حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستعمال طريقة (RM (RMM

م.م صفاء مهدي موسى الجصاص

جامعة الكوفة / كلية التربية للبنات / قسم الرياضيات

الخلاصة

الهدف الرئيس من هذا البحث هو حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرةعددياً باستعمال توسيع جديد ناتج من أفضل طرائق أيجاد القيم التقريبية للتكامل الأحادي وهي تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي Z مع إحدى طرائق أيجاد القيم التقريبية للتكامل الثنائي وهي تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين الداخلي X والأوسط Y (RMM) عندما عدد التقسيمات على البعد الداخلي مساوي إلى عدد التقسيمات على البعد الأوسط لكن كلاهما غير مساوي لعدد التقسيمات على البعد الخارجي واسمينا الطريقة بـ$RM\,(RMM)$ حيث حصلنا على دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلةنسبياً وبوقت قليل.

1.المقدمة

أنيجاد قيم التكاملات الثلاثية تحليلياً ليس من السهل في كثير من الأحيان لذا أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات ونظراً لأهميتها في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2+y^2=4x$ وفوق $z=0$ وتحت $x^2+y^2=4z$. والحجم الواقع داخل الاسطوانة $\rho=4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $p^2+z^2=16$ ومن الأسفل بالمستوي $z=0$. وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع تحت $z^2=xy$ وفوق المثلث $y=x, y=0, x=4$. كذلك حساب عزم القصور الذاتي للحجم الواقع داخل $x^2+y^2=9$ وفوق المستوي $z=0$ وتحت المستوي $x+z=4$. وتبرز أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع وصفيحة رقيقة من المعدن، فرانك آيرز [3] .

وقد عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية منهم ضياء [4] في عام 2009 حيث استخدمت طرائق إيجاد القيم التقريبية للتكاملات الأحادية لتكوين طرائق عددية مركبة هي $RMRM(RS)$، $RMRM\,(RM)$، $RMRS(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (Z) و ($RM\,(RS$, $RS\,(RS), RS\,(RM), RM\,(RM)$ على البعد الأوسط (Y) والبعد الداخلي (X) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب تكاملات ثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

وفي عام 2010 قدمت عكار [5] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وأسمتها $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلةنسبياً .

وفي عام 2013 قدم محمد وآخرون [6] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستعمال طريقة $RSSS$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وقد حصلوا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية إلى القيم الحقيقية للتكاملات وبفترات جزئية قليلة نسبياً .

وفي عام 2014 قدم شبر [7] ست طرائق عددية هي (RMTS, RMST,RSTM, RSMT, RTMS, RTSM) لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وهذه الطرائق الناتجة من تعجيل رومبرك مع قواعد نيوتن – كوتس (شبه المنحرف، النقطة الوسطى و سمبسون)على الأبعاد الثلاثة X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وقد حصل على نتائج جيدة.

وفي العام نفسه قدمت كاظم[8] وبنفس أسلوب الباحثين عكار[5]، محمد[6] وشبر[7] أيضا ست طرائق عددية هي (RSTS, RSST,RTSS, RTST, RSTT, RTTS) لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وهذه الطرائق الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدتي من قواعد نيوتن – كوتس (شبه المنحرف و سمبسون) وأيضا حصلت على نتائج جيدة.

أما في بحثنا هذا قدمنا طريقة عددية جديدة مكونة من (طرائق التكامل الأحادي والثنائي) لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة باستعمال طريقة رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) محمد [9] وضياء [4] على البعد الخارجي Z وتعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين الداخلي X والأوسط Y (RMM)، عكار [5] ورمزنا لهذه الطريقة بـرمز $RM\ (RMM)$ وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقة والسرعة في الاقتراب إلي القيمة الحقيقية للتكاملات وبأقل عدد من الفترات الجزئية المستخدمة وبوقت قليل .

2.حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستعمال الطريقة(RM (RMM

لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية بالطريقة المذكورة أعلاه سوف نستخدم قاعدة النقطة الوسطى التي صيغتها العامة :

$$M = h\sum_{i=1}^{m} f\left(a + \frac{2i-1}{2}\right) \quad \dots (1)$$

فوكس[2]

وصيغة حدود التصحيح لها في حالة كون دالة التكامل مستمرة هي:-

$$E_M(h) = \beta_1 h^2 + \beta_2 h^4 + \beta_3 h^6 + \cdots \quad \dots (2)$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ثوابت ، محمد [9] ، ضياء [4].

