Numerical method for evaluation double integrals with continuous integrands by using mid point rule when the number of subintervals at the two dimensions are not equal

طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى عندما تكون عدد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

أ.علي حسن محمد/ زينب فليح حسن
جامعة الكوفة - كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات
البحث مستل

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق طريقة لحساب التكاملات الثنائية البعد عدديا عندما تكون مكاملاتها مستمرة في منطقة التكامل بأستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين (الداخلي x و الخارجي y) وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) مع تحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك من خلال حدود التصحيح التي وجدناها عندما تكون عدد الفترات الجزئية (n) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x ضعف عدد الفترات الجزئية (m) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجيy ، أي ان($h_1 = \frac{1}{2} h_2$) حيث ان h_1 تعني المسافات بين الاحداثيات السينية وان h_2 هي المسافات بين الاحداثيات الصادية و سوف نرمز لهذه الطريقة بالرمزM_i (h_i)اذ يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثنائية حيث انها اعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبيا .

Abstract

The main aim of this search is to derive method to find the values of the double integrals numerically its integrands continuous in the region of the integrals by using Midpoint two dimensions (interior x and exterior y) and how to find the general form of the on the rule errors (correction terms) and we will improve the results by using Romberg acceleraion from correction terms that we found it when the number of subintervals (n) that divided interval integral on the interior dimension x equal to twice the number of subintervals (m) on the exterior dimension y ,that is mean ($h_1=\frac{1}{2} h_2$) when h_1 means the distances between the ordinates on the x axis and h_2 means the distances between the ordinates on the y axis and we denote to this method by $M_i(h_i$) and we can depend on this method to calculate the double integrals because it gave high accuracy in the results by few subintervals.

1- المقدمة:-

إن موضوع التكامل الاحادي مهما كان سلوك المكامل قد تناوله كثير من الباحثين بوجوه عدة ومن الطرائق العددية في هذا المجال هي صيغ نيوتن – كوتس والتي تشمل (قاعدة شبه المنحرف والنقطة الوسطى و سمبسون) وعرضوا من الأمثلة الكثير بحسب سلوك المكامل ومنهم فوكس[7] وشانكس [8] و فوكس و هيز[9] ،محمد [1] ،محمد [10] ومحمد وآخرون [11] ، الطائي [2] ، ضياء [6] ،ناصر [4] وقد اثبت العديد منهم من خلال الأمثلة وقوى h إن أفضل طريقة هي قاعدة سمبسون لحساب التكاملات التي مكاملاتها مستمرة في فترة التكامل بينما قاعدة النقطة الوسطى هي الأفضل في حساب التكاملات المعتلة المكامل في إحدى أو كلتا نهايتي فترة التكامل وكذلك في حساب التكاملات المستمرة لكنها معتلة في المشتقة الأولى أو في المشتقات العليا في إحدى أو كلتا نهايتي فترة التكامل . وقد طبقوا ذلك على أمثلة اعتلالها لوغارتمي أو جذري أو معاً لوغارتمي وجذري .

ان للتكاملات الثنائية اهمية في ايجاد مساحة السطوح وايجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية و ايجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي ، و كمثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب ($\rho = 2(1 - \cos\theta)$ حول المحور القطبي ، فضلا عن اهميته في ايجاد مساحة سطح منحن كايجاد مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الواقعة مباشرة فوق المنحني القلب ($\rho = (1 - \cos\theta)$ أوحساب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2 + z^2 = 6y$ فرانك ايرز[3].

وقد عمل الكثير من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$هما هانس جار و جاكوبسن [12] عام 1973.

عالج محمد [1] في عام 1984 التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو معتلة المشتقة أو المعتلة وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغارتمي أم كليهما) وذلك باستخدام طرائق مركبة منها رومبرك (كاوس) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعد الخارجي y و كاوس على البعد الداخلي x وأيضا منها كاوس (رومبرك) التي استخدم فيها كاوس على البعد الخارجي y وتعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعد الداخلي x ومنها أيضا كاوس (كاوس) على البعدين الخارجي y والداخلي x وكذلك طريقة مركبة اسماها رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x وقد اثبت من خلال المقارنة بين الطرائق المركبة أعلاه وعلى أمثلة متعددة بان الطريقة المركبة من كاوس (كاوس) هي الأفضل من بقية الطرائق بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة على البعدين واثبت بنفس الوقت إن الطريقة المركبة رومبرك (كاوس) هي الأفضل في حساب التكاملات التي مكاملاتها معتلة المشتقة أو معتلة والتي يمكن إلغاء اعتلالها على البعد الداخلي x من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية .

