359	2.11801303671435	2.11801303424066	2.11801303423900	2.11801303423898
$I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz$						2.11801303423891

جدول(3)

$n_1 = n_2$	n_3	قيم T_i	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$	$k=12$
1	2	1.1428957913647						
2	4	1.0594760654153	1.0316694900988					
4	8	1.0455834698573	1.0409526046714	1.0415714789762				
8	16	1.0425565232383	1.0415475410320	1.0415872034560	1.0415874530509			
16	32	1.0418275770049	1.0415845949271	1.0415870651867	1.0415870629920	1.0415870614624		
32	64	1.0416470730878	1.0415869051154	1.0415870591279	1.0415870590318	1.0415870590162	1.0415870590138	
64	128	1.0416020553171	1.0415870493935	1.0415870590121	1.0415870590103	1.0415870590102	1.0415870590102	1.0415870590102
$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{(xyz)^2}\,dxdydz$								

جدول(4)

4. المناقشة:

نستنتج من خلال الجداول انه عند حساب التكاملات الثلاثية بقاعدة T_i على الابعاد الثلاثة x ، y و z عندما $n_1 = n_2 = 2n_3$. ان هذه القاعدة (قاعدة T_i) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيمة التحليلية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال طريقة تعجيل رومبرك عليها .
بينت الجداول انه من خلال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً الى قيم التكاملات التحليلية عليه يمكن الاعتماد على الطريقة T_i في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة .

المصادر

[1] Fox .,"Romberg integration for a class of singular integrands" ,Com put . J.10,pp. 87-93,1967 .

[2] Shanks J.A. , "Romberg Tables for Singular Integrands " com put J.15 ,pp.360 ,361,1972.

[3] ضياء ،عذراء محمد ، "طرائق عددية لا يجاد التكاملات الاحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab ، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة ، 2009 .

[4] عكار ، بتول حاتم "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات احادية وثنائية وثلاثية" ، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة ، 2010 .

[5] فرنك ايرز ،"سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل" ، دار ما كجر وهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الاساتذة المتخصصين 1988 .

[6] ريتشارد بوردين و دوكلاس فاريز ، " التحليل العددي " ، الجزء الاول ، ترجمة الاستاذ المساعد خالد احمد السامرائي وسعد ابراهيم مهدي ، جامعة بغداد كلية التربية للبنات ، 1992 .

[7] محمد ، على حسن ،صفاء مهدي ، جنان رحيم ،"حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً"، بحث مقدم الى جامعة كربلاء ، 2011 .

[8] محمد ، على حسن ، صفاء مهدي ، وفاء محمد ، "اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها" ، بحث مقدم الى جامعة كربلاء ، 2013 .

[9] شبر ، عدنان وسيل كاظم ، "اشتقاق طرائق عددية مركبة من صيغ نيوتن – كوتس لحساب التكاملات الثلاثية المحددة وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية" ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2014 .

[10] هلال ، رنا حسن ،"اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي النقطة الوسطى وشبه المنحرف وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عددياً وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية"، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2013.

[11] كاظم ، رحاب رحيم ،"اشتقاق قواعد عددية مركبة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون وصيغ اخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية" ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2013 .