و قاعدة MM (النقطة الوسطى على البعدين الداخلي والأوسط) التي صيغتها العامة :-

$$MM = h\sum_{j=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} f\left(a + \frac{2i-1}{2}, c + \frac{2j-1}{2}\right) \quad \dots (3)$$

وصيغة حدود التصحيح لها في حالة كون دالة التكامل مستمرة هي:-

$$E_{MM}(h) = \omega_1 h^2 + \omega_2 h^4 + \omega_3 h^6 + \cdots \quad \dots (4)$$

حيث $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ثوابت ، عكار [5].

والصيغة العامة لتعجيل رومبرك هي :

$$G = \frac{\left(2^k G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h)\right)}{\left(2^k - 1\right)}$$

حيث G قيمة في العمود الجديد لجدول رومبرك وكل من $G(h)$، $G\left(\frac{h}{2}\right)$ قيمتان في العمود السابق منه ، فضلا عن إن العمود الأول من الجدول يمثل قيم القاعدة المستخدمة ، رالستون [1].

نستعرض ألان كيفية حساب القيم التقريبية للتكامل الثلاثي باستعمال طريقة RM (RMM)

نفرض أن التكامل I معرف بالشكل :-

$$I = \int_e^g \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad \dots (5)$$

ولكي نجد القيمة التقريبية له نكتبه بالشكل :-

$$= \int_e^g F(z)\, dz \quad \dots (6)$$

حيث إن

$$F(z)=\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdy \qquad ...(7)$$

إن القيمة التقريبية للتكامل (6) (على البعد الخارجي z) بقاعدة النقطة الوسطى هي :-

$$I=h\sum_{k=1}^{m}F(z_k)+E(h) \qquad ...(8)$$

إذ إن : $z_k=e+\frac{2k-1}{2}h$, $k=1,2,...,m$ ، m هي عدد تقسيمات الفترة $[e,g]$ و $h=\frac{g-e}{m}$ وان $E(h)$ هي حدود التصحيح على البعد الخارجي Z .

و لحساب قيم $F(z_k)$ بصوره تقريبية يتم تعويض قيم z_k في (7) فنحصل على :-

$$F(z_k)=\int_c^d\int_a^b f(x,y,z_k)dxdy \qquad ...(9)$$

وعند تطبيق قاعدة (MM) على التكامل (9) (على البعدين الداخلي X والأوسط Y) نحصل على الصيغة :-

$$F(z_k)=\bar{h}^2\sum_{j=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1}f\left(x_i,y_j,z_k\right)+\bar{E}\left(\bar{h}\right) \qquad ...(10)$$

حيث أن : $x_i=a+\frac{2i-1}{2}\bar{h}$, $i=1,2,...,m_1$ و $y_j=c+\frac{2j-1}{2}\bar{h}$, $j=1,2,...,m_2$

m_1 عدد تقسيمات الفترة $[a,b]$ و m_2 عدد تقسيمات الفترة $[c,d]$ حيث $\bar{h}=\frac{b-a}{m_1}=\frac{d-c}{m_2}$ وان $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ هي حدود التصحيح على البعد الداخلي والأوسط .

ويمكننا تحسين قيم $F(z_k)$ بطريقة تعجيل رومبرك مستخدمين القيم المحسوبة من الصيغة (10) والناتجة من استخدام قاعدة MM . إن قيم $F(z_k)$ الناتجة ما هي إلا قيم تقريبية للتكامل (7) بعد تطبيق تعجيل رومبرك عليها. وبعد تعويض $F(z_k)$ لكل $k=1,2,...,m$ في الصيغة (8) ، يمكننا تطبيق طريقة تعجيل رومبرك على هذه القيم بعد معرفة صيغة $E(h)$ وبذلك نحصل على قيم التكامل (6) بطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى وهذا يؤدي إلى معرفة قيمة التكامل (5) بصورة تقريبية.

إن صيغة الخطأ $\bar{E}(\bar{h})$ تكون مماثلة للصيغة (4) وإن صيغة الخطأ $E(h)$ تكون مماثلة للصيغة (2).

أما عند تقسيم الفترات $[a,b]$ ، $[c,d]$ و $[e,g]$ إلى m_1,m_2 $(m_2=m_1)$ و m على التوالي من التقسيمات عند تطبيق الطريقة المذكورة فقد استخدمنا القيم الآتية:- $m=1,2,4,8,...$ ، $m_2=m_1=1,2,4,8,...$

فعندما نضع $m=1$ نحسب قيمة التكامل (6) بطريقة تعجيل رومبرك على قيم النقطة الوسطى ثم نضع $m=2$ ونحسب قيمة التكامل (6) بالأسلوب نفسه أعلاه وهكذا إلى أن نحصل على قيمة يكون الخطأ المطلق فيها اقل من أو يساوي قيمة معينة سميت $Eps1$ (على البعد الخارجي Z).