أما الطائي[2] فقد استخدمت في عام 2005 قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x مع إهمال الاعتلال على البعد الداخلي x . وقد أعطت نتائج جيدة أيضا من حيث الدقة بعد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة .

أما ضياء [6] فقد استخدمت في عام 2009 أربع طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى لتعطي طرائق لحساب قيم تكاملات ثنائية حيث مكاملاتها مختلفة السلوك (مستمرة ، أو مستمرة ولكن مشتقاتها معتلة أو معتلة وممكن إلغاء الاعتلال فيها أو التي من غير الممكن إلغاء الاعتلال فيها) وقد أعطت نتائج جيدة من حيث الدقة و عدد الفترات الجزئية وقد أثبتت بان أفضل الطرائق التي تناولتها (للتكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المستمرة لكن معتلة المشتقة) هي الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعد الداخلي x وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y مع إلغاء الاعتلال بالنسبة للتكاملات التي مشتقات مكاملاتها معتلة و المسماة $RM\,(RS)$. أما في حالة التكاملات ذات المكاملات المعتلة التي يمكن إلغاء الاعتلال فيها ، فقد أثبتت إن أفضل طريقة كانت هي ايضا $RM\,(RS)$ المذكورة آنفا ، أما طريقة $RS\,(RS)$ فلم تعط نتائج جيدة لهذا النوع من التكاملات . أما في حالة التكاملات ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها ، فتوصلت إلى إن أفضل طريقة هي طريقة $RM\,(RM)$ المذكورة آنفا .

وقد ناقشت الحالات الآتية عند استخراج صيغ الخطأ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$:-

1. إلغاء الاعتلال على البعد الداخلي باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي ، محمد [1]
2. فرض $y = a$ مع عدم إلغاء الاعتلال حيث a هي نقطة الاعتلال محمد وآخرون [11] .
3. فرض y ثابت مع الأخذ بنظر الاعتبار الاعتلال بالرغم من إمكانية إلغائه على الداخل، محمد [10].

وقد تناول الباحثون في اعلاه هذا الموضوع عندما تكون عدد الفترات الجزئية على البعدين متساوية .اما في بحثنا تناولنا طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية وذلك بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي x والبعد الخارجي y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل الداخلي ضعف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل الخارجي أي ان $h_1 = \frac{1}{2} h_2$ و اسمينا القاعدة $M_i\,(h_i)$ واشتققنا حدود التصحيح في حالة المكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل .

2- التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة

Double Integrals With Continuous Integrands

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي :

$$I = \int_c^d \int_a^b f\,(x,y)\,dx\,dy$$

حيث ان $f\,(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$.

بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=M_i(h_i)+E_i(h_i) \qquad (1)$$

إذ إن $M_i(h_i)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y .

وان $E_i\left(h_i\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $M_i\left(h_i\right)$ ، وان $h_2=\dfrac{(d-c)}{m}, h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$.

معلوم لدينا انه

$$\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=\int_a^b\int_c^d f\left(x,y\right)dydx$$

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_c^d f\left(x,y\right)dy$ (التعامل مع x كثابت) عددياً هو :

$$\int_c^d f\left(x,y\right)dy=h_2\sum_{j=1}^{m}f\left(x,y_j\right)+\frac{(d-c)}{6}h_2^{\,2}\frac{\partial^2 f\left(x,\mu_1\right)}{\partial y^2}-\frac{7(d-c)}{360}h_2^{\,4}\frac{\partial^4\left(x,\mu_2\right)}{\partial y^4}+\dots\ \dots(2)$$

عكار [5] ، فوكس [7] باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد y .

حيث $\mu_\ell\in\left(c,d\right)$ و $\ell=1,2,\dots$ و $y_j=c+\dfrac{2j-1}{2}h_2$ و $j=1,2,\dots,m$.