ولكي نجد قيمة التكامل (6) يتطلب منا إيجاد $F(z_k)$ بطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة MM على التكامل (9) ، على سبيل المثال عندما نضع $m=1$ في الصيغة (8) علينا أن نحسب $F(z_1)$ من الصيغة (10) عندما $m_1=m_2=1$ ثم $m_1=m_2=2$ وهكذا إلى أن نحصل على قيمة يكون الخطأ المطلق فيها هو Eps (على البعدين الداخلي والأوسط).

ولنفرض أننا حصلنا على هذه القيمة عندما $m_1 = m_2 = 8$ ، فإننا سوف نثبّت في الجداول القيمة التقريبية للتكامل على أنها القيمة الناتجة عندما $m = 1$ و $m_1 = m_2 = 8$. أما إذا كانت $m = 2$ فانه يجب علينا حساب $F(z_1)$ و $F(z_2)$ للصيغة (8) من خلال تطبيق الصيغة (10) عندما $m_1 = m_2 = 1$ ثم $m_1 = m_2 = 2$ وهكذا. وعلى فرض إن الخطأ المطلق في قيمة $F(z_1)$ اقل من أو يساوي Eps عندما $m_1 = m_2 = 16$ والخطأ المطلق في قيمة $F(z_2)$ هي اقل من أو يساوي Eps عندما $m_1 = m_2 = 64$ في هذه الحالة فأننا سوف نثبت في جداولنا القيمة التقريبية للتكامل المعرف بالصيغة (5) على أنها النتيجة المحصل عليها عندما $m = 2$ و $m_1 = m_2 = 64$ أي نثبت القيمة الأكبر لـ $m_1 = m_2$ وهكذا عندما تكون $m > 2$.

ملاحظة :- إن الخطأ المطلق المشار إليه بـ $Eps1$ و Eps ليس شرطا أن يكون متساويا ويقوم بمقارنة القيمة التالية مع القيمة التي سبقتها في الصف نفسه من جداول رومبرك.

3. الأمثلة والنتائج

مثال 1 :- أن التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 5.07321411177285 (مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ وان صيغة $F(z)$ للتكامل المذكور ممكن الحصول عليها من الصيغة (7) وذلك بمكاملتها تحليليا بالنسبة لـ x و y فنحصل على :-

$$F(z) = e^{2+z} - 2e^{1+z} - e^{z}$$

وبوضع $Eps1 = 10^{-12}$ (الخطأ المطلق على البعد الخارجي Z) و $Eps = 10^{-14}$ (الخطأ المطلق على البعدين X,Y) وتطبيق طريقة RM(RMM) حصلنا على القيم المدونة في الجدول (1) حيث يشير إلى انه يمكننا الحصول على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية عندما $m = 32$ و $m_1 = m_2 = 64$

مثال 2 :- أن التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3y+2z)dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 0.12410069166858 (مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]$ وان صيغة $F(z)$ يمكن الحصول عليها من الصيغة (7) فعند مكاملتها تحليليا بالنسبة لـ x و y يكون بالشكل الأتي :-

$$F(z) = -\frac{\pi^2}{96}\cos(\frac{3\pi}{4}+2z) + \frac{\pi^2}{96}\cos(2z)$$

وبوضع $Eps1 = 10^{-12}$ و $Eps = 10^{-14}$ وتطبيق طريقة RM(RMM) حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (2) حيث يشير إلى انه يمكننا الحصول على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية للتكامل المذكور وبالدقة أعلاه عندما $m = 32$ و $m_1 = m_2 = 64$

مثال 3 :- التكامل $I = \int_{3.5}^{4}\int_{2.5}^{3}\int_{1.5}^{2} \frac{y}{\sqrt{(x+z)^3}}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية هي0.02671921747254 (مقربة إلى لأربع عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[1.5,2]\times[2.5,3]\times[3.5,4]$ وان صيغة $F(z)$ ممكن الحصول عليها من الصيغة (7) وذلك بمكاملتها تحليليا بالنسبة لـ x و y فنحصل على :-

$$F(z) = \frac{-11}{4\sqrt{2+z}} + \frac{11}{4\sqrt{1.5+z}}$$

وبوضع $Eps1 = 10^{-12}$ و $Eps = 10^{-14}$ وتطبيق طريقة RM(RMM) حصلنا على القيم المدونة في الجدول (3) حيث يشير إلى انه يمكننا الحصول على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية للتكامل وبالدقة أعلاه عندما $m = 8$ و $m_1 = m_2 = 16$