وبمكاملة (2) عدديا على الفترة $\left[a,b\right]$ أيضا باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد x نحصل على :

$$\int_a^b\int_c^d f\left(x,y\right)dydx=h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i,y_j\right)+h_2\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{(b-a)h_1^{\,2}}{6}\frac{\partial^2 f\left(\zeta_{1j},y_j\right)}{\partial x^2}-\frac{7(b-a)h_1^{\,4}}{360}\frac{\partial^4 f\left(\zeta_{2j},y_j\right)}{\partial x^4}+\dots\right]$$
$$+\int_a^b\left[\frac{(d-c)h_2^{\,2}}{6}\frac{\partial^2 f\left(x,\mu_1\right)}{\partial y^2}-\frac{7(d-c)h_2^{\,4}}{360}\frac{\partial^4 f\left(x,\mu_2\right)}{\partial y^4}+\dots\right]dx$$

حيث $\zeta_{kj}\in\left(a,b\right)$ و $k=1,2,\dots$ و $x_i=a+\dfrac{2i-1}{2}h_1$ و $i=1,2,\dots,n$.

وبما إن $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4},\dots$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4},\dots$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$.

فان صيغة حدود التصحيح تصبح :-

$$E_i\left(h_i\right)=h_2(b-a)m\left[\frac{h_1^{\,2}}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1\right)}{\partial x^2}-\frac{7h_1^{\,4}}{360}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n}_2,\overline{\mu}_2\right)}{\partial x^4}+\dots\right]+(d-c)(b-a)\left[\frac{h_2^{\,2}}{6}\frac{\partial^2 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1\right)}{\partial y^2}-\frac{7h_2^{\,4}}{360}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2\right)}{\partial y^4}+\dots\right]$$

$$=(d-c)(b-a)\frac{1}{6}\left(\frac{h_1^2\partial^2 f\left(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1\right)}{\partial x^2}+\frac{h_2^2\partial^2 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1\right)}{\partial y^2}\right)-\frac{7(d-c)(b-a)}{360}\left(\frac{h_1^4\partial^4 f\left(\overline{n}_2,\overline{\mu}_2\right)}{\partial x^4}+\frac{h_2^4\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2\right)}{\partial y^4}\right)+\dots \qquad (3)$$

حيث $\left(\overline{n}_\ell,\overline{\mu}_\ell\right),\left(\hat{n}_\ell,\hat{\mu}_\ell\right)\in\left[c,d\right]\times\left[a,b\right]$, $\ell=1,2,\dots$.

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ كالآتي :

$$I - M_i(h_i) = (A_1h_1^2 + B_1h_1^4 + C_1h_1^6 + \ldots) + (A_1h_2^2 + B_1h_2^4 + C_1h_2^6 + \ldots) \qquad \ldots(4)$$

حيث $A_i, B_i, C_i, \ldots\ (i = 1,2,\ldots)$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط ولا تعتمد على h_1 و h_2.

سنأخذ حالة خاصة عندما $h_1 = 2\,h_2$ (لكي نتمكن من استخدام تعجيل رومبرك) فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ بالاتي :

$$I - M_i(h_i) = D_1h_1^2 + D_2h_1^4 + D_3h_1^6 + \ldots \qquad \ldots(5)$$

حيث ان $D_1, D_2, D_3, \ldots$ ثوابت .

3- الامثلة :

1- $I = \int_2^3\int_2^3 ln(\frac{x+y}{2})dxdy$ وقيمته التحليلية هي 0.91293034365166 مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية .

2 - $I = \int_1^2\int_1^2 ye^{-(x+y)}dxdy$ وقيمته التحليلية هي 0.07668214130010 مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية .

3 - $I = \int_0^1\int_0^1 \cos((xy)/2)dxdy$ وقيمته التحليلية 0.98621483608613 مقربة الى اربع عشرة مرتبة عشرية .

4 - $I = \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-xy}}dxdy$ وقيمته التحليلية هي 0.3071345511905 مقربة لثلاث عشرة مرتبة عشرية .

5- $I = \int_2^3\int_2^3 (xy)^{\frac{1}{y}}dxdy$ وهو غير معروف القيمة التحليلية .

النتائج

مثال 1-:

ان مكامل التكامل $I = \int_2^3\int_2^3 ln(\frac{x+y}{2})dxdy$ معرف لكل $(x,y)\in[2,3]\times[2,3]$ و ان صيغة حدود التصحيح للتكامل المذكور مشابهه للصيغة (5) وشكل الدالة موضح بالتمثيل الهندسي رقم (1) نلاحظ من الجدول (1) عندما m= 16 ، n=32 فان قيمة التكامل صحيحة الى اربعة عشر مرتبة عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين مع تعجيل رومبرك بـ 2^9 فترة جزئية بينما باستخدام الطريقة بدون التعجيل المذكور فان القيمة صحيحة الى خمس مراتب عشرية.

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8
1	2	0.91503916676510				
2	4	0.91346077841840	0.91293464896950			
4	8	0.91306315858777	0.91293061864422	0.91293034995587		
8	16	0.91296356034842	0.91293036093530	0.91293034375471	0.91293034365628	
16	32	0.91293864863717	0.91293034473342	0.91293034365329	0.91293034365168	0.91293034365166

الجدول (1) يبين حساب التكامل الثنائي $I = \int_2^3\int_2^3 ln((x+y)/2)dxdy$ بطريقة $M_i\ (h_i\ )$

مثال 2 :-

لحساب التكامل الثنائي $I = \int_1^2\int_1^2 ye^{-(x+y)}dxdy$ عددياً ، من الواضح إن المكامل معَرف لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (5) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (2) نلاحظ من الجدول (2) عندما m=16،n=32 فان قيمة التكامل المذكور تكون صحيحة الى خمسة عشر مرتبة عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك بـ 2^9 فترة جزئية بينما باستخدام الطريقة بدون التعجيل المذكور تكون صحيحة الى اربع مراتب عشرية

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8
1	2	0.073882345106949				
2	4	0.075969610494710	0.076665365623963			
4	8	0.076503206311860	0.076681071584243	0.076682118648262		
8	16	0.076637357155815	0.076682074103800	0.076682140938437	0.076682141292249	
16	32	0.076670942110213	0.076682137095012	0.076682141294426	0.076682141300077	0.076682141300108

الجدول (2) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_1^2 ye^{-(x+y)}dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$.

مثال 3:-

كذلك مكامل التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \cos((xy)/2)dxdy$ معَرف لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (5) ، وكما موضح بالتمثيل الهندسي رقم (3) نلاحظ من الجدول (3) عندما n=32،m=16 فان قيمة التكامل المذكور تكون صحيحة الى ثلاثة عشر مرتبة عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك بـ 2^9 فترة جزئية بينما باستخدام الطريقة بدون التعجيل فان القيمة صحيحة الى اربع مراتب عشرية .

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8
1	2	0.99026041190068				
2	4	0.98726148821040	0.98626184698031			
4	8	0.98647866395450	0.98621772253587	0.98621478090624		
8	16	0.98628092773483	0.98621501566160	0.98621483520332	0.98621483606518	
16	32	0.98623136740615	0.98621484729660	0.98621483607226	0.98621483608606	0.98621483608614

الجدول (3) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \cos((xy)/2)dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

مثال 4 :-

المكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-xy}}dxdy$ مستمر لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ لذا فأن صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (5) وشكل الدالة موضح بالتمثيل الهندسي (4) ونلاحظ من الجدول (4) عندما n=64 و m=32 فان قيمة التكامل أعلاه صحيحة الى اربع مراتب عشرية باستخدام قاعدة $M_i(h_i)$ و قد اصبحت القيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لثلاث عشر مرتبة عشرية) باستخدام تعجيل رومبرك بــ 2^{11} فترة جزئية.

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	2	0.3017453061170					
2	4	0.3057501508417	0.3070850990833				
4	8	0.3067858524317	0.3071310862950	0.3071341521091			
8	16	0.3070472088244	0.3071343276220	0.3071345437104	0.3071345499263		
16	32	0.3071127050324	0.3071345371017	0.3071345510670	0.3071345511838	0.3071345511887	
32	64	0.3071290889892	0.3071345503081	0.3071345511885	0.3071345511905	0.3071345511905	0.3071345511905

الجدول (4) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-xy}}dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