مثال 4 :- أن التكامل $I = \int_2^3\int_2^3\int_2^3 (xyz)^{\frac{1}{yz}} dxdydz$ غير معروف القيمة التحليلية وذات مكامل معرف لكل $(x,y,z) \in [2,3]\times[2,3]\times[2,3]$ وان صيغة $F(z)$ ممكن الحصول عليها من الصيغة (7) حيث أن:-

$$F(z) = \int_2^3\int_2^3 (xyz)^{\frac{1}{yz}} dxdy$$

وبوضع $Eps = Eps1 = 10^{-14}$ وتطبيق طريقة RM(RMM) حصلنا على القيم المدونة في الجدول (4) حيث يشير إلى أن القيمة ثابتة لأربعة عشر مرتبة عشرية عندما $m = 32$ و $m_1 = m_2 = 64$ وعندما $m = m_1 = m_2 = 64$ أذن نستنتج أن القيمة صحيحة لأربعة عشر مرتبة عشرية وبالدقة أعلاه عندما $m = 32$ و $m_1 = m_2 = 64$ بهذا ونستدل على أن قيمة التكامل أعلاه مقربة إلى أربعة عشر مرتبة عشرية وهي 1.5610641011829.

4. المناقشة

تبين من خلال نتائج جداول هذا البحث عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة المركبة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد Z و قاعدة MM مع تعجيل رومبرك على البعدين X, Y أن هذه الطريقة تعطي نتائج جيدة حيث حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية في التكامل الأول وعلى قيمة مطابقة للقيمة التحليلية للتكاملين الثاني والثالث واما التكامل الرابع الغير معروف القيمة التحليلية حصلنا على قيمة صحيحة لاربعة عشرة مرتبة عشرية وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقة المذكورة $RM(RMM)$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة حيث تعطي نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية إلى القيم التكاملات الحقيقية والزمن المستخدمة .

m	$RM(RMM)$	$m_1 = m_2$
1	4.86783709072754	64
2	5.07172222769886	64
4	5.07321165545589	64
8	5.07321411079030	64
16	5.07321411177279	64
32	5.07321411177287	64

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z} dxdydz = 5.07321411177285$$

m	$RM\ (RMM)$	$m_1 = m_2$
1	0.13784121140700	64
2	0.12385116147165	64
4	0.12410170767866	64
8	0.12410069066531	64
16	0.12410069166882	64
32	0.12410069166858	64

الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(3y + 2z)\, dxdydz = 0.12410069166858$$

m	$RM\ (RMM)$	$m_1 = m_2$
1	0.02668455949202	16
2	0.02671918431868	16
4	0.02671921745622	16
8	0.02671921747254	16

الجدول (3) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_{3.5}^{4}\int_{2.5}^{3}\int_{1.5}^{2} \frac{y}{\sqrt{(x+z)^3}}\, dxdydz = 0.02671921747254$$

m	$RM\ (RMM)$	$m_1 = m_2$
1	1.55603591879090	64
2	1.56101260298810	32
4	1.56106383863020	64
8	1.56106410079864	64
16	1.56106410118323	64
32	1.56106410118290	64
64	1.56106410118290	64

$$I = \int_2^3\int_2^3\int_2^3 (xyz)^{\frac{1}{yz}}\, dxdydz$$ **الجدول (4) حساب التكامل الثلاثي**

المصادر

[1] Anthony Ralston ,"A First Course in Numerical Analysis " McGraw -Hill Book Company , (1965) .

[2] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , (1967)

[3] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين (1988).

[4] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،(2009) .

[5] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة (2010).

[6] محمد، علي حسن ، صفاء مهدي موسى ، وفاء محمد عبود، " اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها " ، بحث منشور في مجلة جامعة كربلاء المجلد الحادي عشر العدد الرابع رقم الصفحات67-76، (2013) .

[7] شبر، عدنان وسيل كاظم ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من صيغ نيوتن– كوتس لحساب التكاملات الثلاثية المحددة وتحسين النتائج باستخدام طرق تعجيلية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة (2014).

[8] كاظم ، رحاب رحيم ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة وتحسين النتائج باستخدام طرق تعجيلية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة (2014).

[9] محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة البصرة (1984).

Evaluation of Triple Integrals with Continuous Integrands Numerically by Using Method RM(RMM)

Assis. Lecturer .*Safaa Mahdi Muosa* AL-Gasas
University of Kufa / College of Education for Girls / Department of Mathematics

Abstract

The main aim of this paper is to evaluate triple integrals with continuous integrands numerically by using extension resulting from best methods that find the approximate values of single integral Romberg acceleration with Mid-point rule (RM) on the exterior dimension Z with one of methods that find the approximate values for the double integral and it Romberg acceleration with Mid-point rule on both dimensions of interior X and middle Y, (RMM) when the number of divisions on the interior dimension is equal to the number divisions on the middle dimension , but both is not equal to the number divisions on the exterior dimension and we shall call this method by RM(RMM), where we got high accuracy in the results by few subintervals relatively and few time.