مثال 5 :-

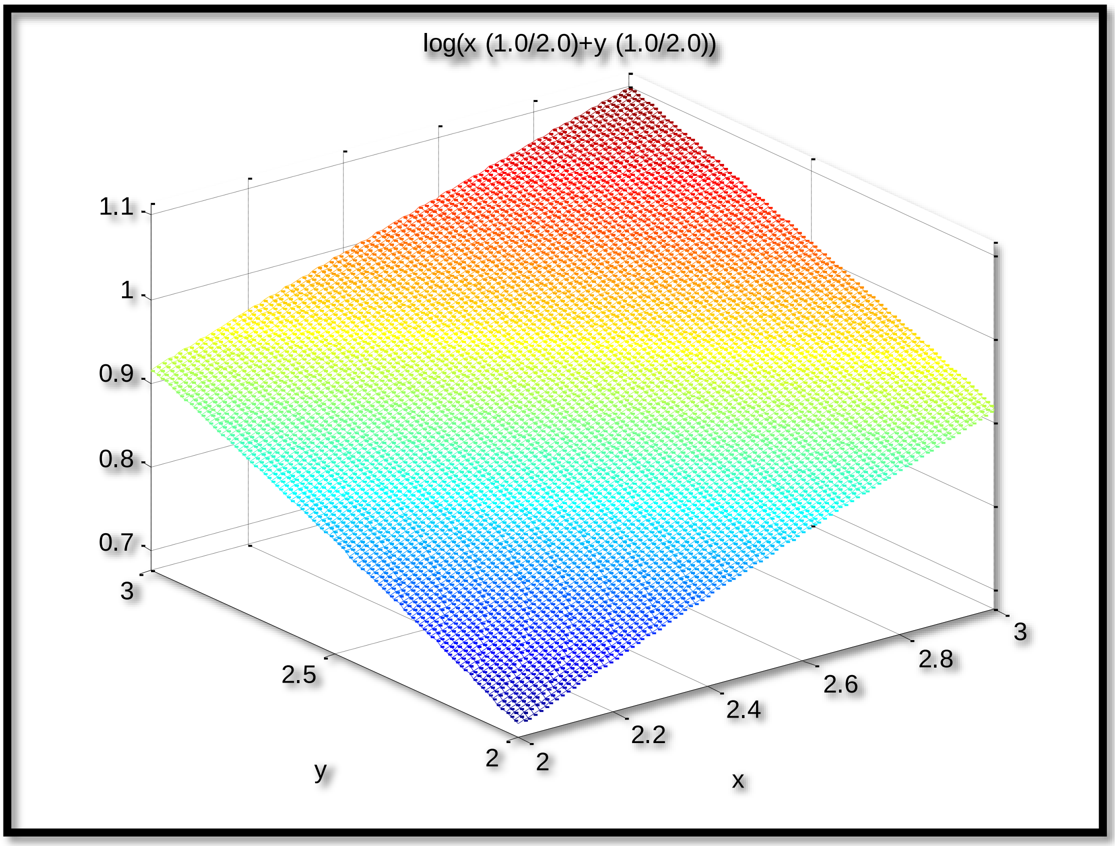
وبالنسبة لمكامل التكامل الثنائي $I=\int_2^3\int_2^3 (xy)^{\frac{1}{y}}dxdy$ فهو ايضا مستمر لكل $(x,y)\in[2,3]\times[2,3]$ وان صيغة حدود التصحيح للتكامل المذكور مماثلة للصيغة (5) وشكل الدالة موضح بالتمثيل الهندسي رقم (5) بالرغم من ان التكامل غير معروف القيمة التحليلية لكن يتضح من الجدول (5) وبسبب تكرار العدد 2.08319749522837 في العمودين عندما k=10,k=8 نستطيع القول بان قيمة هذا التكامل هي المذكورة مقربة لاربع عشرمرتبة عشرية عندما n=64 ، m=32 .

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	2	2.08528807401597					
2	4	2.08373454227084	2.08321669835580				
4	8	2.08333271783848	2.08319877636103	2.08319758156138			
8	16	2.08323136202120	2.08319757674877	2.08319749677462	2.08319749542880		
16	32	2.08320596576552	2.08319750034696	2.08319749525351	2.08319749522936	2.08319749522858	
32	64	2.08319961310287	2.08319749554866	2.08319749522877	2.08319749522838	2.08319749522837	2.08319749522837

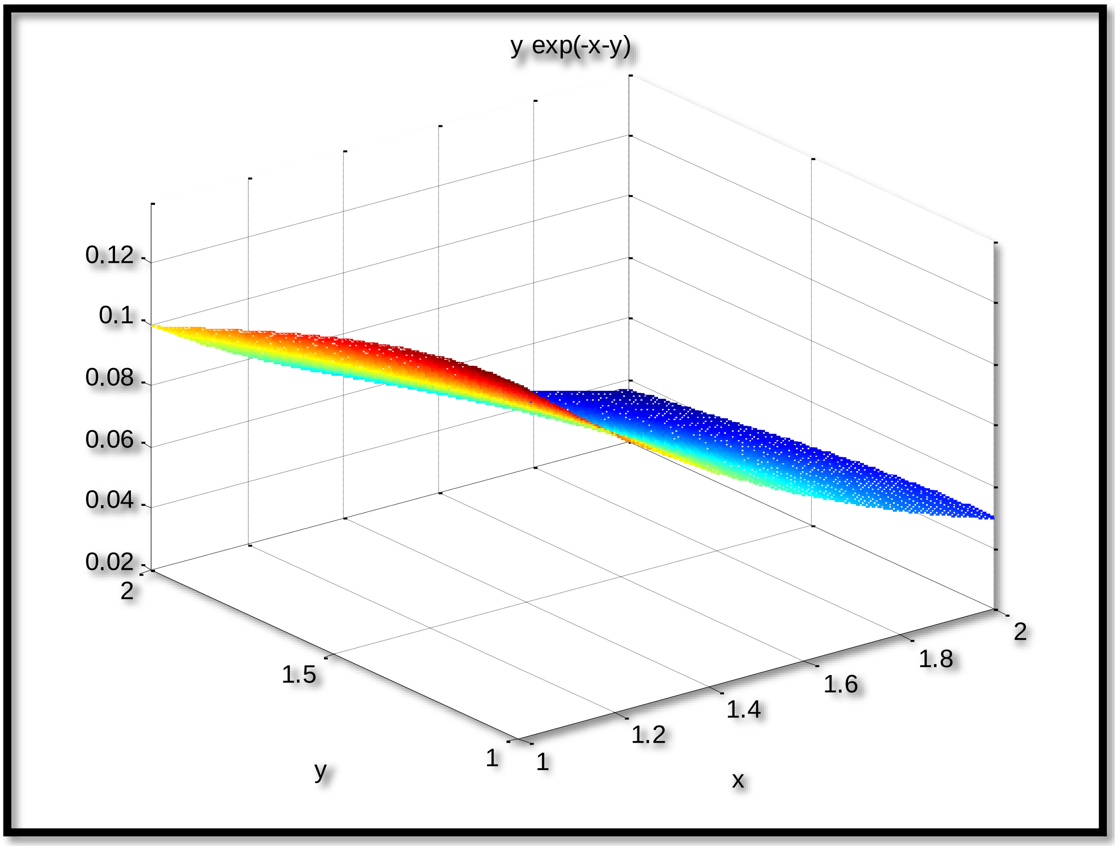
الجدول (5) يبين حساب التكامل الثنائي $I = \int_2^3\int_2^3 (xy)^{\frac{1}{y}} dxdy$ بطريقة $M_i\ (h_i)$

4- المناقشة

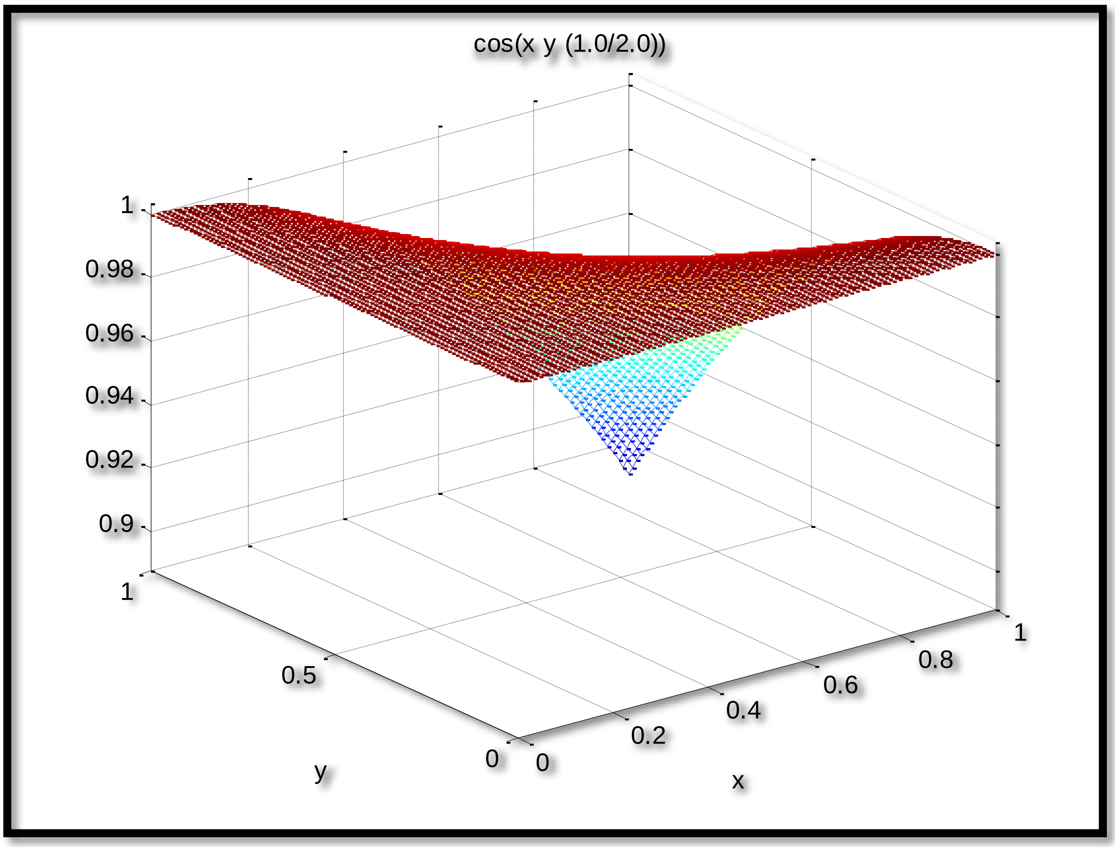
يتضح من خلال جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل بقاعدة النقطة الوسطى على كل من البعدين عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي ضعف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة قيما صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رومبرك ، الا انه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية مقارنة مع القيم التحليلية و بذلك يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة .



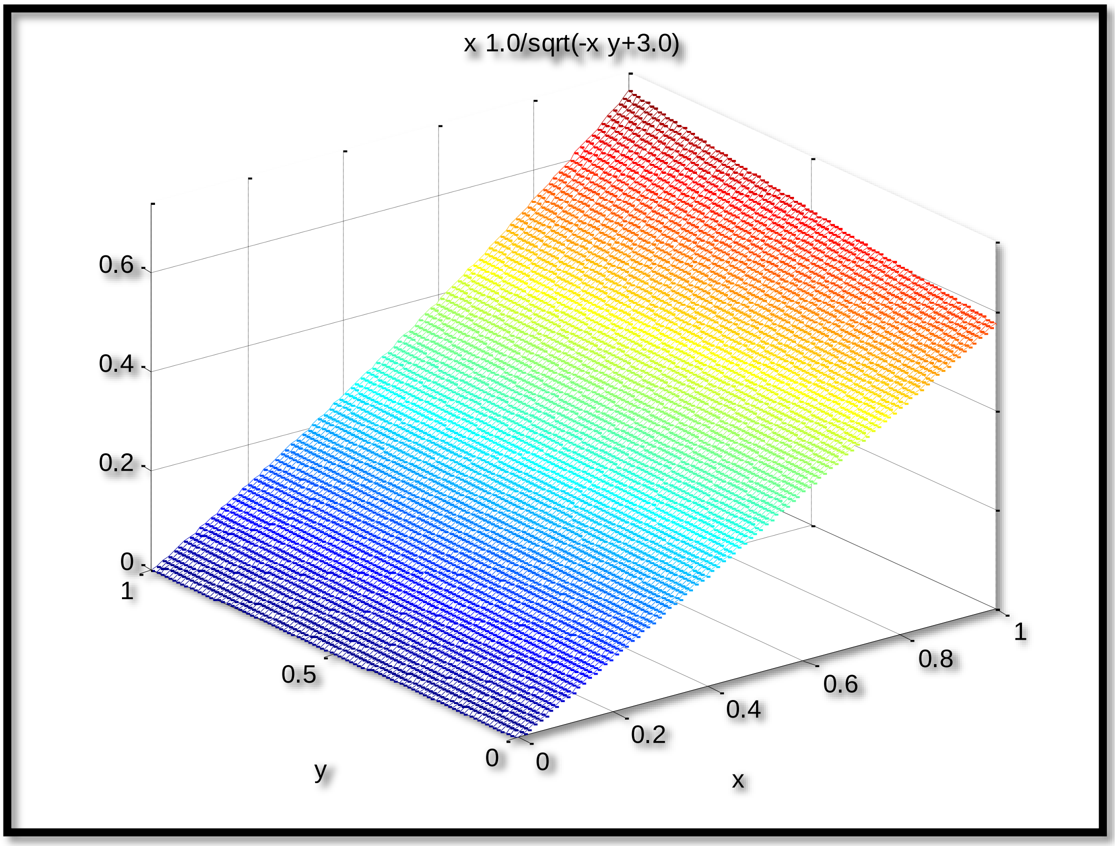
التمثيل الهندسي (1) يبين شكل الدالة $\ln((x+y)/2)$ في المنطقة $[2,3]\times[2,3]$



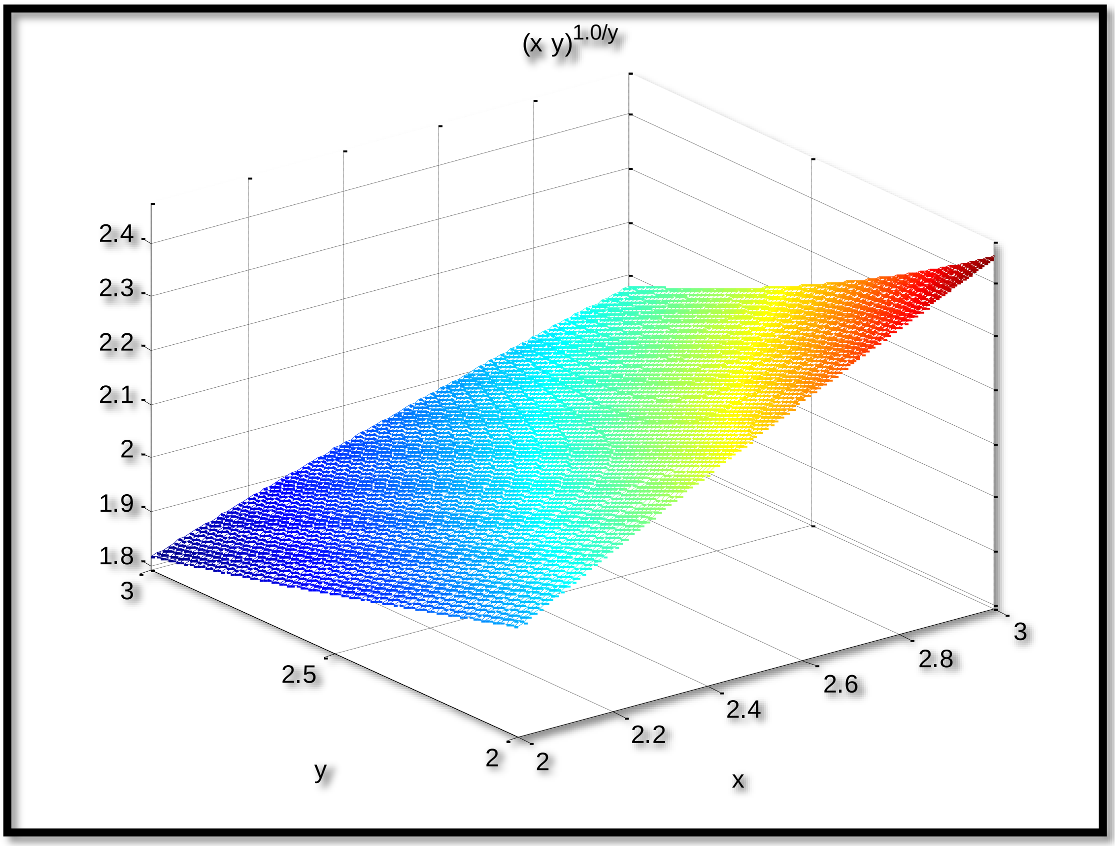
التمثيل الهندسي (2) يبين شكل الدالة $ye^{-(x+y)}$ في المنطقة $[1,2]\times[1,2]$



التمثيل الهندسي(3) يبين شكل الدالة $\cos\frac{xy}{2}$ في المنطقة $[0,1]\times[0,1]$



التمثيل الهندسي (4) يبين شكل الدالة $\frac{x}{\sqrt{3-xy}}$ في المنطقة $[0,1]\times[0,1]$



التمثيل الهندسي (5) يبين شكل الدالة $(xy)^{\frac{1}{y}}$ في المنطقة $[2,3]\times[2,3]$

المصادر

1- محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة البصرة ، 1984.

2- الطائي ، علية شاني ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2005 .

3- فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين ، الطبعة العربية الثانية ،1988 .

4- ناصر ، رسل حسن ، " المقارنة بين الطريقتين التعجيليتين ايتكن و رومبرك في حساب التكاملات عدديا " ،رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2011 .

5- عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية "، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2010 .

6- ضياء ، عذراء محمد ، " طرائق عددية لإيجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2009 .

7-Fox L. , " Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967 .

8-Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 pp. 360 , 361 , 1972 .

9- Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

10- Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7 , No.3 , pp. 21-28 , 2002 .

11- Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009.

12- Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973.